

**Aplicações de Regularidade e Herança de Uniformidade  
para Grafos e Hipergrafos  
na Teoria Combinatória dos Números**

**Rudini Menezes Sampaio**

DOCUMENTO APRESENTADO  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
DEFESA DE TESE  
DE  
DOUTORADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Área de Concentração: **Ciência da Computação**  
Orientador: **Prof. Dr. Yoshiharu Kohayakawa**

Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu  
apoio financeiro da CAPES

São Paulo, julho de 2007

**Aplicações de Regularidade e Herança de Uniformidade  
para Grafos e Hipergrafos  
na Teoria Combinatória dos Números**

Este exemplar corresponde à redação final  
para tese de doutorado a ser  
defendida por Rudini M. Sampaio  
perante a comissão julgadora.

São Paulo, julho de 2007.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Yoshiharu Kohayakawa — IME-USP
- Prof. Dr. Arnaldo Mandel — IME-USP
- Prof. Dr. Jair Donadeli — DCC-UFPR

Para minha amada família:  
Karina, Samuel, Catarina e outros filhinhos  
que Deus porventura ainda queira nos conceder

## Agradecimentos

Agradeço ao professor Yoshiharu Kohayakawa, pela sua orientação e paciência.

Agradeço a Deus, “porque nos criastes para Vós e o nosso coração vive inquieto, enquanto não repousa em Vós”. (Sto. Agostinho)

”Dê-me, Senhor, agudeza para entender, capacidade para reter, método e  
faculdade para aprender, sutileza para interpretar, graça e abundância  
para falar. Dê-me, Senhor, acerto ao começar, direção ao progredir e  
perfeição ao concluir”.  
(Santo Tomás de Aquino)

## Resumo

Neste trabalho, estudamos funções limiares de densidade de alguns problemas probabilísticos da Teoria Combinatória dos Números.

Dois ferramentas muito poderosas são estudadas para atacar estes problemas: O Lema da Regularidade e Resultados de Herança de Uniformidade.

Inicialmente, apresentamos o Lema da Regularidade de Szemerédi juntamente com suas recentes versões para grafos esparsos de Kohayakawa e Rödl, para hipergrafos 3-uniformes de Frankl e Rödl e uma complexa regularização de Friedgut, Rödl, Ruciński e Tetali (2003) que decompõe sobre uma família qualquer de subgrafos pequenos.

A seguir, apresentamos os resultados de Herança de Uniformidade para grafos de Duke e Rödl, para grafos esparsos de Gerke, Kohayakawa, Rödl e Steger (2004) e para hipergrafos de Mubayi e Rödl (2004). Conjecturamos ainda uma melhoria no resultado de Mubayi e Rödl com um possível roteiro para se obter este resultado.

Na sequência, apresentamos três problemas que são versões probabilísticas de teoremas clássicos da Teoria Combinatória dos Números: os Teoremas de Schur, de Sárközy e de van der Waerden.

O primeiro afirma, grosso modo, que, para  $n$  grande, subconjuntos aleatórios  $\mathbb{Z}_{n,p}$  de  $[n]$  com probabilidade  $p(n) > Cn^{-1/2}$ ,  $C$  constante, são tais que todo subconjunto  $D \subset \mathbb{Z}_{n,p}$ , com  $|D| \geq (1/2 + \eta)|\mathbb{Z}_{n,p}|$ , possui elementos  $x, y, z \in D$  satisfazendo  $x + y = z$ ,  $\forall \eta \in (0, 1/2]$ . Kohayakawa e Leite (2005) provaram este resultado para  $p(n) > Cn^{-1/2} \log n$ .

O segundo afirma, grosso modo, que  $\mathbb{Z}_{n,p}$  com  $p = p(n) > Cn^{-1}$  são tais que todo subconjunto  $D \subset \mathbb{Z}_{n,p}$ , com  $|D| \geq \eta|\mathbb{Z}_{n,p}|$ , possui  $x, y \in D$  satisfazendo  $x - y$  é um quadrado diferente de zero em  $\mathbb{Z}_n$ ,  $\forall \eta \in (0, 1]$ . Kohayakawa e Leite (2005) provaram este resultado. Estamos interessados em investigar a restrição  $x - y \in \mathbb{Z}_{n,p}$ .

O terceiro afirma, grosso modo, que  $\mathbb{Z}_{n,p}$  com  $p = p(n) > Cn^{-1/(k-1)}$  são tais que todo subconjunto  $D \subset \mathbb{Z}_{n,p}$ , com  $|D| \geq \eta|\mathbb{Z}_{n,p}|$ , possui uma PA com  $k$  elementos,  $\forall \eta \in (0, 1]$ . Kohayakawa, Łuczak e Rödl (1996) provaram um resultado semelhante para  $k = 3$ . Infelizmente esta prova não parece admitir uma generalização simples para  $k > 3$ .

# Abstract

In this work, we study limiar functions of density to certain probabilistic problems of Combinatorial Number Theory.

Two powerfull tools to attack these problems are studied: The Regularity Lemma and Results of Inheritance of Uniformity.

We present the celebrated Szemerédi's Regularity Lemma and its variants for sparse graphs of Kohayakawa and Rödl, for 3-uniform hypergraphs of Frankl and Rödl and a complex regularization of Friedgut, Rödl, Ruciński and Tetali (2003) that decomposes over a fixed family of small subgraphs.

Next, we present the results of Inheritance of Uniformity for graphs of Duke and Rödl, for sparse graphs of Gerke, Kohayakawa, Rödl and Steger (2004), and for uniform hypergraphs of Mubayi and Rödl (2004). We conjecture an improvement of Mubayi and Rödl, giving a possible way to find this result.

Finally, we present probabilistic versions of three classic theorems of Combinatorial Number Theory: Schur, Sarközy and van der Waerden Theorems.

The first states, roughly, that random subsets  $\mathbb{Z}_{n,p}$  of  $[n]$  with probability  $p(n) > Cn^{-1/2}$ ,  $C$  constant, are such that all subset  $D \subset \mathbb{Z}_{n,p}$ , with  $|D| \geq (1/2 + \eta)|\mathbb{Z}_{n,p}|$ , contains elements  $x, y, z \in D$  satisfying  $x + y = z$ ,  $\forall \eta \in (0, 1/2]$ . Kohayakawa and Leite (2005) proved this result to  $p(n) > Cn^{-1/2} \log n$ .

The second states, roughly, that  $\mathbb{Z}_{n,p}$  with  $p = p(n) > Cn^{-1}$  is such that all subset  $D \subset \mathbb{Z}_{n,p}$ , with  $|D| \geq \eta|\mathbb{Z}_{n,p}|$ , contains  $x, y \in D$  satisfying  $x - y$  is a square in  $\mathbb{Z}_n$  different from zero,  $\forall \eta \in (0, 1]$ . Kohayakawa and Leite (2005) proved this result. We are interested to investigate the condition  $x - y \in \mathbb{Z}_{n,p}$ .

The third states, roughly, that  $\mathbb{Z}_{n,p}$  with  $p = p(n) > Cn^{-1/(k-1)}$  is such that all subset  $D \subset \mathbb{Z}_{n,p}$ , with  $|D| \geq \eta|\mathbb{Z}_{n,p}|$ , contains a PA with  $k$  elements,  $\forall \eta \in (0, 1]$ . Kohayakawa, Łuczak and Rödl (1996) proved a similar result for  $k = 3$ . Unfortunately, it seems it is not possible a simple generalization of this proof for  $k > 3$ .

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
1.1	Grafos Aleatórios e Funções Limiares . . . . .	3
1.2	Versões probabilísticas na Teoria Combinatória dos Números	4
1.3	Lema da Regularidade de Szemerédi . . . . .	7
1.4	Herança de Uniformidade . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Lema da Regularidade</b>	<b>10</b>
2.1	Introdução . . . . .	10
2.2	Versão Esparsa . . . . .	12
2.3	Versão simples para hipergrafos . . . . .	14
2.4	Versão para 3-grafos . . . . .	16
2.5	Versão para $k$ -grafos . . . . .	20
2.5.1	Particionamentos Necessários . . . . .	23
2.6	Versão para Subgrafos quaisquer . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Herança de Uniformidade</b>	<b>30</b>
3.1	Introdução . . . . .	30
3.2	Grafos Esparsos . . . . .	32
3.3	Versão Interna para Grafos Esparsos . . . . .	35
3.3.1	$(\epsilon)$ -uniformidade <sup>2</sup> de Duke-Rödl para grafos esparsos .	37
3.4	Hipergrafos uniformes . . . . .	39
3.4.1	Prova da Herança para Hipergrafos de Mubayi e Rödl	41
3.4.2	Melhoria de Czygrinow e Nagle para 3-grafos . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Versões Probabilísticas na Teoria Combinatória dos Números</b>	<b>55</b>
4.1	Introdução . . . . .	55
4.2	Teoria Combinatória dos Números . . . . .	57
4.3	Quase-Aleatoriedade . . . . .	58
4.4	Grafos de Chung-Graham . . . . .	60



4.5	Propriedade de Schur . . . . .	62
4.5.1	Versão fraca . . . . .	62
4.5.2	Versão forte . . . . .	65
4.6	Propriedade de Sárközy . . . . .	66
4.6.1	Versão fraca . . . . .	67
4.6.2	Versão forte . . . . .	70
4.7	Propriedade de van der Waerden . . . . .	70
<b>A</b>	<b>Aplicações dos Lemas da Regularidade</b>	<b>72</b>
A.1	Introdução . . . . .	72
A.2	Versão Original . . . . .	74
A.3	Versão Esparsa . . . . .	76
A.4	Versão para 3-grafos . . . . .	76
A.5	Versão para Subgrafos . . . . .	77
A.5.1	Obtenção da Família <i>CORE</i> . . . . .	79
<b>B</b>	<b>Aplicações de Herança de Uniformidade</b>	<b>82</b>
B.1	Versão Original . . . . .	82
B.2	Versão Esparsa . . . . .	82
B.3	Versão para Hipergrafos . . . . .	82
	<b>Bibliografia</b>	<b>88</b>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Grafos Aleatórios e Funções Limiares

A teoria dos grafos aleatórios foi fundada praticamente por Erdős e Rényi em 1960, com o monumental artigo “On the Evolution of Random Graphs” [19], após Erdős descobrir a grande utilidade de métodos probabilísticos para tratar problemas extremais em teoria dos grafos [16], [17], [18].

Basicamente, o método probabilístico é utilizado em Matemática Discreta para provar de maneira não-constructiva a existência de uma estrutura com determinadas propriedades. Para isso, define-se um espaço de probabilidades apropriado para as estruturas e mostra-se que a propriedade desejada ocorre com probabilidade positiva nesse espaço.

Considera-se frequentemente que o método probabilístico foi usado pela primeira vez por Szele, em 1943, para provar que existe um torneio com  $n$  jogadores e pelo menos  $n!2^{1-n}$  caminhos hamiltonianos. No entanto, Paul Erdős foi certamente o primeiro a compreender a capacidade do método e a aplicá-lo sucessivamente sobre vários problemas, iniciando em 1947 com um limite inferior para o número diagonal de Ramsey:  $R(k, k) > \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ .

Seja  $n$  um inteiro positivo e  $0 \leq p \leq 1$ . O grafo aleatório  $G(n, p)$  é um espaço de probabilidades sobre o conjunto dos grafos com  $n$  vértices, onde  $\mathbb{P}(uv \in G) = p$ , para todo par de vértices  $u \neq v$ , independentemente.

O principal resultado de Erdős e Rényi, 1960, foi a descoberta de que muitas propriedades  $Q$  de grafos surgem repentinamente, ou seja, fixando a probabilidade  $p(n)$ , em função do número de vértices  $n$ , quase todos os grafos  $G(n, p)$  possuem a propriedade  $Q$  ou quase todos não possuem a propriedade  $Q$ . A transição da propriedade ser muito improvável para ser muito provável é geralmente muito rápida.

Dizemos que  $r(n)$  é função limiar de uma propriedade  $Q$  de grafos se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(G(n, p) \in Q) = \begin{cases} 0 & \text{se } p = p(n) \ll r(n) \\ 1 & \text{se } p = p(n) \gg r(n). \end{cases}$$

Para muitas propriedades, existem constantes  $c$  e  $C$ ,  $c < C$ , tais que a probabilidade é 0, se  $p(n) < cr(n)$ , e é igual a 1, se  $p(n) > Cr(n)$ .

Em 1987, Bollobás e Thomason [6] provaram a existência de funções limiares para todas as propriedades crescentes de grafos, como conectividade ou emergência de triângulos. No entanto, algumas propriedades crescentes não possuem limites “mais precisos”.

Dizemos então que uma propriedade possui um limiar severo  $r(n)$  se,  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(G(n, p) \in Q) = \begin{cases} 0 & \text{se } p = p(n) < (1 - \varepsilon)r(n) \\ 1 & \text{se } p = p(n) > (1 + \varepsilon)r(n). \end{cases}$$

Caso contrário, dizemos que a propriedade possui um limiar grosseiro.

Em 1999, Friedgut [26] obteve uma condição necessária e suficiente para a obtenção de limiares severos, que será apresentada posteriormente. Grosso modo, propriedades globais como conectividade possuem limiares severos e propriedades locais como emergência de triângulos possuem limiares grosseiros.

## 1.2 Versões probabilísticas na Teoria Combinatória dos Números

Fenômenos semelhantes às funções limiares são observados também fora do escopo da teoria dos grafos aleatórios, como em versões probabilísticas de teoremas da Teoria Combinatória dos Números.

