IME - USP

Aplicações de Regularidade e Herança de Uniformidade para Grafos e Hipergrafos na Teoria Combinatória dos Números

Exame de Qualificação de Doutorado

Rudini Menezes Sampaio

Orientador: Yoshiharu Kohayakawa

18 de julho de 2006

Roteiro

- **Grafos Aleatórios**
- **Teoria Extremal dos Grafos**
- **Teoria Combinatória dos Números**
- **Principais Ferramentas**
- **Problemas**

Grafos Aleatórios

Erdös, Rényi (1960): *On the Evolution of Random Graphs*

$G(n,p)$: Espaço de probabilidade n vértices + probabilidade p para arestas

Função limiar $r(n)$ de uma propriedade Q de grafos:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(G(n,p) \in Q) = \begin{cases} 0 & \text{se } p = p(n) \ll r(n) \\ 1 & \text{se } p = p(n) \gg r(n) \end{cases}$$

Bollobás, Thomason (1987): *Threshold functions* para todas propriedades crescentes de grafos, como conectividade ou emergência de triângulos

Friedgut (1999): Condição necessária e suficiente para limiar severo.

Grosso modo: Propriedade Global x Propriedade Local

Limiar severo $r(n)$ se, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(G(n,p) \in Q) = \begin{cases} 0 & \text{se } p = p(n) < (1-\varepsilon)r(n) \\ 1 & \text{se } p = p(n) > (1+\varepsilon)r(n). \end{cases}$$

Teoria Extremal dos Grafos

$$\text{ex}(n, H) = \max\{|E(G)| : G = (V, E), |V(G)| = n, G \not\supset H\}$$

Teorema 1 (Turán (1941)).

$$ex(n, K_p) = (1 - \frac{1}{p-1} + o(1))\binom{n}{2}$$

R^t é o grafo obtido de R substituindo cada vértice x de R por um conjunto V_x com t vértices, mantendo a relacão das arestas, ou seja, cada aresta por um $K_{t,t}$.

Teorema 2 (Erdős, Stone (1946)).

$$ex(n, K_p^t) = (1 - \frac{1}{p-1} + o(1))\binom{n}{2}$$

Teorema 3 (Erdős, Simonovits (1966)).

$$ex(n, H) = (1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + o(1))\binom{n}{2}$$

$$\text{ex}(G,H) = \text{max}\{|E(G')| : G' \subseteq G, G' \not\supset H\}$$

Conjectura 4 (Kohayakawa, Łuczak, Rödl (1997): Erdős-Stone-Simonovits probabilístico). *Seja H um grafo não vazio com pelo menos 3 vértices. Se $p = p(n) \gg n^{-1/d_2(H)}$, então, com probabilidade $1 - o(1)$,*

$$\text{ex}(G(n,p),H) = (1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + o(1))e(G(n,p)).$$

A 2-densidade $d_2(H)$ é definida como

$$d_2(H) = \max\left\{\frac{|E(J)|-1}{|V(J)|-2} : J \subset H, |V(J)| \geq 3\right\}.$$

Provada para alguns grafos H, como florestas, K_3 [Frankl, Rödl (1986)], C^{2l} e C^{2l+1} [Haxell, Kohayakawa, Łuczak (1995), (1996)], K_4 [Kohayakawa,Łuczak, Rödl (1997)] e K_5 [Gerke, Schickinger, Steger (2004)].

Dado $\eta > 0$ e os grafos G e H, escrevemos

$$G \rightarrow_\eta H$$

se, para todo grafo $G' \subseteq G$ com $|E(G')| \geq \eta|E(G)|$, temos que G' contém H como subgrafo.

Conjectura equivale a provar que, para todo $\eta > 1 - \frac{1}{\chi(H)-1}$,

$$G(n,p) \rightarrow_\eta H.$$

Teoria Combinatória dos Números

Fenômenos semelhantes. Dado um conjunto S de inteiros e uma propriedade $\mathcal{P}$, escrevemos

(1) $S \rightarrow_\eta \mathcal{P}$ ou (2) $S \rightarrow (\mathcal{P})_r$

- (1) se todo subconjunto $U \subset S$, com $|U| \geq \eta|S|$, satisfaz $\mathcal{P}$.
- (2) se toda r-coloração dos elementos de S gera um subconjunto monocromático satisfazendo $\mathcal{P}$

Notação

$[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

$[n]_N$ é um conjunto aleatório de $[n]$ com N elementos sorteado uniformemente.

$\mathbb{Z}_n$: Anel de inteiros módulo n.

