1. EXERCÍCIO: mostre que t(n) = O(n), onde t é definida por

```
  t(1) = a
  t(n) = b + t(piso(n/2)) + t(teto(n/2)),
```

sendo a e b constantes positivas quaisquer.

```
===============================================================
-------------------------- SOLUÇÃO --------------------------
```

(Observação (NÃO FAZ PARTE DA SOLUÇÃO): na prática,
as constantes são escolhidas durante a consideração
da base e do passo, onde descobrimos quais restrições
devem ser satisfeitas pelas constantes. A redação abaixo
foi possível porque, antes, nós fizemos essa consideração,
e então descobrimos as restrições relevantes.)

Temos que mostrar que existem c > 0 e n_0 > 0 tais que,
para todo n >= n_0, t(n) <= c*n.
Nós mostraremos primeiramente que existem c > 0, d > 0 e n_0 > 0
tais que, para todo n >= n_0, t(n) <= c*n - d.
Obviamente, como d > 0 => c*n - d <= c*n, então nós teremos
demonstrado o resultado desejado.

Sejam então d = b, c = a+b, e n_0 = 1.
(Observação: quaisquer d >= b e c >= a + d seriam suficientes.)

* Base (n = 1): Temos que mostrar que t(1) <= c*1 - d. De fato, temos:

```
  t(1) = a = (a+b)*1 - b = c*1 - d, CQD.
```

* Hipótese de indução: t(n') <= c*n' - d, para todo n' < n.

* Passo (n > 1): temos que mostrar que t(n) <= c*n - d. De fato, temos:

```
  t(n) = b + t(piso(n/2)) + t(teto(n/2))
      <= b + c*piso(n/2) - d + c*teto(n/2) - d  --> pela HI
       = d + c*piso(n/2) - d + c*teto(n/2) - d  --> pois d = b
       = c*piso(n/2) + c*teto(n/2) - d
       = c*n - d, CQD.
-------------------------- SOLUÇÃO --------------------------
===============================================================
```

2. OBSERVAÇÃO: a "moral do exercício" acima é que, certas vezes,
o palpite da solução de uma equação de recorrência está certo,
mas parece difícil prová-lo por indução diretamente;
frequentemente, porém, é possível provar o resultado facilmente
trocando-se a tese a ser provada (por indução) por uma mais forte.
No caso acima, por exemplo, a adição de um termo negativo à
inequação da tese facilitou a demonstração do resultado,
sem, obviamente, comprometer a correção do argumento.
Observe, porém, que a adição do termo negativo somente foi
efetiva porque a equação recorrente principal possui duas
ocorrências da função "t" do lado direito, de forma que,
no passo da indução, o termo negativo adicionado aparece
duas vezes, e uma das ocorrências fica "livre" para utilizarmos
no argumento.

O exercício abaixo exemplifica demonstrações simples do tipo f = Ômega(g).

3. EXERCÍCIO: Mostre que t(n) = Ômega(lg n), sendo "t" definida por

```
  t(n) = 1, se n = 1;
  t(n) = t(piso(n/2)) + 5, se n > 1.

===============================================================
---------------------------- SOLUÇÃO --------------------------
Temos que mostrar que existem c > 0 e n_0 > 0 tais que,
  para todo n >= n_0,
  0 <= c*lg n <= t(n).

Sejam c = 1 e n_0 = 1.
Obviamente, para todo n >= n_0, temos 0 <= lg n = c*lg n.
Resta, portanto, apenas provar que c*lg n <= t(n) para todo n >= n_0.
Nós o faremos por indução em n:

* BASE (n=1): temos que mostrar que c*lg 1 <= t(1).
  De fato, temos: c*lg 1 = c*0 = 0 <= 1 = t(1), CQD.

* HIPÓTESE DE INDUÇÃO: c*lg n' <= t(n'), para todo n' < n.

* PASSO (n>1): temos que mostrar que c*lg n <= t(n). De fato, temos:

  t(n) = t(piso(n/2)) + 5
      >= c*lg(piso(n/2)) + 5 --> pela HI, já que n > 1 => piso(n/2) < n.
       = lg(piso(n/2)) + 5
      >= lg(n/2) - 1 + 5     --> pois lg(piso(x)) >= lg(x)-1; veja o lema
abaixo.
       = lg(n/2) + 4
       = lg(n) - lg(2) + 4
       = lg(n) - 1 + 4
       > lg(n)
       = c*lg(n), CQD.

---------------------------- SOLUÇÃO --------------------------
===============================================================


O lema abaixo prova um resultado simples utilizado na solução acima:


4. LEMA: para todo real x >= 1, lg(piso(x)) >= lg(x) - 1.

===============================================================
---------------------------- SOLUÇÃO --------------------------
Seja k = lg(piso(x)). Temos então:

   2^(k+1) = 2*(2^k)
           = 2*piso(x)          --> pois 2^(lg y) = y, para todo y.
           = piso(x) + piso(x)
          >= piso(x) + 1        --> pois x >= 1
          >= teto(x)
          >= x

   e, aplicando lg dos dois lados, obtemos:

       k + 1 >= lg(x)
   <=> lg(piso(x)) + 1 >= lg(x)
   <=> lg(piso(x)) >= lg(x) - 1, CQD.

---------------------------- SOLUÇÃO --------------------------
===============================================================


O lema abaixo exemplifica o fato de que, para mostrarmos que f = O(g),
  nem sempre é necessário provar uma indução com n_0 = 1.
```

5. LEMA: t(n) = O(lg n), sendo "t" definida como no exercício 3, isto é,

  t(n) = 1, se n = 1;
  t(n) = t(piso(n/2)) + 5, se n > 1.

==
--------------------------- DEMONSTRAÇÃO ---------------------------

(Observação (NÃO FAZ PARTE DA SOLUÇÃO): observe que NÃO EXISTE
  c > 0 tal que 1 = t(1) <= c*lg(1) = 0. Entretanto, observe que
  não é necessário definir n_0 = 1; de fato, n_0 pode ser escolhido
  tão grande quanto desejado, e, assim, abaixo nós o escolhemos
  grande o suficiente se demonstrar a base da indução.)

Temos que mostrar que existem c > 0 e n_0 > 0 tais que,
  para todo n >= n_0, t(n) <= c*lg n.

De fato, sejam c = 6 e n_0 = 2.
Nós mostraremos o resultado por indução em n:

* BASE (n = 2 ou 3): temos que mostrar que t(n) <= c*lg n.

  a) n=2: temos:
  t(2) = t(piso(2/2)) + 5 = t(1) + 5 = 6 = 6*lg 2, CQD.

  b) n=3: temos:
  t(3) = t(piso(3/2)) + 5 = t(1) + 5 = 6 < 6*lg 3, CQD.

* HIPÓTESE DE INDUÇÃO: t(n') <= c*lg n', para todo n' < n.

* PASSO (n >= 4): temos que mostrar que t(n) <= c*lg n. Temos:

```
  t(n) = t(piso(n/2)) + 5
      <= 6*lg(piso(n/2)) + 5  --> pela HI, já que piso(n/2) < n.
      <= 6*lg(n/2) + 5        --> pois lg(piso(x)) <= lg(x) para todo x real.
       = 6*lg(n) - 6* lg(2) + 5
       = 6*lg(n) - 6 + 5
       < 6*lg(n), CQD.
```

--------------------------- DEMONSTRAÇÃO ---------------------------
==

6. EXERCÍCIO:

  a) A demonstração acima continuaria correta se eliminássemos o caso n=3 da base?

  b) Mostre que não existe nenhum caso faltando na base da indução da demonstração acima.