Seja  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ . Seja  $S$  um conjunto de inteiros e  $\mathcal{P}$  uma propriedade.

**Definição 1 (partição mantém a propriedade).** *Escrevemos*

$$S \rightarrow (\mathcal{P})_r$$

*se toda coloração dos elementos de  $S$  com  $r$  cores gera um subconjunto monocromático que satisfaz a propriedade  $\mathcal{P}$ .*

**Definição 2 (densidade mantém a propriedade).** *Escrevemos*

$$S \rightarrow_{\eta} \mathcal{P}$$

se todo subconjunto  $U \subset S$ , com  $|U| \geq \eta|S|$ , satisfaz a propriedade  $\mathcal{P}$ .

Como exemplo de propriedades clássicas, temos:

- Propriedade de Schur ( $\mathcal{P} = \text{Schur}(n)$ ): Contém  $x, y, z \in [n]$  tais que  $x + y = z$ .
- Propriedade de Sárközy ( $\mathcal{P} = \text{Dif}(\mathbb{Q}(n))$ ): Contém  $x, y$  tais que  $x - y \in \mathbb{Q}(n)$ , onde  $\mathbb{Q}(n) = \{x^2 \neq 0 : x \in [n]\}$  é o conjunto dos quadrados dos elementos de  $[n]$ , exceto 0.
- Propriedade de van der Waerden ( $\mathcal{P} = \text{PA}_k$ ): Contém uma progressão aritmética com  $k$  elementos.

Os títulos dados a essas propriedades são devido aos seguintes teoremas:

**Teorema 3 (Schur [62], 1916).**  $\forall r > 0, \exists n_0$ , tal que, se  $n > n_0$ ,

$$[n] \rightarrow (\text{Schur}(n))_r$$

**Teorema 4 (van der Waerden [67], 1927).**  $\forall k, r > 0, \exists n_0$ , tal que, se  $n > n_0$ ,

$$[n] \rightarrow (\text{PA}_k)_r$$

**Teorema 5 (Sárközy [61], 1978).**  $\forall \eta > 0, \exists n_0$ , tal que, se  $n > n_0$ ,

$$[n] \rightarrow_{\eta} \text{Dif}(\mathbb{Q}(n))$$

Podemos provar facilmente uma versão de densidade para a propriedade de Schur. Basta tomar  $D \subseteq [n]$ ,  $|D| \geq (1/2 + \eta)n$ . Seja  $(D - D) = \{d_1 - d_2 : d_1, d_2 \in D, d_1 > d_2\}$ . Como  $(D - D) \subseteq [n]$  e

$$|(D - D)| \geq |D| - 1 \geq (1/2 + \eta)n - 1 \geq n/2,$$

para  $n \geq 1/\eta$ , tem-se que  $D \cap (D - D) \neq \emptyset$ . Logo existem  $x, y, z \in D$  tais que  $x = z - y$ , ou seja uma tripla de Schur.

Em 1975, Szemerédi provou a versão de densidade para a propriedade de van der Waerden, a saber:

**Teorema 6 (Szemerédi, 1975).**  $\forall \eta > 0, k > 0, \exists n_0$ , tal que, se  $n > n_0$ ,

$$[n] \rightarrow_{\eta} \text{PA}_k$$

Para provar este célebre teorema, Szemerédi obteve o famoso lema da regularidade, que será tratado posteriormente.

Recentemente, alguns resultados mais fortes foram obtidos, envolvendo subconjuntos aleatórios de  $[n]$ . Seja  $[n]_N$  um conjunto aleatório de  $[n]$  com  $N$  elementos sorteados uniformemente.

**Teorema 7 (Graham, Rödl, Ruciński [32], 1996).**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}([n]_N \rightarrow (\text{Schur}(n))_{r=2}) = \begin{cases} 0 & \text{se } N \ll n^{1/2} \\ 1 & \text{se } N \gg n^{1/2} \end{cases}$$

**Teorema 8 (Rödl, Ruciński [57], 1995).**  $\forall k \geq 3, r \geq 2$ , existem constantes  $C > c > 0$  tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}([n]_N \rightarrow (\text{PA}_k)_r) = \begin{cases} 0 & \text{se } N \leq cn^{1-1/(k-1)} \\ 1 & \text{se } N \geq Cn^{1-1/(k-1)} \end{cases}$$

**Teorema 9 (Kohayakawa, Łuczak e Rödl [44], 1996).**  $\forall \eta > 0$ , existem constantes  $C > c > 0$  tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}([n]_N \rightarrow_{\eta} \text{PA}_3) = \begin{cases} 0 & \text{se } N \leq cn^{1/2} \\ 1 & \text{se } N \geq Cn^{1/2} \end{cases}$$

Tais resultados são uma forte motivação para investigar outras versões probabilísticas de teoremas clássicos da teoria combinatória dos números.

Para isso, definimos  $\mathbb{Z}_{n,p}$  como um subconjunto aleatório de  $\mathbb{Z}_n$ , o anel de inteiros módulo  $n$ , onde cada elemento de  $\mathbb{Z}_n$  tem probabilidade  $p$  de pertencer a  $\mathbb{Z}_{n,p}$ , de modo independente.

Associado a propriedade de Schur, o primeiro problema estudado conjectura que, para todo  $0 < \eta \leq 1/2$ , existe uma constante  $C > 0$  tal que, se  $p = p(n) \geq Cn^{-1/2}$ , então, para todo subconjunto  $D \subset \mathbb{Z}_{n,p}$  com  $|D| \geq (1/2 + \eta)|\mathbb{Z}_{n,p}|$ , existem  $x, y, z \in D$  satisfazendo  $x + y = z$ .

Kohayakawa e Leite (2005) provaram uma versão fraca deste problema para  $p(n) > Cn^{-1/2} \log n$ .

Associado a propriedade de Sarközy, o segundo problema estudado conjectura que, para todo  $0 < \eta \leq 1$ , existe uma constante  $C > 0$  tal que, se  $p = p(n) > Cn^{-1}$ , então para todo subconjunto  $D \subset \mathbb{Z}_{n,p}$  com  $|D| \geq \eta|\mathbb{Z}_{n,p}|$ , existem  $x, y \in D$  tais que  $x - y$  é um resíduo quadrático diferente de zero pertencente a  $\mathbb{Z}_n$ .

Kohayakawa e Leite (2005) provaram este resultado. Estamos interessados em investigar a restrição  $x - y \in \mathbb{Z}_{n,p}$ .

Associado a propriedade de van der Waerden, o terceiro problema estudado conjectura que, para todo  $0 < \eta \leq 1$ , existe uma constante  $C > 0$  tal que, se  $p = p(n) > Cn^{-1/(k-1)}$ , então todo subconjunto  $D \subset \mathbb{Z}_{n,p}$ , com  $|D| \geq \eta|\mathbb{Z}_{n,p}|$ , possui uma PA com  $k$  elementos.

O resultado citado de Kohayakawa, Łuczak e Rödl [44] resolve esta questão para  $k = 3$ . Infelizmente esta prova não parece admitir uma generalização simples para  $k > 3$ .

Dois poderosas ferramentas utilizadas nas provas de Kohayakawa e Leite são o Lema da Regularidade e a Herança de Uniformidade.

### 1.3 Lema da Regularidade de Szemerédi

Em 1936, Erdős e Turán conjecturaram uma versão de densidade do Teorema 4 de van der Waerden. Esta conjectura foi provada apenas em 1975, por Szemerédi [63], e está descrito no Teorema 6.

Um lema auxiliar da prova deste teorema, conhecido atualmente como o famoso lema da regularidade de Szemerédi, veio a se tornar uma das ferramentas mais usadas para atacar problemas em combinatória extremal.

A grosso modo, o lema da regularidade estabelece que todo grafo pode ser decomposto em um número limitado de grafos bipartidos quase-aleatórios, com relação a distribuição das arestas. Esta distribuição possui um fator de erro quadrático no número de vértices do grafo, mas com uma constante multiplicativa arbitrariamente pequena. Com isso, é possível lidar com a distribuição das arestas do grafo original, desde que ele possua um número quadrático de arestas.

Associado ao lema da regularidade, existe um fato conhecido como “lema da contagem”, muito usado em aplicações, que permite prever o número de certos subgrafos pequenos no grafo regularizado. As definições explícitas serão mostrada posteriormente, visto que necessita de várias definições preliminares.

Em 1993, Kohayakawa e Rödl [42], [46] provaram independentemente uma versão esparsa do lema da regularidade, ou seja, para os casos em que o número de arestas é subquadrático no número de vértices. Esta variante é utilizada neste documento e será detalhada posteriormente. Recentemente foram provadas variantes do lema da regularidade para hipergrafos.

Em 2002, Frankl and Rödl [25] provaram uma versão para 3-grafos (hipergrafos 3-uniformes), onde a decomposição é feita sobre grafos tripartidos quase-aleatórios. O particionamento é feito sobre o conjunto de vértices e sobre o conjunto de pares de vértices do 3-grafo.

Em 2004, Rödl e Skokan [59] generalizaram o lema da regularidade para  $k$ -grafos, obtendo ainda o lema da contagem associado. O particionamento é feito sobre todas as  $j$ -uplas do  $k$ -grafo,  $\forall j < k$ . Provamos um resultado simples sobre a necessidade de se fazer tal particionamento para se ter um lema da contagem geral.

Em 2006, Friedgut, Rödl, Ruciński e Tetali [27] provaram uma versão bem mais complicada do lema da regularidade, e com várias restrições, aplicada sobre cópias de um subgrafo fixo em um grafo. A grosso modo, a regularização nos lemas anteriores é feita respectivamente sobre as arestas ( $H = K_2$ ), sobre os triângulos ( $H = K_3$ ) e sobre as  $k$ -cliques ( $H = K_k$ ). Nesta versão, a decomposição é feita sobre uma família fixa  $S$  (especial) de subgrafos pequenos isomorfos a um grafo  $H$  dado. Esta versão pode ser interpretada como uma versão esparsa e limitada do lema da regularidade para hipergrafos uniformes, considerando cada membro de  $S$  como uma hiperaresta.

A seção A.5 apresenta um exemplo desta versão, com o esboço da prova do resultado que a motivou, a saber: existe um limiar severo para a propriedade *Ramsey*  $\mathcal{R}$  de grafos, tais que toda 2-coloração nas arestas gera um triângulo monocromático. Essas variantes parecem promissoras para resolução dos problemas descritos e serão detalhadas posteriormente.

## 1.4 Herança de Uniformidade

Em 1959, Erdős provou o teorema abaixo, com uma simples aplicação do método probabilístico. Para um grafo  $G$ , sejam  $\chi(G)$  e  $girth(G)$ , respectivamente, o número cromático de  $G$  e o tamanho do menor ciclo.

**Teorema 10 (Erdős, 1959).** *Para todos  $k, l$  positivos, existe um grafo  $G$  com  $girth(G) > l$  e  $\chi(G) > k$ .*

Este resultado é surpreendente pois vai contra o senso comum de que  $\chi(G)$  e  $girth(G)$  deveriam ser “inversamente proporcionais”.

O teorema mostra que existem muitos grafos  $G$  com  $\chi(G) > k$ , mas que se “comportam” localmente como uma árvore. Por isso, naturalmente conjecturou-se que não existe uma “testemunha pequena” de que  $\chi(G) > k$ , ou seja, um subgrafo  $H \subset G$  com  $|V(H)|$  pequeno e  $\chi(H) > k$ . Em 1985, Duke e Rödl provaram o contrário para grafos  $G$  não esparsos, ou seja, que existe uma “testemunha pequena” para  $\chi(G) > k$  em  $G$  não esparso.

Um poderoso lema auxiliar desta prova introduzia um conceito de hereditariedade sofisticada. Dizemos que um grafo  $G$  é  $\varepsilon$ -uniforme com densidade  $d$  se  $\forall V' \subseteq V(G)$ , com  $|V'| \geq \varepsilon|V(G)|$ , então  $|E(G[V'])| / \binom{|V'|}{2} = d \pm \varepsilon$ .

A grosso modo, o lema afirma que se um grafo  $G$  é  $\varepsilon$ -uniforme com densidade  $d$ , então  $G[V']$  é  $\varepsilon'$ -uniforme com densidade  $d$  para  $V' \subset V(G)$ ,  $|V'| > w$ , com probabilidade “super-exponencial” (casos ruins tão poucos quanto se queira), segundo a quantificação  $\forall d, \varepsilon' \exists \varepsilon, w$ .

Recentemente, em 2004, Gerke, Kohayakawa, Rödl e Steger provaram o resultado de Duke e Rödl (a existência de uma “testemunha pequena” para  $\chi(G) > k$ ) para uma classe grande de grafos esparsos  $G$ . Para isso, redefiniram o conceito de  $\varepsilon$ -uniformidade, a fim de se adequar a aplicação da versão esparsa do lema da regularidade, e provaram um resultado semelhante de hereditariedade para grafos bipartidos com este novo conceito.

Em 2005, Kohayakawa e Leite provaram uma versão interna desta herança de uniformidade, ou seja, abrangendo não apenas grafos bipartidos, e aplicaram-na para resolver uma versão restrita do problema probabilístico de Sárközy já mencionado.

Todos esses conceitos serão detalhados posteriormente.

Por outro lado, em 2003, Mubayi e Rödl deram uma extensa prova de herança de uniformidade para  $l$ -grafos (hipergrafos  $l$ -uniformes), segundo um conceito ligeiramente diferente de  $(d, \delta)$ -uniformidade para hipergrafos. No entanto, a proporção de casos ruins, apesar de ser exponencialmente pequena, não é “super-exponencialmente” pequena como para grafos.