$\mathbb{Z}_{n,p}$: Subconjunto aleatório de $\mathbb{Z}_n$, onde cada elemento tem probabilidade p independentemente.

Propriedades Clássicas em $\mathbb{N}$

Propriedade $\mathcal{P} = \mathrm{Schur}(n)$: Contém $x, y, z \in [n]$ tais que $x + y = z$.

Propriedade $\mathcal{P} =$ Dif$(\mathrm{Q}(n))$: Contém x, y tais que $x - y \in \mathrm{Q}(n)$, onde $\mathrm{Q}(n) = \{x^2 \neq 0 : x \in [n]\}$ é o conjunto dos quadrados dos elementos de $[n]$, exceto 0.

Propriedade $\mathcal{P} = \mathrm{PA}_k$: Contém uma progressão aritmética com k elementos.

Motivação para explorar subconjuntos aleatórios W de $\mathbb{Z}_n$ com propriedades $\mathcal{P}$ conhecidas, como Schur ($\mathcal{P} = \mathrm{Schur}(n)$), Sárközy ($\mathcal{P} = \text{Dif}(\mathrm{Q}(n))$) e van der Waerden ($\mathcal{P} = \mathrm{PA}_k$).

Teorema 5 (Schur (1916)). *Para todo inteiro r, existe n_0 tal que, se $n > n_0$, então*

$$[n] \to (\mathrm{Schur}(n))_r$$

Teorema 6 (Sárközy (1978)). *Para todo η, existe n_0 tal que, se $n > n_0$, então*

$$[n] \to_\eta \textit{Dif}(\mathrm{Q}(n))$$

Teorema 7 (van der Waerden (1927)). *Para todos inteiros k, r, existe n_0 tal que, se $n > n_0$, então*

$$[n] \to (\mathrm{PA}_k)_r$$

Teorema 8 (Szemerédi (1975)). *Para todo $\eta > 0$ e inteiro k, existe n_0 tal que, se $n > n_0$, então*

$$[n] \to_\eta \mathrm{PA}_k$$

Resultados correlatos

Teorema 9 (Graham, Rödl, Ruciński (1996)).

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}([n]_N \to (\mathrm{Schur}(n))_{r=2} = \begin{cases} 0 & \textit{se } N \ll n^{1/2} \\ 1 & \textit{se } N \gg n^{1/2} \end{cases}$$

Teorema 10 (Rödl, Ruciński (1995)). $\forall\, k \geq 3$, $r \geq 2$, *existem constantes* $C > c > 0$ *tais que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}([n]_N \to (\mathrm{PA}_k)_r = \begin{cases} 0 & \textit{se } N \leq cn^{1-1/(k-1)} \\ 1 & \textit{se } N \geq Cn^{1-1/(k-1)} \end{cases}$$

Teorema 11 (Kohayakawa, Łuczak e Rödl (1996)). $\forall\, \eta > 0$, *existem constantes* $C > c > 0$ *tais que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}([n]_N \to_\eta \mathrm{PA}_3) = \begin{cases} 0 & \textit{se } N \leq cn^{1/2} \\ 1 & \textit{se } N \geq Cn^{1/2} \end{cases}$$

Conjecturas sobre $\mathbb{Z}_n$

Problema 12 (Versão de densidade para Schur). *Para todo* $0 < \eta \leq 1/2$, *existem constantes* $C > c > 0$ *tais que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mathbb{Z}_{n,p} \to_{1/2+\eta} \mathrm{Schur}(n)) = \begin{cases} 0 & \text{se } p = p(n) \leq cn^{-1/2} \\ 1 & \text{se } p = p(n) \geq Cn^{-1/2} \end{cases}$$

Problema 13 (Versão de densidade para Sárközy). *Para todo* $0 < \eta \leq 1$, *existem constantes* $C > c > 0$ *tais que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mathbb{Z}_{n,p} \to_{\eta} \textit{Dif}(\mathrm{Q}(n))) = \begin{cases} 0 & \text{se } p = p(n) \leq cn^{-1} \\ 1 & \text{se } p = p(n) \geq Cn^{-1} \end{cases}$$

Problema 14 (Versão geral de densidade para van der Waerden). *Para todo* $\eta > 0$ *e inteiro* $k > 0$, *existem constantes* $C > c > 0$ *tais que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mathbb{Z}_{n,p} \to_{\eta} \mathrm{PA}_k) = \begin{cases} 0 & \text{se } p = p(n) \leq cn^{-1/(k-1)} \\ 1 & \text{se } p = p(n) \geq Cn^{-1/(k-1)} \end{cases}$$

Resultados

Schur [Kohayakawa, Leite (2005)]

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mathbb{Z}_{n,p} \to_{1/2+\eta} \mathrm{Schur}(n)) = 1, \text{ se } p = p(n) \geq Cn^{-1/2}\log n.$$

Usa Chung-Graham + Regularidade

Sárközy [Kohayakawa, Leite (2005)]

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mathbb{Z}_{n,p} \to_{\eta} \mathrm{Dif}(\mathrm{Q}(n))) = 1, \text{ se } p = p(n) \geq Cn^{-1}.$$

Usa Chung-Graham + Herança de Uniformidade

van der Waerden [Kohayakawa, Łuczak, Rödl (1996)]: para $k = 3$.

Usa Lema da Regularidade para grafos esparsos

Não parece admitir generalização direta para k qualquer

Principais ferramentas

- **Chung-Graham** (propriedades quase-aleatórias de grafos e de conjuntos)
- **Herança de Uniformidade** (padrão, esparso, hipergrafos)
- **Lema da Regularidade** (padrão, esparso, hipergrafos)

Quase-aleatoriedade:

Lista de Propriedades Quase-aleatórias **+** Equivalência

- Chung, Graham, Wilson (1989): Grafos
- Chung, Graham (1991): Hipergrafos (*deviation*)
- Kohayakawa, Rödl, Skokan (2002): Hipergrafos (*discrepancy*)

- Chung, Graham (1992): Subconjuntos S de $\mathbb{Z}_n$

Grafo de Chung-Graham de S, $\mathrm{CG}_n(S)$: vértices $\mathbb{Z}_n$ **+** aresta xy, se $x + y \in S$.

1. (WT) Para quase todo $x \in \mathbb{Z}_n$, $|S \cap (S + x)| = s^2/n + o(n)$.
2. (GRAPH) O grafo $\mathrm{CG}_n(S)$ é quase-aleatório.
3. (EXP) Para todo $j \neq 0$ em $\mathbb{Z}_n$, onde $i = \sqrt{-1}$

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}_n} S(x) \exp\{\frac{2\pi i j x}{n}\} = o(n)$$

Grafos de Chung-Graham

Transformada de Fourier: $f \colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$

- $\mathcal{T}(f) \colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C} \ : \ \mathcal{T}(f)(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}_n} f(y) e^{-2\pi i y x / n}$
- Convolução $(f * g)(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}_n} f(y) g(x-y) \ : \ \mathcal{T}(f * g) = \mathcal{T}(f)\mathcal{T}(g)$
- vetor $\mathbb{C}^n$ para uma função $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C} \ : \ (f(0), f(1), \ldots, f(n-1)) \in \mathbb{C}^n \ : \ \mathcal{T} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

Kohayakawa, Leite (2005)

- $R, U, W \subset \mathbb{Z}_n$ com $U \cap W = \emptyset$. Função $(0-1)$: $R(x) = 1$, se $x \in R$
- $e(\mathrm{CG}_n(R)[U,W]) = \sum_{r \in R} \sum_{u \in U} W(r-u) = \langle R, U * W \rangle$
- $\left| e(\mathrm{CG}_n(R)[U,W]) - \frac{1}{n}|R||U||W| \right| \leq \left(\max_{j \neq 0} |\mathcal{T}(R)(j)| \right) \sqrt{|U||W|}$
- $e(\mathrm{CG}_n(R)) = (1 + \frac{1}{n} \pm \frac{1}{n}) \frac{n}{2} |R| \iff d(\mathrm{CG}_n(R)) > |R|/n$
- $D \subset R$ com $|D| = \alpha |R| \ : \ e(\mathrm{CG}_n(D)) \geq \alpha (1 - \frac{2}{n}) e(\mathrm{CG}_n(R))$

Problemas de Densidade de Schur e Sárközy

Problema de Schur

- $D \subset \mathbb{Z}_{n,p}$ não possui tripla de Schur $\iff D \cap (D - D) = \emptyset$
- $x - z \in (D - D)$ elemento proibido ${}_1 \Longleftarrow_{n/2}$ Par proibido $\{x.z\}$ de $\mathrm{CG}_n(D)$

Haxell, Kohayakawa, Łuczak (1996)