A prova de Mubayi e Rödl é feita por indução, mas utiliza o conceito de peso nas hiperarestas. Apesar disso, temos motivação suficiente para tentar provar que a proporção de casos ruins pode ser “super-exponencialmente” diminuída. Conjectura-se assim, na seção 3.4.1, um resultado para 3-grafos e apresentamos um roteiro para a indução ao caso geral de  $l$ -grafos. Uma prova disto seria um grande passo para se provar o problema probabilístico de densidade associado a propriedade de Schur, descrita no Problema 66 da seção 4.5.

Como exemplo desta versão de herança de uniformidade, a seção B.3 apresenta a prova do resultado que a motivou, a saber: existem infinitos  $l$ -grafos  $\mathcal{G}$  tais que  $\rho(\mathcal{G}) > \tilde{\rho}(\mathcal{G}) > 0$ , onde  $\rho(\mathcal{G})$  e  $\tilde{\rho}(\mathcal{G})$  são conceitos diferentes da densidade de Ramsey-Turán, associado a  $ex(n, \mathcal{G})$  - o número máximo de arestas de um  $l$ -grafo com  $n$  vértices sem nenhuma cópia de  $\mathcal{G}$  - e que serão detalhados posteriormente.



## Capítulo 2

# Lema da Regularidade

### 2.1 Introdução

Usaremos nesse documento a notação  $X = Y \pm \varepsilon$  para denotar  $|X - Y| \leq \varepsilon$ . Seja  $G = (V, E)$  um grafo e  $A, B \subseteq V$  subconjuntos disjuntos de  $V$ . Definimos a densidade  $d_G(A, B)$  do par  $(A, B)$ , ou simplesmente  $d(A, B)$  quando  $G$  estiver subentendido, por:

$$d_G(A, B) = \frac{e_G(A, B)}{|A||B|}$$

onde  $e_G(A, B)$  é o número de arestas com uma extremidade em  $A$  e a outra em  $B$ .

Dizemos que o par  $(A, B)$  é  $\varepsilon$ -regular em  $G$  se para todos  $A' \subseteq A$ ,  $B' \subseteq B$  tais que  $|A'| \geq \varepsilon|A|$ ,  $|B'| \geq \varepsilon|B|$ , temos que

$$d_G(A', B') = d_G(A, B) \pm \varepsilon$$

Na verdade, a regularidade pode ser verificada apenas para subconjuntos  $A''$  e  $B''$  de tamanho igual a  $a = \lceil \varepsilon|A| \rceil$  e  $b = \lceil \varepsilon|B| \rceil$ , já que

$$d_G(A', B') = \frac{1}{\binom{|A'|}{a} \binom{|B'|}{b}} \sum_{\substack{A'' \subseteq A', |A''|=a \\ B'' \subseteq B', |B''|=b}} d(A'', B'').$$

O lema da regularidade de Szemerédi é uma poderosa ferramenta na teoria dos grafos extremais. Uma das suas consequências mais importantes é que, em circunstâncias apropriadas, ele pode ser usado para mostrar que um dado grafo possui um subgrafo fixo. Essa observação segue direta e facilmente do resultado abaixo, conhecido por *Lema da Contagem* para grafos.

**Lema 11 (Lema da Contagem).** Se  $G = \cup_{1 \leq i < j \leq k} G^{ij}$  é um grafo  $k$ -partido com  $V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_k$ , com  $|V_1| = \dots = |V_k| = n$ , onde todos  $G^{ij}$  são  $\varepsilon$ -regulares com densidade  $d$ , então o número de  $k$ -cliques  $K_k$  em  $G$  é:

$$d^{\binom{k}{2}} n^k (1 \pm f(\varepsilon))$$

onde  $f(\varepsilon) \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ademais, se  $\varepsilon < d$ , então  $|f(\varepsilon)| < 1$ , para  $n$  suficientemente grande.

O Lema da Regularidade de Szemerédi, 1978, é o seguinte resultado:

**Teorema 12 (Lema da Regularidade).**  $\forall \varepsilon, t_0, \exists T_0, n_0$ , Se  $G$  é um grafo com  $|V(G)| = n > n_0$ , então existe uma partição de  $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_t$  tal que:

- $t_0 \leq t \leq T_0$
- $|V_0| < \varepsilon n$
- $|V_1| = \dots = |V_t|$
- Com exceção de no máximo  $\varepsilon t^2$ , todos os pares  $(V_i, V_j)$  são  $\varepsilon$ -regulares.

Uma consequência direta desse resultado é uma variante nas arestas, substituindo a última sentença acima por:

- Com exceção de no máximo  $\varepsilon n^2$ , todas as arestas pertencem a pares  $(V_i, V_j)$   $\varepsilon$ -regulares.

O conjunto  $V_0$  será chamado *excepcional* e sua existência é puramente técnica: para tornar possível que todos os outros conjuntos tenham exatamente a mesma cardinalidade. Se essa condição  $|V_i| = |V_j|$  for “relaxada” para  $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ , podemos considerar  $V_0 = \emptyset$ .

A variável  $t_0$  exerce uma função importante limitando o número mínimo de partes. Ela faz com que as classes  $V_i$  possam ser suficientemente pequenas de modo que o número de arestas dentro dessas classes seja proporcionalmente desprezível. De fato, como  $t > t_0$ , escolhendo um  $t_0$  suficientemente grande, o número de arestas internas é no máximo  $t \binom{n/t}{2} \sim \binom{n}{2} / t \leq \binom{n}{2} / t_0$ .

Além disso, a variável  $T_0$  garante que o número de partes seja limitado ( $t \leq T_0$ ), pois, caso contrário, a partição poderia ser feita em  $n$  classes de tamanho 1, que seriam regulares trivialmente. O fato de  $T_0$  não depender de  $n$  é crucial para o lema, ou seja, é possível ter  $n \gg T_0$  (é quase sempre o caso das aplicações).

Observe ainda que, como o erro no número de pares de conjuntos  $\varepsilon$ -regulares (ou no número de arestas na outra variante) é de ordem quadrática,

um grafo que tenha número de arestas sub-quadrático, ou seja,  $o(n^2)$ , satisfaz o lema trivialmente, pois todas as suas arestas poderiam ser colocadas nos casos ruins, obtendo grafos vazios. Assim, o lema da regularidade é útil apenas para grafos densos.

Em [64], Szemerédi se questiona se os pares irregulares, previstos pelo lema, existiam de fato. Um exemplo simples dessa existência, mostrado em [1], é o grafo bipartido com classes  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  e  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ , onde  $a_i b_j$  é uma aresta se e só se  $i \leq j$ .

Na prova do lema da regularidade, uma função chamada *index* é definida para cada partição de  $V(G)$  a fim de “medir” quanto regular são os pares dessa partição. Seja  $P$  uma partição de  $V(G)$  em  $V_0, \dots, V_t$  e seja

$$\text{index}(P) = \frac{1}{t^2} \sum_{i=1}^t \sum_{j=i+1}^t d^2(V_i, V_j)$$

Observe que  $\text{index}(P) \leq 1/2$ . A idéia principal é que se a partição  $P$  viola as condições do lema da regularidade, ela pode ser *refinada* para uma partição  $Q$  com  $\text{index}(Q)$  significativamente maior, segundo o lema abaixo:

**Lema 13.** *Seja  $\varepsilon > 0$  e  $G = (V, E)$  um grafo com  $n$  vértices. Seja  $P$  uma partição de  $V$  em  $t+1$  conjuntos  $V_0, \dots, V_t$  com  $|V_0| < \varepsilon n$  e  $|V_1| = \dots = |V_t|$ . Se mais de  $\varepsilon t^2$  pares desses conjuntos não são  $\varepsilon$ -regulares, então existe um refinamento  $Q$  de  $P$  em  $1 + t4^t$  conjuntos tal que  $\text{index}(Q) \geq \text{index}(P) + \varepsilon^5/20$  e o conjunto excepcional  $V_0$  aumenta de no máximo  $n/4^t$ .*

Segundo o lema acima, aplicando  $k$  refinamentos sucessivos, obtemos uma partição  $P_k$  tal que

$$\frac{1}{2} \geq \text{index}(P_k) \geq \text{index}(P) + \frac{k\varepsilon^5}{20}$$

Portanto,  $k \leq 10\varepsilon^{-5}$  e podemos obter uma partição satisfazendo as condições do lema da regularidade em menos de  $10\varepsilon^{-5}$  passos.

Exemplos de aplicação do lema da regularidade podem ser vistos na prova do Lema 46 da seção 3.4.1 e na seção A.2.

## 2.2 Versão Esparsa

Como já mencionamos, o lema da regularidade não é útil para grafos esparsos, pois aproxima grafos  $G = (V, E)$  com  $|E| = cn^{2-\alpha}$ ,  $c, \alpha > 0$ , para um grafo vazio, já que o número de arestas ignoradas é de ordem quadrática.

Em 1997, Kohayakawa e Rödl provaram independentemente uma versão do lema da regularidade para grafos esparsos [42], [46]. A observação chave é que, com um escalonamento dos valores envolvidos por um dado  $p$ , possibilita-se um erro subquadrático  $cn^{2-\alpha} = n^2p$ , ou seja,  $p = cn^{-\alpha} = o(1)$ . Com isso, redefinimos a densidade de um par de conjuntos para  $d_{G,p}(A, B) = d_G(A, B)/p$ , ou simplesmente  $d_p(A, B)$ . Substituindo essa densidade  $d_{G,p}(A, B)$  na definição de partição  $\varepsilon$ -regular, temos a definição de partição  $(\varepsilon, p)$ -regular.

Resumindo, dizemos que o par  $(A, B)$  é  $(\varepsilon, p)$ -regular em  $G$  se para todos  $A' \subseteq A$ ,  $B' \subseteq B$  tais que  $|A'| \geq \varepsilon|A|$ ,  $|B'| \geq \varepsilon|B|$ , temos que

$$d_{G,p}(A', B') = d_{G,p}(A, B) \pm \varepsilon$$

onde

$$d_{G,p}(A, B) = \frac{e_G(A, B)}{p|A||B|}$$

Apesar desse escalonamento, a prova do lema original não poderia ser seguida *mutatis mutandi* pois é possível que algum par  $(V_i, V_j)$  possua uma densidade escalonada ilimitada superiormente em função de  $n$ . Para isso, devemos evitar que o grafo  $G$  esparso da aplicação contenha um subgrafo denso relativamente grande.

Isso porque, apesar da esparsidade de  $G$ , poderíamos ter na partição um par com densidade original  $d_G(U, W)$  não tão pequena quanto esperado de forma que sua densidade escalonada  $d_{G,p} = d_G/p$ , com  $p = o(1)$ , seja ilimitada superiormente em função de  $n$ . Assim, o valor da medida *index* da partição se torna também ilimitado, inviabilizando a prova anterior, onde o *index* era limitado em  $1/2$ .

Sejam  $0 < \eta \leq 1$  e  $0 < p \leq 1$ . Um grafo  $G$  é  $(\eta, b)$ -esparso com densidade  $p$  se,  $\forall U, W \subset V(G)$  disjuntos com  $|U|, |W| \geq \eta|V(G)|$ , então  $d_{G,p}(U, W) \leq b$ . Claramente, se  $G$  é  $(\eta, b)$ -esparso com densidade  $p$ , então também é  $(\eta', b')$ -esparso com densidade  $p'$ , para  $\eta' \geq \eta$ ,  $b' \geq b$  e  $p' \geq p$ .

Esta notação, de [44], é mais apropriada para nossas aplicações, como na prova do Teorema 32. Ela é mais geral do que as notações em [46], [35] e [36], que limitam a densidade escalonada por  $1 + \eta$ , ao invés de  $b = 2$ .

**Teorema 14 (Lema da Regularidade para grafos esparsos).**  $\forall \varepsilon, t_0, b, \exists \eta, T_0, n_0$ , tais que, se  $G$  é um grafo  $(\eta, b)$ -esparso com densidade  $p$  e  $n > n_0$  vértices, então existe uma partição de  $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_t$  tal que:

- $t_0 \leq t \leq T_0$
- $|V_0| < \varepsilon n$

- $|V_1| = \dots = |V_t|$
- Com exceção de no máximo  $\varepsilon \binom{t}{2}$ , todos pares  $(V_i, V_j)$  são  $(\varepsilon, p)$ -regulares.

Obtemos a variante das arestas, substituindo a última sentença acima por:

- Com exceção de no máximo  $\varepsilon p \binom{n}{2}$ , todas arestas pertencem a pares  $(V_i, V_j)$   $(\varepsilon, p)$ -regulares.

Um exemplo de aplicação pode ser visto na prova do Teorema 32 da seção 3.2. Outros exemplos são citados na seção A.3.

Não existe [27] um *Lema da Contagem* geral ( $k$ -cliques  $K_k$ ), análogo ao Lema 11, para o caso esparsos. No entanto, resultados de contagens de outros subgrafos e/ou em diferentes contextos podem ser obtidos, como na Proposição 4.8 de [27].

## 2.3 Versão simples para hipergrafos

Para fins de notação, um  $k$ -grafo é um hipergrafo  $k$ -uniforme e  $K_i^{(k)}$ ,  $i > k$ , é o  $k$ -grafo completo com  $i$  vértices (ou  $i$ -clique  $k$ -uniforme).

Uma versão simples do lema da regularidade para hipergrafos [55], muito próxima a original de Szemerédi, é utilizada em algumas aplicações, como em [51] na prova de que há uma “testemunha pequena” para número cromático grande de um  $k$ -grafo. Esse resultado é mostrado na seção 3.4.