Lema 15 (par proibido: adição de aresta gera um $\mathcal{C}^{2k+1}$). $\forall\, k, \alpha, \delta, A$, $\exists\, C_0$ *tal que todo grafo* G_n (p, A)*-uniforme com* $p = p(n) \geq C_0 A^2 n^{-1+1/2k}$ *é tal que, se* $H \subset G$ *com* $e(H) \geq \alpha e(G)$*, então o número de pares proibidos de* H *é maior que* $(1-\delta)(e(H)/e(G))\binom{n}{2}$*.*

Definição 16. G_n *é* (p, A)*-uniforme se,* $\forall\, U, W \subset V(G)$ *disjuntos com* $1 \leq |U| \leq |W| \leq pn|U|$*:*

$$\Big| e_G(U, W) - p|U||W| \Big| \leq A\sqrt{pn}\sqrt{|U||W|}$$

- $\mathrm{CG}_n(R)$ é (p, A)-uniforme, para $p = |R|/n$ e $A \geq \max_{j \neq 0} |\mathcal{T}(R)(j)|/\sqrt{pn}$
- $\max_{j \neq 0} |\mathcal{T}(\mathbb{Z}_{n,p})(j)| < \sqrt{24 \log n}\sqrt{pn}$ com probabilidade $1 - o(1) \implies A = \sqrt{24 \log n}$

Problema de Schur (cont.)

- Sorteio de $\mathbb{Z}_{n,p}$ e escolha de D com $|D| = (1/2+\eta)|\mathbb{Z}_{n,p}|$ sem tripla de Schur
- Sorteio de $\mathbb{Z}_{n,p}$ em 2 etapas $\mathbb{Z}^{(1)}_{n,p_1}$ e $\mathbb{Z}^{(2)}_{n,p_1}$: $(1-p_1)^2 = (1-p)$. Densidades γ_1 e γ_2 de D
- Sorteio de $\mathbb{Z}^{(1)}_{n,p_1}$ em k etapas $\mathbb{Z}^{(1,1)}_{n,p_2}, \ldots, \mathbb{Z}^{(1,k)}_{n,p_2}$: $(1-p_2)^k = (1-p_1)$
- $p = o(1) \iff p_2 \sim p_1/k \sim p/2k$
- Maior $D_j = D \cap \mathbb{Z}^{(1,j)}_{n,p_2}$ proíbe $(1-\delta)\gamma^* n$ elementos, onde $\gamma^* \geq \gamma_1$ é a densidade de $|D_j|$
- $\mathbb{Z}^{(2)}_{n,p_1}$ terá $\sim (\gamma^* n)p_1 \sim \gamma^* |\mathbb{Z}^{(2)}_{n,p_1}|$ proibidos : $\gamma_2|\mathbb{Z}^{(2)}_{n,p_1}| = |D \cap \mathbb{Z}^{(2)}_{n,p_1}| \leq (1-\gamma^*)|\mathbb{Z}^{(2)}_{n,p_1}|$
- Mas, $1/2+\eta \sim (\gamma_1+\gamma_2)/2 \leq (\gamma^*+1-\gamma^*)/2 = 1/2$. D tem tripla de Schur.

Questões

- $\mathrm{CG}_n(\mathbb{Z}_{n,p})$ é (p,A)-uniforme para A constante **?** $(\max_{j\neq 0} \mathcal{T}(\mathbb{Z}_{n,p})(j)) \leq A\sqrt{pn}$ **?**
- Melhorar $C_0 = 32(A/\delta\alpha\mu)^2$ do Lema 6 de Haxell, Kohayakawa, Łuczak (1996) **?**
- Herança de uniformidade super-exponencial para 3-grafos **?** **+** $\mathrm{CG}^3_n(\mathbb{Z}_{n,p})$ inf-uniforme **?**

Problema de Sárközy

- $n > 2$ primo grande, $\varepsilon > 0$ e $j \in \mathbb{Z}_n$, $j \neq 0$:

$$\mathcal{T}(\mathrm{Q}(n))(j) = \sum_{x \in \mathrm{Q}(n)} e^{-2\pi i j x/n} = O(\sqrt{n}) \leq \varepsilon^2 \frac{n-1}{2} = \varepsilon^2 |\,\mathrm{Q}(n)|.$$

- $\mathrm{CG}_n(\mathrm{Q}(n))$ e $\mathrm{CG}_n^-(\mathrm{Q}(n))$: (ε)-uniforme com densidade $|\,\mathrm{Q}(n)|/n \sim 1/2$.
- ε e β "pequeno" $\Longrightarrow$ (**Herança de uniformidade**) $\Longrightarrow$ $\tilde{C}$ e $\tilde{\varepsilon}$
- $\forall \gamma < 1$, $p = p(n) \geq Cn^{-1}$, C grande a ser escolhido:
- $\mathbb{P}(|\mathbb{Z}_{n,p}| = np(1 \pm 1/2)) \geq 1 - 2e^{-np/12} \geq 1 - \gamma/2$
- $Q \subset \mathbb{Z}_{n,p}$ com $|Q| = \eta|\mathbb{Z}_{n,p}| \quad \Longrightarrow \quad |Q| = q = \eta np(1 \pm 1/2) : q \geq \eta C/2$

$$q \geq \frac{\eta np}{2} \geq \frac{\eta C}{2} \geq \frac{\tilde{C}}{d(\mathrm{CG}_n^-(\mathrm{Q}(n)))}.$$

- Q satisfaz condição de herança: Número de conjuntos Q *ruins* é no máximo $\beta^q \binom{n}{q}$

Problema de Sárközy (cont.)

- Q é *ruim* se $e(\mathrm{CG}_n(\mathrm{Q}(n))[Q]) < (1-\tilde{\varepsilon})d(\mathrm{CG}_n(\mathrm{Q}(n)))\binom{q}{2}$
- Conjuntos *ruins* $Q \subset \mathbb{Z}_{n,p}$, onde $|Q| = q = \eta np(1 \pm 1/2)$ e $|\mathbb{Z}_{n,p}| = np(1 \pm 1/2)$

$$\leq \sum_{q=\eta np/2}^{3\eta np/2} \beta^q \binom{n}{q} p^q \leq \sum_{q=\eta np/2}^{3\eta np/2} \left(\beta \frac{en}{q} p\right)^q \leq \sum_{q=\eta np/2}^{3\eta np/2} \left(\frac{2e\beta}{\eta}\right)^q \leq \gamma/2.$$

- Nenhum $|Q| = \eta|\mathbb{Z}_{n,p}|$ é *ruim*, com probabilidade $\geq (1-\gamma/2)(1-\gamma/2) \geq 1-\gamma$

Questões

- Prova mais geral: sequência de conjuntos $(\mathrm{Q}(3), \mathrm{Q}(5), \mathrm{Q}(7), \mathrm{Q}(11), \ldots)$
- Resíduo quadrático em $\mathbb{Z}_{n,p}$ **?**

Herança de Uniformidade

Herança de Uniformidade

Erdős (1959): $\forall\, k, l$, existe G com $\chi(G) > k$ e $girth(G) > l$

Duke, Rödl (1985):

- Existe "testemunha pequena" para $\chi(G)$ grande em G "denso"
- Condição: remoção de εn^2 arestas mantém número cromático $> k$
- Herança **forte** (erro **super-exponencial**)

G é ε-uniforme com densidade d se $\forall\, V' \subseteq V(G)$, com $|V'| \geq \varepsilon |V(G)|$, então

$$|E(G[V'])| = (d \pm \varepsilon)\binom{|V'|}{2}$$

Herança de uniformidade: $\forall\, \beta, \varepsilon', \exists \varepsilon_0, w_0$, se G é ε-uniforme com densidade d, para $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, então o número de subconjuntos $W \subset V(G)$, $|W| = w > w_0$ tais que $G[W]$ é ε'-uniforme com densidade d é pelo menos

$$(1 - \beta^w)\binom{|V(G)|}{w}$$

Herança de Uniformidade: grafos esparsos

Gerke, Kohayakawa, Rödl, Steger (2006)

- Existe "testemunha pequena" para $\chi(G)$ grande em G esparso sem pedaços densos
- Condição: remoção de $\varepsilon p n^2$ arestas mantém número cromático $> k$
- Herança **forte** para grafos esparsos (erro **super-exponencial**)

G bipartido (V_1, V_2) é (ε)-uniforme com densidade d se $\forall\, V_1' \subseteq V_1$, $V_2' \subseteq V_2$, com $|V_1'| \geq \varepsilon|V_1|$, $|V_1'| \geq \varepsilon|V_1|$, então

$$|E(G[V_1', V_2'])| = (1 \pm \varepsilon) d |V_1'||V_2'|$$

Herança de inf-uniformidade esparsa: $\forall\, \beta, \varepsilon', \exists\, \varepsilon_0, C$ tais que, se $G = (V_1 \cup V_2, E)$ é um grafo bipartido (ε)-inf-uniforme com densidade d, para $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, então o número de subconjuntos $W \subset V_1$, $|W| = w > C/d$, formando um subgrafo (ε')-inf-uniforme de densidade d com V_2 é pelo menos

$$(1 - \beta^w) \binom{|V_1|}{w}.$$

Herança de Uniformidade: k-grafos

Mubayi, Rödl (2004)