Seja  $\mathcal{H}$  um  $k$ -grafo,  $n = |V(\mathcal{H})|$  e sejam  $X_1, \dots, X_k$  conjuntos disjuntos de vértices de  $\mathcal{H}$ . Definimos a densidade da  $k$ -upla  $(X_1, \dots, X_k)$  como

$$d(X_1, \dots, X_k) = \frac{e(X_1, \dots, X_k)}{|X_1| \dots |X_k|},$$

onde  $e(X_1, \dots, X_k)$  é o número de hiperarestas com exatamente um vértice de cada  $X_i$ .

Dizemos que a  $k$ -upla  $(X_1, \dots, X_k)$  é  $\varepsilon$ -regular com densidade  $d = d(X_1, \dots, X_k)$  se para toda  $k$ -upla  $(X'_1, \dots, X'_k)$ , com  $X'_i \subseteq X_i$  e  $|X'_i| \geq \varepsilon |X_i|$ , para cada  $i$ , então

$$d(X'_1, \dots, X'_k) = d \pm \varepsilon.$$

Dizemos que uma partição  $V_0, V_1, \dots, V_t$  dos vértices de  $\mathcal{H}$  é  $\varepsilon$ -regular se

- $|V_0| < \varepsilon n$
- $|V_1| = \dots = |V_t|$

- Todas, exceto  $\varepsilon t^k$ ,  $k$ -uplas  $(V_{i_1}, \dots, V_{i_k})$  são  $\varepsilon$ -regulares

Obtemos a variante das arestas, substituindo a última sentença acima por:

- Todas, exceto  $\varepsilon n^k$ , hiperarestas pertencem a  $k$ -uplas  $(V_{i_1}, \dots, V_{i_k})$   $\varepsilon$ -regulares

Apresentamos então abaixo uma versão simples do lema da regularidade para hipergrafos, cuja prova é essencialmente a mesma para grafos ( $k = 2$ ).

**Teorema 15 (Lema da Regularidade simples para hipergrafos).** *Fixe  $k \geq 2$ . Para todo  $\varepsilon > 0$  e  $t_0 \geq 1$ , existem inteiros  $T_0$  e  $n_0$  tais que todo  $k$ -grafo  $\mathcal{H}$  com  $n \geq n_0$  vértices, possui uma partição  $\varepsilon$ -regular  $V_0, \dots, V_t$ , com  $t_0 \leq t \leq T_0$ .*

Um exemplo de aplicação pode ser visto na prova do Teorema 39 da seção 3.4 sobre testemunha pequena para homomorfismo entre  $k$ -grafos.

Esta versão do lema da regularidade para hipergrafos falha em obter um resultado análogo ao lema da contagem [53], [56]:

**Lema 16 (3-grafo denso e regular, mas sem 4-clique).** *Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um 3-grafo 4-partido  $\mathcal{H}$  com partes  $V_1, V_2, V_3, V_4$ , tal que todo  $V_i, V_j, V_k$ ,  $1 \leq i < j < k \leq 4$ , é denso e  $\varepsilon$ -regular, mas  $\mathcal{H}$  não contém uma clique de tamanho 4.*

*Prova.* Tome  $\varepsilon > 0$  e  $V_1, V_2, V_3, V_4$  disjuntos e de tamanho  $n$ . Considere ainda uma 2-coloração aleatória dos pares  $\{v_i, v_j\}$ ,  $v_i \in V_i$ ,  $v_j \in V_j$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$ .

Construiremos  $\mathcal{H}$  da seguinte forma: uma 3-upla  $\{v_i, v_j, v_k\}$ ,  $1 \leq i < j < k \leq 4$ , é uma hiperaresta de  $\mathcal{H}$  se e só se os pares  $\{v_i, v_j\}$  e  $\{v_i, v_k\}$  receberam cores diferentes.

É fácil verificar que  $\mathcal{H}$  não contém uma clique  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ , pois, dos pares  $\{v_1, v_2\}$ ,  $\{v_1, v_3\}$  e  $\{v_1, v_4\}$ , dois devem possuir a mesma cor, pelo princípio da casa dos pombos.

Usando a desigualdade de Chernoff, para  $n$  suficientemente grande, é fácil verificar que

$$\left| d(V_i, V_j, V_k) - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

e que  $(V_i, V_j, V_k)$  é  $\varepsilon$ -regular,  $1 \leq i < j < k \leq 4$ .

Para isso, basta tomar variáveis indicadores  $X_e$  para  $e = \{v_i, v_j, v_k\}$  ser uma hiperaresta. Claramente,  $E(X_e) = 1/2$ . Seja

$$X = \sum_{e \in (V_i, V_j, V_k)} X_e$$

o número de hiperarestas em  $V_i, V_j, V_k$ .

Pela linearidade da esperança,  $E(X) = n^3/2$  e, por Chernoff,

$$P(|d(V_i, V_j, V_k) - \frac{1}{2}| > \varepsilon) = P(|X - E(X)| > \varepsilon n^3) \leq 2 \exp\{-2\varepsilon^2 n^3/3\} \rightarrow 0.$$

O mesmo ocorre tomando  $(V'_i, V'_j, V'_k)$ , tais que  $|V'_i|, |V'_j|, |V'_k| \geq \varepsilon n$ , e obtendo o número de hiperarestas em  $V'_i, V'_j, V'_k$  como

$$X' = \sum_{e \in (V'_i, V'_j, V'_k)} X_e.$$

Pela linearidade da esperança,  $E(X') = |V'_i||V'_j||V'_k|/2$  e, por Chernoff,

$$\begin{aligned} P(|d(V'_i, V'_j, V'_k) - \frac{1}{2}| > \varepsilon) &= P(|X' - E(X')| > \varepsilon |V'_i||V'_j||V'_k|) \\ &\leq 2 \exp\{-2\varepsilon^2 |V'_i||V'_j||V'_k|/3\} \leq 2 \exp\{-2\varepsilon^5 n^3/3\} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Nas seções seguintes, veremos abordagens mais sofisticadas para se chegar a uma versão do lema da regularidade para  $k$ -grafos, que permita um lema da contagem associado.

## 2.4 Versão para 3-grafos

O lema da regularidade de Szemerédi decompõe qualquer grafo em blocos quase-aleatórios: os pares  $\varepsilon$ -regulares. Essa noção de quase-aleatoriedade admite a companhia do Lema da Contagem exposto e usado em aplicações.

Para desenvolver um lema da regularidade razoável para hipergrafos, ou seja, que decompõe o hipergrafo em blocos quase-aleatórios, é importante levar em consideração um Lema da Contagem associado, que estimaria o número de hipergrafos com dado isomorfismo em uma coleção de blocos quase-aleatórios, o que seria de grande utilidade para aplicações.

Vários conceitos tentando capturar a noção de quase-aleatoriedade para hipergrafos foram estudados. O conceito central em [9] e [10], denominado “*deviation*”, admite um lema da contagem, bem como em [48], mais recente, com outro conceito denominado “*discrepancy*”.

Além disso, era necessário propor particionamentos mais sofisticados. No lema da regularidade de Szemerédi, por exemplo, a estrutura principal a ser regularizada é o conjunto de arestas do grafo, onde uma partição dos vértices

é usada como estrutura auxiliar. Resumidamente, as arestas (2-uplas) são regularizadas em relação aos vértices (1-uplas).

Se, para  $k$ -grafos, as  $k$ -uplas são regularizadas em relação aos vértices, como em [55], mostrado na seção anterior, então a analogia natural com o lema da contagem falha [53]. Uma abordagem mais refinada foi considerada em [7] e [24], sem intenção de obter um lema da contagem. O particionamento auxiliar é feito sobre as  $j$ -uplas, para cada  $j < k$ .

Seguindo este conceito, Frankl e Rödl [25] provaram um Lema da Regularidade para 3-grafos, com particionamento auxiliar nas 2-uplas e outro nos vértices. Além disso, provaram um lema da contagem para o caso especial do  $K_4^{(3)}$ . Posteriormente, provou-se o lema da contagem geral para  $K_i^{(3)}$ ,  $i > 3$ , em [53] (ver [54] para uma prova mais curta e interessante). Seguindo a mesma linha, Rödl e Skokan [59] estenderam o lema da regularidade para  $k$ -grafos e obtiveram o lema da contagem associado, que serão expostos na próxima seção.

Para detalhamento do lema da regularidade para 3-grafos de Frankl e Rödl, são necessárias algumas definições preliminares.

Fixe  $l \geq 3$ . Sejam  $\mathcal{H}$  um 3-grafo e  $G$  um grafo, ambos  $l$ -partidos com mesmo conjunto de vértices  $V = V_1 \cup \dots \cup V_l$ .

Seja  $\mathcal{K}_3(G)$  a família de 3-uplas de vértices que formam triângulos ( $K_3$ ) em um grafo  $G$ .

Fixe classes  $V_a, V_b, V_c$ , onde  $1 \leq a < b < c \leq l$ . Para  $r \geq 1$  inteiro, seja  $\mathbf{G}^{abc} = \{G_1^{abc}, \dots, G_r^{abc}\}$  uma família de  $r$  subgrafos de  $G[V_a, V_b, V_c]$  (o subgrafo 3-partido de  $G$  induzido sobre  $V_a \cup V_b \cup V_c$ ).

Definimos assim a densidade do 3-grafo  $\mathcal{H}$  com respeito a  $\mathbf{G}^{abc}$  como

$$d(\mathcal{H}|\mathbf{G}^{abc}) = \frac{|\mathcal{H} \cap \bigcup_{1 \leq s \leq r} \mathcal{K}_3(G_s^{abc})|}{|\bigcup_{1 \leq s \leq r} \mathcal{K}_3(G_s^{abc})|}$$

se o denominador for maior que 0. Senão, a densidade é igual a 0. Ou seja, representa a fração de triângulos de  $\mathbf{G}^{abc}$  que são hiperarestas de  $\mathcal{H}$ .

Dizemos que  $\mathcal{H}$  é  $(\delta_3, d_3, r)$ -regular com respeito a um grafo  $G$  se, para escolha de qualquer  $V_a, V_b, V_c$ , com  $1 \leq a < b < c \leq l$ , e de qualquer família  $\mathbf{G}^{abc} = \{G_1^{abc}, \dots, G_r^{abc}\}$  de subgrafos de  $G[V_a, V_b, V_c]$  com mais de uma fração  $\delta_3$  do total de triângulos, ou seja, satisfazendo

$$|\bigcup_{1 \leq s \leq r} \mathcal{K}_3(G_s^{abc})| \geq \delta_3 |\mathcal{K}_3(G[V_a, V_b, V_c])|$$

então

$$d(\mathcal{H}|\mathbf{G}^{abc}) = d_3 \pm \delta_3.$$



Grosso modo, subgrafos 3-partidos de  $G$  com “muitos” triângulos têm muitas hiperarestas de  $\mathcal{H}$ . O conceito de  $(\delta_3, d_3, r)$ -regularidade caracteriza a noção usada de quase-aleatoriedade para 3-grafos, dando controle do hipergrafo  $\mathcal{H}$  em relação ao grafo  $G$ .

Estamos interessados nos casos em que  $\mathcal{H}$  é  $(\delta_3, d_3, r)$ -regular com respeito a um grafo  $G$  com mesma  $l$ -partição e cada  $G[V_a, V_b]$  é  $\delta_2$ -regular com densidade  $d_2 \pm \delta_2$ , para cada  $1 \leq a < b \leq l$ .

Grosso modo, o 3-grafo  $\mathcal{H}$   $(\delta_3, d_3, r)$ -regular com respeito ao grafo  $G$   $\delta_2$ -regular formam os “blocos quase-aleatórios” que serão obtidos pelo lema da regularidade na decomposição de quaisquer 3-grafos suficientemente grandes.

A importância em se considerar uma família de  $r$  subgrafos, ao invés de um subgrafo apenas, está no fato de que, quanto maior  $r$ , mais grupos de triângulos de  $G$  são considerados. Um exemplo muito simples pode ser montado. Suponha que tenhamos  $G$  3-partido completo cujas partes tem dois vértices:  $A = \{a_1, a_2\}$ ,  $B = \{b_1, b_2\}$  e  $C = \{c_1, c_2\}$ . Considere o grupo de triângulos  $\{a_1b_1c_1, a_1b_2c_2, a_2b_2c_1\}$ . Ele não pode ser obtido com um subgrafo apenas ( $r = 1$ ), pois seriam necessárias as arestas  $a_1b_1$ ,  $a_1b_2$  e  $a_2b_2$  entre  $A$  e  $B$ , as arestas  $a_1c_1$ ,  $a_1c_2$  e  $a_2c_1$  entre  $A$  e  $C$ , e as arestas  $b_1c_1$ ,  $b_2c_2$  e  $b_2c_1$  entre  $B$  e  $C$ , o que geraria, além dos triângulos desejados, o triângulo  $a_1b_2c_1$  indesejado. Mas, com dois subgrafos ( $r = 2$ ), é possível se obter exatamente o grupo desejado de triângulos. Disso conclui-se que, para  $r > 1$ ,  $(\delta_3, r)$ -regularidade implica  $(\delta_3, 1)$ -regularidade, mas não o contrário.

Neste ponto, descreveremos o particionamento do lema da regularidade para 3-grafos, que será de duas formas: nos vértices e nos pares de vértices. Fixe  $t, l, \delta_2, \delta_3, d_2, d_3$  reais positivos. Uma  $(t, l)$ -partição consiste de:

- **Partição nos vértices:**  $V = V_1 \cup \dots \cup V_t$  onde  $|V_1| \leq \dots \leq |V_t| \leq |V_1| + 1$
- **Partição nos pares de vértices:** O grafo bipartido completo com partes  $(V_a, V_b)$ , para todos  $1 \leq a < b \leq t$ , é particionado em  $l_{ab}$  grafos bipartidos  $G_1^{ab}, \dots, G_{l_{ab}}^{ab}$  disjuntos nas arestas, onde  $1 \leq j \leq l_{ab} \leq l$ .

Uma  $(t, l)$ -partição é  $(\mu, \delta_2, d_2)$ -equilibrada se:

- Todo, exceto no máximo  $\mu n^2$ , par de vértices  $(v_a, v_b)$ ,  $v_a \in V_a$ ,  $v_b \in V_b$ , pertence a um grafo  $G_j^{ab}$   $\delta_2$ -regular com densidade  $d_2 \pm \delta_2$ , para todo  $1 \leq a < b \leq t$  e  $1 \leq j \leq l_{ab} \leq l$ . Ou seja, a maioria dos pares de  $V$  pertencem a grafos bipartidos regulares.

Esta notação mais geral está de acordo com a generalização para  $k$ -grafos da próxima seção [59]. Em [27], toma-se um erro  $\mu \binom{t}{2} m^2$ , onde  $m = \lfloor n/t \rfloor$ .

Além disso, em [25] e [58], toma-se  $l_{ab} = l$ , para todos  $1 \leq a < b \leq t$  e, conseqüentemente,  $d_2 = \frac{1}{t}$ .

Segundo Frankl e Rödl [25], uma  $(t, l)$ -partição é  $(\delta_3, r)$ -regular se:

- toda, exceto  $\delta_3 n^3$ , tripla  $(v_a, v_b, v_c)$ ,  $v_a \in V_a$ ,  $v_b \in V_b$ ,  $v_c \in V_c$ , pertence a uma triáde de grafos  $T^{abc} = G_{j_{ab}}^{ab} \cup G_{j_{bc}}^{bc} \cup G_{j_{ac}}^{ac}$  tal que  $\mathcal{H}$  é  $(\delta_3, d(\mathcal{H}|T^{abc}), r)$ -regular com respeito a  $T^{abc}$ , onde  $1 \leq j_{ab} \leq l_{ab}$ ,  $1 \leq j_{bc} \leq l_{bc}$  e  $1 \leq j_{ac} \leq l_{ac}$ .

Alternativamente, segundo Rödl e Skokan [59], uma  $(t, l)$ -partição é  $(\delta_3, r)$ -regular se:

- toda, exceto  $\delta_3 n^3$ , hiperaresta de  $\mathcal{H}$  é do tipo  $(v_a, v_b, v_c)$ ,  $v_a \in V_a$ ,  $v_b \in V_b$ ,  $v_c \in V_c$ ,  $(v_a, v_b) \in G_{j_{ab}}^{ab}$ ,  $(v_b, v_c) \in G_{j_{bc}}^{bc}$ ,  $(v_a, v_c) \in G_{j_{ac}}^{ac}$ , onde  $\mathcal{H}$  é  $(\delta_3, d(\mathcal{H}|T^{abc}), r)$ -regular com respeito a triáde de grafos  $T^{abc} = G_{j_{ab}}^{ab} \cup G_{j_{bc}}^{bc} \cup G_{j_{ac}}^{ac}$ .

Essas versões de  $(t, l)$ -partição  $(\delta_3, r)$ -regular são equivalentes. Em comparação com a regularização sobre grafos, a segunda pode ser vista como a original sobre as arestas e a primeira pode ser vista como regularização sobre pares de vértices, que não é muito diferente, visto que o grafo não é esparso.

Um último comentário sobre  $\mathcal{H}$  ser  $(\delta_3, d(\mathcal{H}|T^{abc}), r)$ -regular com respeito a triáde  $T^{abc} = G_{j_{ab}}^{ab} \cup G_{j_{bc}}^{bc} \cup G_{j_{ac}}^{ac}$  de grafos faz-se necessário. Isso significa que para escolha de qualquer família  $\mathbf{F}^{abc}$  de  $r$  subgrafos de  $T^{abc}$  com mais de uma fração  $\delta_3$  do total de triângulos, ou seja, satisfazendo

$$|\mathcal{K}_3(\mathbf{F}^{abc})| \geq \delta_3 |\mathcal{K}_3(T^{abc})|$$

então

$$d(\mathcal{H}|\mathbf{F}^{abc}) = d(\mathcal{H}|T^{abc}) \pm \delta_3.$$

Finalmente, com todas essas definições, podemos enunciar o lema da regularidade para 3-grafos:

**Teorema 17 (Lema da Regularidade para 3-grafos).** *Para todos reais positivos  $\mu$  e  $\delta_3$ , e funções*

$$\delta_2 : (0, 1] \rightarrow (0, 1],$$

$$r : \mathbb{N} \times (0, 1] \rightarrow \mathbb{N},$$

*existem  $T_0, L_0$  e  $n_0$  tais que, para todo 3-grafo  $\mathcal{H}$  com  $n \geq n_0$  vértices, existem inteiros  $t, l, d_2$  e uma  $(t, l)$ -partição  $(\mu, \delta_2, d_2)$ -equilibrada  $(\delta_3, r)$ -regular de  $\mathcal{H}$  tais que  $t \leq T_0$  e  $l \leq L_0$ , onde  $\delta_2 = \delta_2(d_2)$  e  $r = r(t, d_2)$ .*

Observe que  $\delta_2$  deve ser escolhida como função de  $d_2$ . Temos então a seguinte quantificação, que deve ser respeitada na elaboração do Lema da Contagem abaixo para 3-grafos, também provado em [53] e [54]:  $\mu, d_3 \gg \delta_3 \gg d_2 \gg \delta_2$ .

**Teorema 18 (Lema da Contagem para 3-grafos).** *Fixe um inteiro  $l \geq 3$ .  $\forall d_3 \exists \delta_3 \forall d_2 \exists \delta_2$  e existem inteiros positivos  $r$  e  $n_0$  tais que, se  $\mathcal{H}$  é um 3-grafo  $l$ -partido  $(\delta_3, d_3, r)$ -regular com respeito a um grafo  $G$   $\delta_2$ -regular com densidade  $d_2 \pm \delta_2$ , com partição  $V(\mathcal{H}) = V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_l$  e  $|V_i| = n > n_0, 1 \leq i \leq l$ , então o número de  $l$ -cliques no 3-grafo  $\mathcal{H}$  é:*

$$|\mathcal{K}_l(\mathcal{H})| = (1 \pm f(\delta_3)) d_3^{\binom{l}{3}} d_2^{\binom{l}{2}} n^l,$$

onde  $f(\delta_3) \rightarrow 0$  quando  $\delta_3 \rightarrow 0$ .

A prova desse Lema da Contagem em [54] é muito interessante e apresenta técnicas úteis para atacar problemas similares. Resumidamente, a prova é feita por indução em  $l \geq 3$ . O caso base  $l = 3$  para o 3-grafo 3-partido  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{1,2,3}$ , é trivial. Para  $l > 3$  e fixando um vértice  $v \in V_1$ , define-se o grafo de ligação  $L_v$  de modo que  $(v_i, v_j)$  é uma aresta de  $L_v$ , para  $v_i \in V_i$  e  $v_j \in V_j$ , se e só se é uma aresta de  $G$  e  $(v, v_i, v_j)$  é uma hiperaresta de  $\mathcal{H}$ .

O fator chave da prova é a aplicação do lema da regularidade de Szemerédi sobre o grafo de ligação  $L_v$ . Usando a indução, estima-se então o número de  $l$ -cliques de  $\mathcal{H}$  a partir de uma soma do número de  $(l-1)$ -cliques de subhipergrafos de  $\mathcal{H}$  induzidos sobre partes regulares do grafo de ligação  $L_v$ .

Na próxima seção, como ilustração, apresentamos uma generalização para  $k$ -grafos de Rödl e Skokan [59] semelhante a esta para 3-grafos.

## 2.5 Versão para $k$ -grafos

Como ilustração, mostramos a generalização de Rödl e Skokan [59], que estenderam o lema da regularidade de 3-grafos para  $k$ -grafos,  $k \geq 3$ , seguindo a mesma abordagem anterior.

Nosso interesse aqui é devido a necessidade de se particionar sobre as  $j$ -uplas, para cada  $j < k$ , pois a versão para subgrafos da seção 2.6, que foi alvo de nosso estudo, particiona de outra forma, praticamente impossibilitando um lema da contagem geral.

Fixe  $l \geq k \geq 2$ . Para todo  $2 \leq i < k$ , seja  $\mathcal{G}^{(i)}$  um  $i$ -grafo  $l$ -partido com partição  $V_1 \cup \dots \cup V_l$ . Conseqüentemente,  $\mathcal{G}^{(1)} = V_1 \cup \dots \cup V_l$ .

Seja  $\mathcal{K}_j(\mathcal{G}^{(i)})$  a família de  $j$ -uplas de vértices que formam uma clique  $K_j^{(i)}$  em  $\mathcal{G}^{(i)}$ ,  $2 \leq i < j < k$ .

Para  $j \geq 3$ , fixe classes  $V_{i_1}, \dots, V_{i_j}$ , onde  $1 \leq i_1, \dots, i_j \leq l$ . Para  $r \geq 1$  inteiro, seja  $\mathbf{Q}^{(j-1)} = \{\mathcal{Q}_1^{(j-1)}, \dots, \mathcal{Q}_r^{(j-1)}\}$  uma família de sub-hipergrafos de  $\mathcal{G}^{(j-1)}[V_{i_1}, \dots, V_{i_j}]$  (o sub-hipergrafo  $j$ -partido de  $\mathcal{G}^{(j-1)}$  induzido sobre  $V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_j}$ ).

Definimos então a densidade de  $\mathcal{G}^{(j)}$  com respeito a  $\mathbf{Q}^{(j-1)}$  como

$$d(\mathcal{G}^{(j)} | \mathbf{Q}^{(j-1)}) = \frac{|\mathcal{G}^{(j)} \cap \bigcup_{1 \leq s \leq r} \mathcal{K}_j(\mathcal{Q}_s^{(j-1)})|}{|\bigcup_{1 \leq s \leq r} \mathcal{K}_j(\mathcal{Q}_s^{(j-1)})|}$$

se o denominador for maior que 0. Senão, a densidade é igual a 0. Ou seja, é a fração de hiperarestas (de tamanho  $j$ ) que são  $(j-1)$ -cliques.

Dizemos que  $\mathcal{G}^{(j)}$  é  $(\delta_j, d_j, r)$ -regular com respeito a  $\mathcal{G}^{(j-1)}$  se para escolha de qualquer  $V_{i_1}, \dots, V_{i_j}$ , com  $1 \leq i_1, \dots, i_j \leq l$ , e de qualquer família  $\mathbf{Q}^{(j-1)} = \{\mathcal{Q}_1^{(j-1)}, \dots, \mathcal{Q}_r^{(j-1)}\}$  de sub-hipergrafos de  $\mathcal{G}^{(j-1)}[V_{i_1}, \dots, V_{i_j}]$  satisfazendo

$$\left| \bigcup_{1 \leq s \leq r} \mathcal{K}_j(\mathcal{Q}_s^{(j-1)}) \right| \geq \delta_j |\mathcal{K}_j(\mathcal{G}^{(j-1)}[V_{i_1}, \dots, V_{i_j}])|$$

então

$$d(\mathcal{G}^{(j)} | \mathbf{Q}^{(j-1)}) = d_j \pm \delta_j$$

O conceito de  $(\delta_j, d_j, r)$ -regularidade caracteriza a noção usada de quase-aleatoriedade para  $j$ -grafos, dando controle do hipergrafo  $\mathcal{G}^{(j)}$  em relação ao hipergrafo  $\mathcal{G}^{(j-1)}$ . Para obter maior controle sobre  $\mathcal{G}^{(j)}$ , adicionam-se restrições sobre  $\mathcal{G}^{(j-1)}$  em relação a  $\mathcal{G}^{(j-2)}$ , e assim por diante.

Definimos assim uma  $(l, h)$ -estrutura,  $h \leq l$ , como sendo um sistema  $\{\mathcal{G}^{(j)}\}_{j=1}^h$  de  $j$ -grafos  $l$ -partidos  $\mathcal{G}^{(j)}$  satisfazendo  $\mathcal{G}^{(j)} \subset \mathcal{K}_j(\mathcal{G}^{(j-1)})$ , para  $2 \leq j \leq h$ , com mesma partição nos vértices  $\mathcal{G}^{(1)} = V_1 \cup \dots \cup V_l$ . Ou seja, toda hiperaresta de  $\mathcal{G}^{(j)}$  forma uma  $(j-1)$ -clique em  $\mathcal{G}^{(j-1)}$ .

Dizemos que uma  $(l, h)$ -estrutura é  $(\delta, \mathbf{d}, r)$ -regular, para  $r \geq 1$  inteiro e vetores  $\delta = (\delta_2, \dots, \delta_h)$  e  $\mathbf{d} = (d_2, \dots, d_h)$ , se:

- $\mathcal{G}^{(2)}[V_a, V_b]$  é  $\delta_2$ -regular com densidade  $d_2 \pm \delta_2$ , para cada  $1 \leq a < b \leq l$
- $\mathcal{G}^{(j)}$  é  $(\delta_j, d_j, r)$ -regular com respeito a  $\mathcal{G}^{(j-1)}$ , para cada  $3 \leq j \leq h$

A grosso modo,  $(l, h)$ -estruturas regulares são os “blocos quase-aleatórios” que serão obtidos pelo lema da regularidade na decomposição de quaisquer  $k$ -grafos suficientemente grandes.