- Homomorfismo k-grafo $\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{F}$: função $f : V(\mathcal{H}) \to V(\mathcal{F})$. Ex: t-partido $\Rightarrow K_t$.
- Existe “testemunha pequena” para k-grafo $\mathcal{H}$ sem homomorfismo para um k-grafo $\mathcal{F}$ dado
- Condição: remoção de εn^k hiperarestas mantém não homomorfismo para $\mathcal{F}$
- Herança **fraca** para k-grafos (erro **exponencial**)

$\mathcal{H}^{(k)}$ é (d, ε)-uniforme $\forall\, V' \subseteq V(\mathcal{H}^{(k)})$, com $|V'| \geq \varepsilon |V(\mathcal{H}^{(k)})|$, então

$$|E(\mathcal{H}^{(k)}[V'])| = (d \pm \varepsilon)\binom{|V'|}{k}$$

Herança de uniformidade para k-grafos: $\forall\, \tilde{\delta}$, $\exists\, r_0$, $\forall\, r > r_0$, $\exists\, \delta, n_0$ tais que se $\mathcal{H}^{(k)}$, com $n > n_0$ vértices, é (d, δ)-uniforme, então o número de subconjuntos com r vértices que induzem um sub-hipergrafo $(d, \tilde{\delta})$-uniforme é pelo menos

$$(1 - e^{-r^{1/l}/20})\binom{n}{r}$$

Herança super-exponencial para k-grafos?

Mubayi, Rödl (2004)

- Versão k-partida com pesos nas hiperarestas: UWT(k) x WT(k)
- Prova por indução: WT(2) $\Rightarrow$ UWT(3) $\Rightarrow$ WT(3)
- WT(k) $\Rightarrow$ UWT($k+1$) $\Rightarrow$ WT($k+1$)
- 3-grafo 3-partido $\mathcal{H}(A, B, C)$
- grafo $G(A \times B, C)$ + grafo $H(A, B)$ com pesos $w(a, b) = |\{c \in C : (a, b, c) \in \mathcal{H}\}|$

Nagle, Rödl, Schacht (2005)

- 3-grafo k-partido $\mathcal{H}(V_1, \ldots, V_k)$
- *Link graphs*: $\forall\, v_1 \in V_1$
- grafo $(k-1)$-partido $L_v(V_2, \ldots, V_k)$: (v_i, v_j) aresta se $(v_1, v_i, v_j) \in \mathcal{H}$
- Todos, exceto δn vértices v_1 de V_1 possuem *link graphs* regulares

Lema da Regularidade

Exemplos de Representação por Grafos e Hipergrafos

Justificativa para Lema da Regularidade sobre Grafos e Hipergrafos

Chung, Graham (1992): Grafos $\mathrm{CG}_n(S)$ e $\mathrm{CG}_n^-(S)$

Rödl (1990): k-grafo $\mathcal{F}$: vértices $[n]$ + arestas (PA $_k$).

Kohayakawa, Łuczak, Rödl (1996):

- 3-grafo $\mathcal{F}(S)$: elementos de S + arestas (PA $_3$)
- grafo 3-partido: Partes são cópias de $[n]$ + triângulos são PA $_3$

Pares ε-regulares

Grafo $G = (V, E)$ e $A, B \subseteq V$ disjuntos.

Densidade $d(A, B)$ do par (A, B):

$$d(A, B) = \frac{e(A, B)}{|A||B|}$$

onde $e(A, B)$ é o número de arestas de G “entre” A e B.

Par (A, B) ε**-regular:** Se para todos $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ tais que $|A'| \geq \varepsilon|A|$, $|B'| \geq \varepsilon|B|$, temos

$$d(A', B') = d(A, B) \pm \varepsilon$$

- ***Degrees***: quase todos vértices de A tem a vizinhança esperada
- ***Co-degrees***: quase todos os pares de vértices de A tem a vizinhança esperada
- **Grafo bipartido aleatório**: ε-regular com alta probabilidade

Lema da Regularidade de Szemerédi

Todo grafo pode ser particionado em um número constante de classes tais que a “maioria” dos pares induzem um grafo bipartido ε-regular.