Neste ponto, descreveremos o particionamento realizado pelo lema da regularidade para hipergrafos. Considere o vetor  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{k-1})$  e os vetores  $\delta$  e  $\mathbf{d}$ . Seja  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(k-1, \mathbf{a}) = \{\mathcal{P}^{(1)}, \dots, \mathcal{P}^{(k-1)}\}$  uma família de partições dos vértices, duplas, triplas, ...,  $(k-1)$ -uplas de  $V$ .

**Definição 19.** Dizemos que  $\mathcal{P}$  é  $(\mu, \delta, \mathbf{d}, r)$ -equilibrada se satisfaz as seguintes condições:

- $\mathcal{P}^{(1)} = \{V_i : 1 \leq i \leq a_1\}$  é uma partição de vértices de  $V$  tal que  $|V_1| \leq \dots \leq |V_{a_1}| \leq |V_1| + 1$
- $\mathcal{P}^{(j)}$  é uma partição de  $\mathcal{K}_j(\mathcal{G}^{(1)}) = K_{a_1}^{(j)}(V_1, \dots, V_{a_1})$  tal que, se  $Q_1^{(j-1)}, \dots, Q_j^{(j-1)} \in \mathcal{P}^{(j-1)}$  e  $\mathcal{K}_j(\bigcup_{i=1}^j Q_i^{(j-1)}) \neq \emptyset$  então  $\mathcal{K}_j(\bigcup_{i=1}^j Q_i^{(j-1)})$  é particionado em no máximo  $a_j$  partes.
- Todas exceto no máximo  $\mu n^k$   $k$ -uplas  $K$  de  $V$  são tais que existe uma única  $(k, k-1)$ -estrutura  $(\delta, \mathbf{d}, r)$ -regular  $P(K) = \{Q^{(j)}\}_{j=1}^{k-1}$  tal que  $Q^{(j)}$  possui como membros  $\binom{k}{j}$  diferentes partes de  $\mathcal{P}^{(j)}$  e  $K \in \mathcal{K}_k(Q^{(k-1)}) \subset \dots \subset \mathcal{K}_k(Q^{(1)})$

A estrutura  $P(K) = \{Q^{(j)}\}_{j=1}^{k-1}$  faz o papel dos pares  $(V_i, V_j)$  no Lema da regularidade de Szemerédi.

Nós dizemos que um  $k$ -grafo  $\mathcal{H}^{(k)}$  é  $(\delta_k, r)$ -regular com respeito a uma família de partições  $\mathcal{P}$  se todas, exceto no máximo  $\delta_k n^k$ , hiperarestas  $K$  de  $\mathcal{H}^{(k)}$  são tais que  $K \in \mathcal{K}_k(\mathcal{G}^{(1)})$  e  $P(K) = \{Q^{(j)}\}_{j=1}^{k-1}$  é a única  $(k, k-1)$ -estrutura onde  $K \in \mathcal{K}_k(Q^{(k-1)})$ .

Finalmente, com todas essas definições, podemos enunciar o lema da regularidade para  $k$ -grafos, que é essencialmente igual ao lema da regularidade para grafos e para 3-grafos:

**Teorema 20 (Lema da Regularidade para  $k$ -grafos).** Para todos reais positivos  $\mu$  e  $\delta_k$ , e funções

$$\delta_j : (0, 1]^{k-j} \rightarrow (0, 1], \forall j = 2, \dots, k-1,$$

$$r : \mathbb{N} \times (0, 1]^{k-2} \rightarrow \mathbb{N},$$

existe  $T_0$  e  $n_0$  tais que, para todo  $k$ -grafo  $\mathcal{H}^{(k)}$  com  $n \geq n_0$  vértices, existe uma família de partições  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(k-1, \mathbf{a})$  e um vetor  $\mathbf{d} = (d_2, \dots, d_{k-1})$  tais que para o vetor  $\delta = (\delta_2, \dots, \delta_{k-1})$ , onde  $\delta_j = \delta_j(d_2, \dots, d_{k-1})$ ,  $2 \leq j < k$ , e para  $r = r(a_1, \mathbf{d})$ , temos que:

- $\mathcal{P}$  é uma família de partições  $(\mu, \delta, \mathbf{d}, r)$ -equilibrada

- $a_i \leq T_0$ , para todo  $i = 1, \dots, k-1$
- $\mathcal{H}^{(k)}$  é  $(\delta_k, r)$ -regular com respeito a  $\mathcal{P}$

Observe que, para  $2 \leq j < k$ , a constante  $\delta_j$  deve ser escolhida como função de  $d_j, \dots, d_{k-1}$ . Logo, podemos garantir que  $\delta_j \gg \min\{d_j, \dots, d_{k-1}\}$ . Entretanto, não há controle algum sobre a relação entre  $\delta_j$  e  $d_{j-1}$ . Ou seja, podemos ter  $\delta_j \gg d_{j-1}$ , gerando a seguinte hierarquia:

$$\mu, d_k \gg \delta_k \gg d_{k-1} \gg \delta_{k-1} \gg \dots \gg d_2 \gg \delta_2$$

Essa quantificação deve ser respeitada na elaboração do Lema da Contagem abaixo para  $k$ -grafos, também provado em [59].

**Teorema 21 (Lema da Contagem para  $k$ -grafos).** *Para todos inteiros  $2 \leq k \leq l$  vale que:  $\forall \mu \forall d_k \exists \delta_k \forall d_{k-1} \exists \delta_{k-1} \dots \forall d_2 \exists \delta_2$  e existem inteiros positivos  $r$  e  $m_0$  tais que, com vetores  $\mathbf{d} = (d_2, \dots, d_k)$ ,  $\delta = (\delta_2, \dots, \delta_k)$  e  $m \geq m_0$ , se  $\{\mathcal{G}^{(j)}\}_{j=1}^k$  é uma  $(l, k)$ -estrutura  $(\delta, \mathbf{d}, r)$ -regular com partição  $V_1 \cup \dots \cup V_l$  e  $|V_i| = m$ ,  $1 \leq i \leq l$ , então o número de  $l$ -cliques em  $\mathcal{G}^{(k)}$  é:*

$$|\mathcal{K}_l(\mathcal{G}^{(k)})| = (1 \pm \mu) \prod_{h=2}^k d_h^{(l)} m^l$$

Esse resultado é essencialmente igual para o caso  $k = 3$  de [53] e [54], apresentado na seção anterior, porém com prova bem mais técnica.

### 2.5.1 Particionamentos Necessários

Como mostrado na seção 2.3, a versão simples do lema da regularidade para hipergrafos falha em obter um lema da contagem geral. Em especial, o Lema 16 prova que existe um 3-grafo 4-partido denso e com partes  $\varepsilon$ -regulares entre si, mas sem clique de tamanho 4.

A seção 2.5 acima apresenta um lema da regularidade para  $k$ -grafos e seu Lema da Contagem associado. Os particionamentos são feitos sobre todas as  $j$ -uplas,  $\forall j < k$ .

Surge então a seguinte questão: É possível obter um Lema da Contagem geral sem particionamento das  $(k-1)$ -uplas, para  $k > 3$ ? O lema 23 abaixo responde negativamente para o caso  $k = 4$  e pode ser facilmente estendido para o caso geral. Considere primeiramente as definições abaixo.

**Configuração 22.** *Sejam  $k, r$  e  $n$  inteiros dados. Sejam  $d_4, \delta_4, d_2, \delta_2$  reais positivos não nulos. Suponha que:*

- $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$ ,  $|V_1| = \dots = |V_k| = n$  é um particionamento do conjunto de vértices  $V = V(P) = V(\mathcal{H})$
- $P = \bigcup_{1 \leq i < j \leq k} P^{ij}$  é um grafo  $k$ -partido onde todos  $P^{ij}$  são  $\delta_2$ -regulares com densidade  $d_2$ ,  $\forall 1 \leq i < j \leq k$
- $\mathcal{H} = \bigcup_{1 \leq f < h < i < j \leq k} \mathcal{H}^{f hij}$  é um 4-grafo  $k$ -partido tal que as arestas de  $P$  **dão suporte** as hiperarestas de  $\mathcal{H}$ . Ou seja, se  $(v_f, v_h, v_i, v_j)$  é 4-aresta de  $\mathcal{H}^{f hij}$ , então  $(v_f, v_h) \in P^{fh}$ ,  $(v_f, v_i) \in P^{fi}$ ,  $(v_f, v_j) \in P^{fj}$ ,  $(v_h, v_i) \in P^{hi}$ ,  $(v_h, v_j) \in P^{hj}$ ,  $(v_i, v_j) \in P^{ij}$ ,  $\forall 1 \leq f < h < i < j \leq k$

Seja  $P^{f hij} = P^{fh} \cup P^{fi} \cup P^{fj} \cup P^{hi} \cup P^{hj} \cup P^{ij}$ ,  $1 \leq f < h < i < j \leq k$ .

Uma  $r$ -upla  $\overrightarrow{P^{f hij}}$  de subgrafos é um conjunto de subgrafos

$$\overrightarrow{P^{f hij}} = \bigcup_{1 \leq s \leq r} P_s^{f hij} = (P_1^{f hij}, \dots, P_r^{f hij}),$$

onde  $P_s^{f hij} \subseteq P^{f hij}$ ,  $\forall 1 \leq s \leq r$ .

Seja  $Q(G)$  o conjunto de 4-cliques de um grafo  $G$ . Seja  $Q(\overrightarrow{P^{f hij}}) = \bigcup_{1 \leq s \leq r} Q(P_s^{f hij})$ . A densidade de uma  $r$ -upla  $\overrightarrow{P^{f hij}}$  mede a proporção de 4-cliques de  $\overrightarrow{P^{f hij}}$  que são hiperarestas de  $\mathcal{H}$ . Ou seja,

$$d_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{P^{f hij}}) = \frac{|\mathcal{H} \cap Q(\overrightarrow{P^{f hij}})|}{|Q(\overrightarrow{P^{f hij}})|}$$

Dizemos que  $\mathcal{H}^{f hij}$  é  $(d_4, \delta_4, r)$ -regular com respeito a  $P^{f hij}$ , se, para toda  $r$ -upla  $\overrightarrow{P^{f hij}}$  com  $|Q(\overrightarrow{P^{f hij}})| \geq \delta_4 |Q(P^{f hij})|$ , temos que  $d_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{P^{f hij}}) = d_4 \pm \delta_4$ .

**Lema 23 (4-grafo 5-partido denso e regular, mas sem 5-clique).** Fixe  $d_2 > \delta_2 > 0$ . Para todo  $\delta_4, r > 0$ , existe  $n_0$  tais que, se  $V$  e  $P$  são de acordo com a Configuração 22, para  $k = 5$ , então existe um 4-grafo  $\mathcal{H}$  5-partido, também de acordo com a Configuração 22, sem clique de tamanho 5, tal que  $\mathcal{H}^{f hij}$  é  $(\frac{1}{2}, \delta_4, r)$ -regular com respeito a  $P^{f hij}$ ,  $\forall 1 \leq f < h < i < j \leq 5$ .

*Prova.* Considere uma 2-coloração aleatória das triplas  $\{v_h, v_i, v_j\}$ ,  $v_h \in V_h$ ,  $v_i \in V_i$ ,  $v_j \in V_j$ ,  $1 \leq h < i < j \leq 5$ .

Construiremos  $\mathcal{H}$  da seguinte forma: uma 4-upla  $\{v_f, v_h, v_i, v_j\}$  é uma hiperaresta de  $\mathcal{H}$  se e só se as triplas  $\{v_f, v_h, v_i\}$  e  $\{v_f, v_h, v_j\}$  receberam cores diferentes, e  $(v_f, v_h) \in P^{fh}$ ,  $(v_f, v_i) \in P^{fi}$ ,  $(v_f, v_j) \in P^{fj}$ ,  $(v_h, v_i) \in P^{hi}$ ,  $(v_h, v_j) \in P^{hj}$ ,  $(v_i, v_j) \in P^{ij}$ ,  $1 \leq f < h < i < j \leq 5$ .

É fácil verificar que  $\mathcal{H}$  não contém uma clique  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ , pois, das triplas  $\{v_1, v_2, v_3\}$ ,  $\{v_1, v_2, v_4\}$  e  $\{v_1, v_2, v_5\}$ , duas devem ter a mesma cor, pelo princípio da casa dos pombos.

De forma análoga ao Lema 16, também é fácil verificar que, para  $n > n_0$  suficientemente grande,  $\mathcal{H}^{f hij}$  é  $(\frac{1}{2}, \delta_4, r)$ -regular com respeito a  $P^{f hij}$ ,  $\forall 1 \leq f < h < i < j \leq 5$ .

Para isso, fixe  $1 \leq f < h < i < j \leq 5$ , e uma  $r$ -upla  $\overrightarrow{P^{f hij}}$  com  $|Q(\overrightarrow{P^{f hij}})| \geq \delta_4 |Q(P^{f hij})|$ . Queremos provar que  $d_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{P^{f hij}}) = \frac{1}{2} \pm \delta_4$ .

Para isso, tome variáveis indicadores  $X_e$  para  $e = \{v_f, v_h, v_i, v_j\}$  ser uma hiperaresta de  $\mathcal{H}$ , onde  $(v_f, v_h) \in P^{fh}$ ,  $(v_f, v_i) \in P^{fi}$ ,  $(v_f, v_j) \in P^{fj}$ ,  $(v_h, v_i) \in P^{hi}$ ,  $(v_h, v_j) \in P^{hj}$ ,  $(v_i, v_j) \in P^{ij}$ .

Claramente,  $E(X_e) = \frac{1}{2}$ . Seja  $X$  o número de hiperarestas em  $Q(\overrightarrow{P^{f hij}})$ :

$$X = \sum_{e \in Q(\overrightarrow{P^{f hij}})} X_e.$$

Pela linearidade da esperança, temos que  $E(X) = |Q(\overrightarrow{P^{f hij}})|/2$ .

Como os grafos  $P^{ij}$  são  $\delta_2$ -regulares com densidade  $d_2$ ,  $\forall 1 \leq i < j \leq 5$ , temos, pelo Lema 11 da contagem, que

$$|Q(P^{f hij})| = d_2^{\binom{4}{2}} n^4 (1 \pm f(\delta_2)),$$

onde  $|f(\delta_2)| < 1$ , já que  $\delta_2 < d_2$ , e  $f(\delta_2) \rightarrow 0$  quando  $\delta_2 \rightarrow 0$ .

Finalmente, por Chernoff,

$$\begin{aligned} P(|d_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{P^{f hij}}) - \frac{1}{2}| > \delta_4) &= P(|X - E(X)| > \delta_4 |Q(\overrightarrow{P^{f hij}})|) \\ &\leq 2 \exp\{-2\delta_4^2 |Q(\overrightarrow{P^{f hij}})|\} \leq 2 \exp\{-2\delta_4^3 |Q(P^{f hij})|\} \\ &\leq 2 \exp\{-2\delta_4^3 d_2^6 n^4 (1 - f(\delta_2))\} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

A formalização do corolário abaixo segue a Definição 19 e é muito técnica. Mas a idéia geral é a mesma. Se temos particionamentos de todas as  $j$ -uplas, para cada  $j \leq k - 2$ , mas não temos particionamento das  $(k - 1)$ -uplas, não conseguimos obter um lema da contagem.

**Corolário 24** ( $k$ -grafo  $(k + 1)$ -partido denso e regular, mas sem  $(k + 1)$ -clique). Fixe  $0 < \delta_k, \mu \leq 1$  e os vetores  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{k-2})$ ,  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{k-2})$  e  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_{k-2})$ . Seja  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(k-2, \mathbf{a}) = \{\mathcal{P}^{(1)}, \dots, \mathcal{P}^{(k-2)}\}$



uma família  $(\mu, \delta, \mathbf{d}, r)$ -equilibrada de partições dos vértices, duplas, triplas, ...,  $(k-2)$ -uplas de  $V$ . Então existe um  $k$ -grafo  $\mathcal{H}$   $(k+1)$ -partido sem clique de tamanho  $k+1$ , tal que  $\mathcal{H}[i_1, \dots, i_k]$  é  $(\frac{1}{2}, \delta_k, r)$ -regular com respeito a

$$\bigcup_{\{j_1, \dots, j_{k-2}\} \subset \{i_1, \dots, i_k\}} \mathcal{P}^{(k-2)}[j_1, \dots, j_{k-2}],$$

para  $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq k+1$ .

*Prova.* Mesma idéia do Lema 23. Basta considerar uma 2-coloração aleatória das  $(k-1)$ -uplas  $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}}\}$ , onde  $v_{i_j} \in V_{i_j}$ , para  $1 \leq i_1, \dots, i_{k-1} \leq k+1$ .

Com isso, construímos  $\mathcal{H}$  da seguinte forma: uma  $k$ -upla  $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$  é uma hiperaresta de  $\mathcal{H}$  se e só se as  $(k-1)$ -uplas  $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-2}}, v_{i_{k-1}}\}$  e  $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-2}}, v_{i_k}\}$  receberam cores diferentes e, para todos  $\{j_1, \dots, j_{k-2}\} \subset \{i_1, \dots, i_k\}$ , temos que  $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{k-2}}\} \in \mathcal{P}^{(k-2)}[j_1, \dots, j_k]$ .  $\square$

## 2.6 Versão para Subgrafos quaisquer

O Lema de Szemerédi realiza a regularização das *arestas* ( $K_2$ ) de um grafo qualquer. O Lema de Frankl-Rödl realiza a regularização das hiperarestas de um 3-grafo qualquer, que pode ser considerado, grosso modo, uma regularização sobre os *triângulos* ( $K_3$ ) de um grafo qualquer, cujos triângulos representariam as hiperarestas do 3-grafo. Da mesma forma, o Lema de Rödl-Skokan realizaria a regularização das *k-cliques* ( $K_k$ ) de um grafo qualquer.

Motivados pelo problema de se encontrar um limiar severo para a propriedade *Ramsey*  $\mathcal{R}$  (toda 2-coloração nas arestas gera um triângulo monocromático), em 2006, Friedgut, Rödl, Ruciński e Tetali [27] provaram uma versão do lema da regularidade que realiza a regularização sobre um subgrafo  $H$  qualquer dado. Por exemplo, com algumas restrições,  $H = K_2$ ,  $H = K_3$  e  $H = K_k$  corresponderiam aos casos anteriores, respectivamente. Além disso, ela é mais geral, pois é possível restringir quais cópias de  $H$  deverão ser consideradas, ao invés de todas. Chamaremos de  $\mathcal{S}$  a essa família de cópias especiais de  $H$ .

No entanto, essa versão é mais restritiva do que os casos  $K_2, K_3$  e  $K_k$ , pois obriga que o grafo a ser regularizado seja, respectivamente, bipartido, tripartido ou  $k$ -partido. Apesar dessa restrição, temos uma ferramenta geral, embora complexa, para atacar problemas que necessitem de regularização sobre quaisquer subgrafos.

Em geral, o grafo  $G = (V, E)$  a ser regularizado deve ser um subgrafo de  $H^m$ ,  $m$  a ser definido, ou seja, o grafo obtido de  $H$ , substituindo cada vértice  $x$  de  $H$  por um conjunto  $V_x$  com  $m$  vértices, mantendo a relação das arestas, ou seja, cada aresta por um  $K_{m,m}$ .

Só nos interessarão cópias  $H'$  de  $H$  em  $G$  *consistentes* com essa construção de  $H^m$ , ou seja, se para cada vértice  $x$  de  $H$ , a sua *imagem*  $x'$  em  $H'$  pertence a  $V_x$ . Seja então  $C_H(G')$  o conjunto das cópias consistentes de  $H$  em  $G' \subseteq G$ . Obviamente,  $\mathcal{S} \subseteq C_H(G)$ .

Essa versão do lema da regularidade trata também de grafos esparsos, já que o limiar da propriedade  $\mathcal{R}$ , que serviu de motivação, é da ordem de  $n^{-1/2}$ . Como em Kohayakawa-Rödl [42], também será necessário escalonar a densidade por um fator  $p$ . Mas, aqui surge uma diferença. Neste caso, deveremos ter duas medidas de densidade, uma relativa às arestas e outra às cópias de  $H$ . Além disso, como em [42], deveremos evitar um subgrafo relativamente grande “denso”, segundo essas duas definições de densidade, ou seja, limitá-las superiormente por constantes  $D$  e  $D^*$  dadas.

Seja  $p > 0$  um real e  $A, B \subset V(G)$  conjuntos disjuntos. Definimos a *densidade de arestas*  $d_p(A, B)$  do par  $(A, B)$  como:

$$d_p(A, B) = \frac{e_G(A, B)}{p|A||B|},$$

onde  $e_G(A, B)$  é o número de arestas com uma extremidade em  $A$  e outra em  $B$ .

Seja  $p^*$  um real e  $R$  um subgrafo de  $G$ . Definimos a *densidade de subgrafos*  $d_{\mathcal{S}, p^*}(R)$  como:

$$d_{\mathcal{S}, p^*}(R) = \frac{|S \cap C_H(R)|}{p^*|C_H(R)|}$$

O lema da regularidade para subgrafos é o teorema abaixo. A definição de  $(t, l)$ -partição  $(\varepsilon(l), p)$ -uniforme  $(\delta, \mathcal{S})$ -regular de  $G$  é dada logo em seguida.

**Teorema 25 (Lema da Regularidade para Subgrafos).** *Para todo grafo  $H$ ,  $h = |V(H)|$ ,  $\forall \delta > 0$ ,  $D > 0$ ,  $D^* \geq 1$  reais e para toda função*

$$\varepsilon : \mathbb{N} \rightarrow (0, 1],$$

*existem  $T_0$ ,  $L_0$  e  $n_0$ , tais que vale o seguinte: se  $G$  é um subgrafo de  $H^m$ , com  $|V(G)| = n = hm > n_0$ , satisfazendo que*

- *nenhuma aresta de  $G$  pertence a mais de  $|C_H(G)|/\log^3 n$  cópias consistentes de  $H$ ,*

- $\forall A, B \subset V(G)$ , disjuntos com  $|A|, |B| \geq n/\log n$ , temos  $d_p(A, B) \leq D$ ,
- $\forall R \subset G$ , com  $|C_H(R)| \geq |C_H(G)|/\log^2 n$ , temos  $d_{S, p^*}(R) \leq D^*$ ,

para algum  $0 < p, p^* \leq 1$ , e para alguma família  $\mathcal{S} \subseteq C_H(G)$ , então existe uma  $(t, l)$ -partição  $(\varepsilon(l), p)$ -uniforme  $(\delta, \mathcal{S})$ -regular de  $G$ , onde:

- $t \leq T_0$
- $l \leq L_0$

Uma  $(t, l)$ -partição de  $G \subseteq H^m$  consiste de uma partição nos vértices e outra nas arestas, a saber:

- $V_x = V_x^1 \cup \dots \cup V_x^t$ , onde  $|V_x^1| \leq \dots \leq |V_x^t| \leq |V_x^1| + 1$ ,  $\forall x \in V(H)$ , onde  $V_x$  representa  $x$  em  $G \subseteq H^m$
- $G_{xy}^{i,j} = \bigcup_{k=1}^{l(xy,i,j)} G_{xy}^{i,j,k}$ ,  $\forall xy \in E(H)$ , com  $l(xy, i, j) \leq l$ , onde  $G_{xy} = G[V_x, V_y]$  representa a aresta  $xy$  em  $G \subseteq H^m$  e  $G_{xy}^{i,j} = G_{xy}[V_x^i, V_y^j]$ .

Uma  $(t, l)$ -partição de  $G$  é  $(\varepsilon, p)$ -uniforme se todas, exceto uma fração  $\varepsilon$ , das arestas de  $G$  pertencem a subgrafos  $G_{xy}^{i,j,k}$   $(\varepsilon, p)$ -regulares.

Uma  $(t, l)$ -partição de  $G$  é  $(\delta, \mathcal{S})$ -regular se todas, exceto uma fração  $\delta$ , das cópias consistentes de  $H$  em  $G$  pertencem a *políades*  $(\delta, \mathcal{S})$ -regulares. O conceito de *políade regular* aqui mencionado faz o papel dos blocos quase-aleatórios do lema da regularização.

Uma *políade*  $P$  é um subgrafo de  $G$  obtido selecionando uma parte  $V_x^{i_x}$ ,  $\forall x \in V(H)$ , e um subgrafo  $G_{xy}^{i_x, i_y, k_{xy}}$ ,  $\forall xy \in E(H)$ . Ou seja, fixando  $1 \leq i_x \leq t$ ,  $\forall x \in V(H)$ , e fixando  $1 \leq k_{xy} \leq l(xy, i_x, i_y)$ ,  $\forall xy \in E(H)$ , temos:

$$P = \bigcup_{xy \in E(H)} G_{xy}^{i_x, i_y, k_{xy}}$$

Dizemos que uma políade  $P$  é  $(\delta, \mathcal{S})$ -regular se  $\forall Q \subseteq P$  com  $|C_H(Q)| \geq \delta |C_H(P)|$ , temos que  $d_{S, p^*}(Q) = d_{S, p^*}(P) \pm \delta$ .

A figura 2.1 ilustra o grafo  $G$ , subgrafo de  $H^m$ , com classes de vértices  $V_1, \dots, V_6$  (nos círculos maiores), com particionamento dos vértices (nos círculos menores internos) e das arestas (entre as partes).

Como já citado, não existe [27] um lema da contagem geral para o caso esparso. Porém, para a aplicação do Teorema 25 para o caso específico da propriedade *Ramsey*  $\mathcal{R}$ , foi obtido um resultado de contagem de subgrafos *estrelas* segundo um formato predeterminado [27].

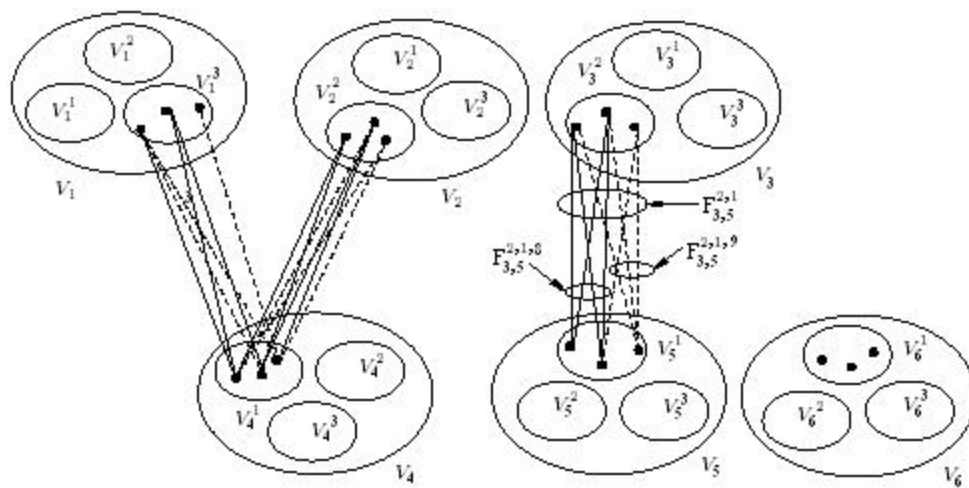


Figura 2.1: Exemplo dos conceitos da regularização sobre subgrafos

## Capítulo 3

# Herança de Uniformidade

### 3.1 Introdução

Um dos resultados mais simples sobre herança é conhecido como *Slicing Lemma* [50]. Se um grafo é  $\varepsilon$ -regular com densidade  $d$ , então todo subconjunto com  $\alpha n$  vértices induz um grafo  $\varepsilon/\alpha$ -regular com densidade  $d$ , para  $\alpha > \varepsilon$ , onde  $n$  é o número de vértices.