Teorema 17 (Lema da Regularidade). $\forall \varepsilon, t_0$, $\exists T_0, n_0$, *Se* G *é um grafo com* $|V(G)| = n > n_0$, *então existe uma partição de* $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_t$ *tal que:*

- $t_0 \leq t \leq T_0$
- $|V_0| < \varepsilon n$
- $|V_1| = \ldots = |V_t|$
- *Com exceção de no máximo* εt^2*, todos pares* (V_i, V_j) *são* ε*-regulares.*

Todo grafo esparso (n vértices, mas $n^{2-\alpha}$ arestas) é “trivialmente” ε-regular.

Aplicações

- **_Slicing Lemma_** (herança simples: $\alpha n \to \varepsilon/\alpha$-regular)
- **_Key/Embedding Lemma_** (contém o "grafo reduzido" R)
- **_Counting Lemma_** (contém muitas cópias de R)

Lema da Contagem

Lema 18 (Lema da Contagem). *Se*

$$G = \bigcup_{1 \le i < j \le k} G^{ij}$$

é um grafo k-partido com $V(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_k$, com $|V_1| = \ldots = |V_k| = n$, onde todos G^{ij} são ε-regulares com densidade d, então o número de k-cliques K_k em G é:

$$d^{\binom{k}{2}} n^k (1 \pm f(\varepsilon))$$

onde $f(\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

Lema da Regularidade: grafos esparsos

Par (A, B) (ε, p)-regular: Se para todos $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ tais que $|A'| \geq \varepsilon|A|$, $|B'| \geq \varepsilon|B|$, temos $d(A', B') = d(A, B) \pm \varepsilon p$, onde p é geralmente a densidade do grafo $O(n^{-\alpha})$.

Teorema 19 (Kohayakawa (1997), Rödl (1997)). *Todo grafo $G = (V, E)$ sem “pedaços densos” pode ser particionado em um número constante de classes tais que a “maioria” dos pares induzem um grafo bipartido (ε, p)-regular, para $p = |E|/|V|^2$.*

Pedaços Densos

G é η-esparso com densidade p se, $\forall U, W \subset V(G)$ disjuntos com $|U|, |W| \geq \eta|V(G)|$, temos que $d(U, W) \leq (1 + \eta)p$.

- Importante para “seguir” *mutatis mutandi* a prova de Szemerédi
- Grafos aleatórios não contêm pedaços densos com alta probabilidade
- *Key/Embedding* e *Counting Lemmas* não funcionam com pares (ε, p)-regulares

Lema da Regularidade: hipergrafos k-uniformes

k-grafo $\mathcal{H} = (V, E)$ e $X_1, \ldots, X_k \subseteq V$ disjuntos.

Densidade $d(X_1, \ldots, X_k)$ da k-upla $(X_1, \ldots, X_k)$:

$$d(X_1, \ldots, X_k) = \frac{e(X_1, \ldots, X_k)}{|X_1| \ldots |X_k|}$$

onde $e(X_1, \ldots, X_k)$ é o número de hiperarestas de $\mathcal{H}$ com um vértice em cada X_i.

k-upla $(X_1, \ldots, X_k)$ **ε-regular:** Se para todos $X_i' \subseteq X_i$ tais que $|X_i'| \geq \varepsilon |X_i|$, temos

$$d(X_1', \ldots, X_k') = d(X_1, \ldots, X_k) \pm \varepsilon$$

Teorema 20 (Prömel, Steger (1992)). *Todo k-grafo pode ser particionado em um número constante de classes tais que a "maioria" das k-uplas induzem um k-grafo k-partido ε-regular.*

Lema da Regularidade: hipergrafos k-uniformes

- **Útil para Decomposição de k-grafos**
- **Usado na prova de herança de uniformidade para hipergrafos**
- **Mas, Lema da Contagem não funciona**

Construção de um 3-grafo 4-partido denso e regular, mas sem 4-clique

V_1, V_2, V_3, V_4 disjuntos de tamanho n.

2-coloração aleatória de todos os pares entre quaisquer V_i e V_j.

Construção de $\mathcal{H}$: $\{v_i, v_j, v_k\}$ é uma hiperaresta se e só se os pares $\{v_i, v_j\}$ e $\{v_i, v_k\}$ receberam cores diferentes, para $1 < i < j < k \leq 4$.

$\mathcal{H}[V_i, V_j, V_k]$ é denso e ε-regular, com alta probabilidade, mas $\mathcal{H}$ não possui clique de tamanho 4.

Lema da Regularidade: k-grafos + Lema da Contagem

Frankl, Rödl (2002): Regularidade para 3-grafos + Lema da Contagem

Particiona sobre os vértices e sobre os pares de vértices.

Grosso modo, $\mathcal{H}$ (d_3, δ_3, r)-regular sobre G (d_2, δ_2)-regular formam os “blocos pseudo-aleatórios”.

Número de l-cliques em $\mathcal{H}$, onde $f(\delta_3) \to 0$ quando $\delta_3 \to 0$:

$$|\mathcal{K}_l(\mathcal{H})| = (1 \pm f(\delta_3)) d_3^{\binom{l}{3}} d_2^{\binom{l}{2}} n^l.$$

Rödl, Skokan (2004): Regularidade para k-grafos + Lema da Contagem

Particiona sobre as j-uplas, para todo $1 \leq j < k$.

Particionamentos Necessários

Lema da Contagem não funciona sem particionamento nas $(k-1)$-uplas.

Lema da Regularidade: subgrafos

Propriedade $\mathcal{R}$ de Ramsey (2-coloração nas arestas + triângulo monocromático)

Teorema 21 (Rödl, Ruciński (1994)). *Existem $C > c > 0$ tais que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(G(n,p) \in \mathcal{R}) = \begin{cases} 0 & \text{se } p = p(n) \leq cn^{-1/2} \\ 1 & \text{se } p = p(n) \geq Cn^{-1/2} \end{cases}$$

Teorema 22 (Friedgut, Rödl, Ruciński, Tetali (2006)). $\mathcal{R}$ *tem limiar severo*

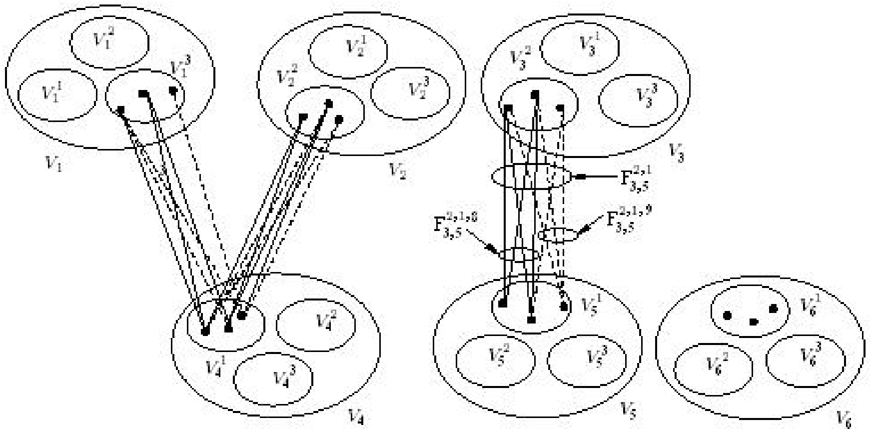
Friedgut (1999): Limiar grosseiro

- Propriedade Q com limiar grosseiro
- Existe ρ tal que $\beta < \mathbb{P}(G(n,p) \in Q) < 1 - \beta$, para $cn^{-1/\rho} < p = p(n) < Cn^{-1/\rho}$
- Existe $G \in \mathcal{G} \setminus Q$, onde $G(n,p) \in \mathcal{G}$ quase sempre
- $\mathbb{P}((G \cup M^*) \in Q) > 2\alpha$, para um grafo fixo M com densidade $\rho = 2$ colocado aleatoriamente
- $\mathbb{P}((G \cup G(n,\xi p)) \in Q) < \alpha$ (fenômeno local)

2-coloração própria arestas de G + $\triangle \notin Base_1(G) \cap G(n,\xi p)$ + *core* monocromático

Friedgut, Rödl, Ruciński, Tetali (2006): Limiar severo para propriedade $\mathcal{R}$ de Ramsey (2-coloração nas arestas + triângulo monocromático)

- Necessidade de contar cópias "especiais" de um grafo H pequeno em um grafo G grande
- Densidade de arestas + esparsidade + (ε, p)-regularidade
- Densidade de cópias "especiais" de H em G + esparsidade + $(\delta, \mathcal{S})$-regularidade
- Particionamento nos vértices e nas arestas
- Regularização de $G \subseteq H^t$, para t grande



Outros Problemas

Problema de van der Waerden

- Generalização de Kohayakawa, Łuczak, Rödl, 1996 para $k > 3$ **?**

Herança de Uniformidade

- Erro super-exponencial para Herança em hipergrafos **?**
- $\mathrm{CG}_n^3(\mathbb{Z}_{n,p})$ inf-uniforme **?**

Lema da Regularidade

- Contagem na Regularidade para Subgrafos **?**

FIM