Um resultado mais forte de herança foi obtido segundo um contexto bastante interessante. Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Sejam  $\chi(G)$  e  $\text{girth}(G)$  o número cromático e o tamanho do menor ciclo (ou circunferência) de  $G$ . Em 1959, Erdős provou que existem grafos com número cromático e circunferência tão grandes quanto se queira.

Esse resultado é surpreendente, pois vai contra o senso comum de que, quanto maior o número cromático, mais conectados estariam os vértices e menor seria a circunferência do grafo. A prova em [2] apresentada abaixo é curta e é uma aplicação simples do método probabilístico.

**Teorema 26 (Erdős, 1959).** *Para todos  $k, l$  positivos, existe um grafo  $G$  com  $\text{girth}(G) > l$  e  $\chi(G) > k$ .*

*Prova.* Fixe  $\theta < 1/l$  e seja  $G = G(n, p)$  com  $p = n^{\theta-1}$ . Seja  $X$  o número de ciclos de tamanho menor ou igual a  $l$ . Então

$$E(X) = \sum_{i=3}^l \frac{\binom{n}{i}}{2i} p^i \leq \sum_{i=3}^l \frac{n^{\theta i}}{2i} \leq \frac{l}{6} n^{\theta l} = o(n),$$

já que  $\theta l < 1$ , onde  $\binom{n}{l} = n!/(n-l)!$ . Portanto, pela desigualdade de Markov,  $\mathbb{P}(X \geq n/2) \leq E(X)/(n/2) = o(1)$ .

Seja  $\alpha(G)$  o tamanho do conjunto independente máximo de  $G$ . Seja  $y = \lceil \frac{3}{p} \ln n \rceil$ . Para todo  $Y \subset V(G)$  com  $|Y| = y$ , seja  $A_Y$  o evento de  $Y$  ser um conjunto independente. Portanto,

$$\mathbb{P}(\alpha(G) \geq y) = Pr \left[ \bigvee_{\substack{Y \subset V(G) \\ |Y|=y}} A_Y \right] \leq \sum_{\substack{Y \subset V(G) \\ |Y|=y}} \mathbb{P}(A_Y)$$

Como  $1 - p < e^{-p}$ , para  $p > 0$ , temos que

$$\mathbb{P}(\alpha(G) \geq y) \leq \binom{n}{y} (1 - p)^{\binom{y}{2}} < [ne^{-p(y-1)/2}]^y = o(1).$$

Seja  $n$  suficientemente grande tal que  $\mathbb{P}(X \geq n/2) < 0.5$  e  $\mathbb{P}(\alpha(G) \geq y) < 0.5$ . Então existe um grafo  $G$  com menos de  $n/2$  ciclos de tamanho menor ou igual a  $l$  e com  $\alpha(G) < 3n^{1-\theta} \ln n$ .

Remova de  $G$  um vértice de cada ciclo de tamanho menor ou igual a  $l$ . Isso gera um grafo  $G^*$  com pelo menos  $n/2$  vértices.  $G^*$  possui circunferência maior que  $l$  e  $\alpha(G^*) \leq \alpha(G)$ . Logo, tomando  $n$  suficientemente grande, temos

$$\chi(G^*) \geq \frac{|E(G^*)|}{\alpha(G^*)} \geq \frac{n/2}{3n^{1-\theta} \ln n} = \frac{n^\theta}{6 \ln n} > k$$

□

Assim, existem muitos grafos  $G$  com  $\chi(G) > k$ , mas que se “comportam” localmente como uma árvore, pois tem circunferência grande. Naturalmente conjecturou-se que nem sempre existe subgrafo  $H \subset G$  com  $|V(H)|$  “pequeno” e  $\chi(H) > k$ , ou seja, uma “testemunha pequena” com número cromático elevado.

Em 1985, Duke e Rödl [14] provaram justamente o contrário para grafos  $G$  não esparsos com número cromático “robustamente” elevado.

**Teorema 27 (Testemunha pequena para grafos).** *Para todo  $k > 0$  e  $\varepsilon > 0$ , existem inteiros positivos  $n_0$  e  $r$  tais que ocorre o seguinte: Seja  $G$  um grafo, com  $n > n_0$  vértices e  $m$  arestas, tal que  $\chi(H) \geq k$ , para todo subgrafo  $H \subseteq G$  com pelo menos  $m - \varepsilon n^2$  arestas. Então existe um subgrafo  $J \subseteq G$  com  $\chi(J) \geq k$  e no máximo  $r$  vértices.*

O grafo  $J$  representa a “testemunha pequena”, já que tem tamanho limitado por  $r$ , que independe do número de vértices de  $G$ , que pode ser tão grande quanto se queira. Recentemente, Goldreich, Goldwasser e Ron [31] obtiveram melhores limites superiores para  $r$ , na motivação de encontrar algoritmos eficientes para testar se um grafo possui ou não uma dada

propriedade. Seus resultados foram melhorados posteriormente por Alon e Krivelevich [3].

Na prova do Teorema 27, utilizou-se um poderoso lema auxiliar que introduzia um conceito sofisticado de herança de uniformidade, ou seja, a capacidade de um grafo uniforme “passar” essa propriedade aos seus subgrafos.

**Definição 28 ( $\varepsilon$ -uniforme com densidade  $d$ ).** Dizemos que um grafo  $G$  é  $\varepsilon$ -uniforme com densidade  $d$  se  $\forall V' \subseteq V(G)$ , com  $|V'| \geq \varepsilon|V(G)|$ , então  $|E(G[V'])|/\binom{|V'|}{2} = d \pm \varepsilon$ .

Observe a diferença entre a definição acima de grafo  $\varepsilon$ -uniforme e a definição na seção 2.1 de grafo *bipartido*  $G$   $\varepsilon$ -regular.

Grosso modo, o lema afirma que,  $\forall \beta, \varepsilon', \exists \varepsilon_0, w_0$ , se um grafo  $G$  é  $\varepsilon$ -uniforme com densidade  $d$ , para  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , então o número de subconjuntos  $W \subset V(G)$ ,  $|W| = w > w_0$  tais que  $G[W]$  é  $\varepsilon'$ -uniforme com densidade  $d$  é pelo menos

$$(1 - \beta^w) \binom{|V(G)|}{w}.$$

O fator  $(1 - \beta^w)$  representa um pequeno erro que chamaremos de “super-exponencial”, pois  $\beta$  pode ser tão pequeno quanto se queira.

## 3.2 Grafos Esparsos

Recentemente, em 2004, Gerke, Kohayakawa, Rödl e Steger [29] provaram o resultado de Duke e Rödl (existência de uma “testemunha pequena” para  $\chi(G) > k$ ) para uma classe grande de grafos esparsos  $G$ . Para isso, utilizaram um conceito um pouco diferente de  $\varepsilon$ -uniformidade, a saber ( $\varepsilon$ )-uniformidade, a fim de se adequar a aplicação da versão esparsa do lema da regularidade, e provaram um resultado semelhante de hereditariedade para grafos bipartidos, apresentado abaixo.

**Definição 29 (bipartido ( $\varepsilon$ )-uniforme ou ( $\varepsilon$ )-inf-uniforme com densidade  $d$ ).** Dizemos que um grafo bipartido  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  é ( $\varepsilon$ )-uniforme com densidade  $d$  se,  $\forall V'_1 \subseteq V_1, \forall V'_2 \subseteq V_2$ , com  $|V'_1| \geq \varepsilon|V_1|$  e  $|V'_2| \geq \varepsilon|V_2|$ , então  $|E(V'_1, V'_2)| = (1 \pm \varepsilon)d|V'_1||V'_2|$ . Se  $|E(V'_1, V'_2)| \geq (1 - \varepsilon)d|V'_1||V'_2|$ , dizemos que  $G$  é ( $\varepsilon$ )-inf-uniforme com densidade  $d$ .

Observe a pequena diferença entre a definição acima de grafo bipartido ( $\varepsilon$ )-uniforme e a definição na seção 2.1 de grafo *bipartido*  $\varepsilon$ -regular. Ao invés da densidade  $d \pm \varepsilon$ , tem-se aqui  $d(1 \pm \varepsilon)$ , possibilitando tratar com grafos esparsos, onde  $d \leq \varepsilon$ .

**Lema 30 (Herança de inf-uniformidade para grafos bipartidos esparsos).** Para todos  $0 < \beta, \varepsilon' < 1$ , existem  $\varepsilon_0, C$  tais que, se  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  é um grafo bipartido  $(\varepsilon)$ -inf-uniforme com densidade  $d$ , para  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , então o número de conjuntos  $W \subset V_1$ ,  $|W| = w > C/d$ , formando um subgrafo  $(\varepsilon')$ -inf-uniforme de densidade  $d$  com  $V_2$  é pelo menos

$$(1 - \beta^w) \binom{|V_1|}{w}.$$

**Lema 31 (Herança de uniformidade para grafos bipartidos esparsos).** Para todos  $0 < \beta, \varepsilon' < 1$ , existem  $\varepsilon_0, C$  tais que, se  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  é um grafo bipartido  $(\varepsilon)$ -uniforme com densidade  $d$ , para  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , então o número de conjuntos  $W \subset V_1$ ,  $|W| = w > C/d$ , que contém um subconjunto  $W' \subseteq W$ ,  $|W'| \geq (1 - \varepsilon')|W|$  formando um subgrafo  $(\varepsilon')$ -uniforme de densidade  $d' = d(1 \pm \varepsilon)$  com  $V_2$  é pelo menos

$$(1 - \beta^w) \binom{|V_1|}{w}.$$

No Lema 31, seria mais fácil se o próprio conjunto  $W \subset V_1$  formasse um subgrafo  $(\varepsilon')$ -uniforme com  $V_2$ , como no lema 30, ao invés de considerar subconjuntos  $W' \subseteq W$ . No entanto, como mostrado em [29], isso não é verdade para os casos em geral.

O Lema 30 será usado adiante na prova de uma herança interna de uniformidade, ou seja, não apenas para grafos bipartidos.

O Lema 31 e o lema da regularidade para grafos esparsos são usados na prova do teorema abaixo de [29] sobre a existência de uma “testemunha pequena” para  $\chi(G) > k$ , onde  $G$  é  $(\eta, b)$ -esparso com densidade  $p$ . Como visto na seção 2.2, um grafo  $G = (V, E)$  é  $(\eta, b)$ -esparso com densidade  $p$  se, para todo  $U, W \subseteq V$  disjuntos com  $|U|, |W| \geq \eta|V|$ , temos que

$$\frac{e_G(U, W)}{p|U||W|} \leq b.$$

**Teorema 32 (Testemunha pequena para grafos esparsos).** Para todos  $b, k, \varepsilon > 0$ , existem  $\eta, n_0, f > 0$  tais que ocorre o seguinte. Seja  $G$  um grafo  $(\eta, b)$ -esparso com densidade  $p > 0$ , com  $n > n_0$  vértices e  $m$  arestas, tal que  $\chi(H) \geq k$ , para todo subgrafo  $H \subseteq G$  com pelo menos  $m - \varepsilon pn^2$  arestas. Então, existe um subgrafo  $J \subseteq G$  com no máximo  $f/p$  vértices e  $\chi(J) \geq k$ .



*Prova.* Apenas esboçaremos a prova. Tome  $\varepsilon' = 1/k > 0$ ,  $\beta = 1/2$ ,  $0 < \varepsilon'' < \varepsilon_0$ , onde  $\varepsilon_0$  vem do Lema 31, e  $\alpha > 0$ , tal que  $3\varepsilon''\alpha b + \alpha < \varepsilon$ .

Aplique a versão esparsa e “relaxada” do lema da regularidade (Teorema 14), com parâmetros  $\alpha\varepsilon''$ ,  $t_0 = \lceil 1/\alpha\varepsilon'' \rceil$ ,  $b$ , para um grafo  $G$   $(\eta, b)$ -esparso com densidade  $p > 0$ . Como, pela definição de  $(\eta, b, p)$ -sup-uniformidade,  $G$  não possui grandes “pedaços” densos, obtemos uma partição  $V(G) = V_1, \dots, V_t$ ,  $t \geq t_0$ , com partes de tamanho  $\lfloor n/t \rfloor$  ou  $\lceil n/t \rceil$ , onde todas, exceto no máximo  $\alpha\varepsilon''pn^2$ , arestas pertencem a pares  $(V_i, V_j)$   $(\alpha\varepsilon'', p)$ -regulares.

Com isso, removendo no máximo  $\varepsilon pn^2$  arestas, obtemos um subgrafo  $H$  de  $G$ , onde cada par  $(V_i, V_j)$  é  $(\alpha\varepsilon'', p)$ -regular com densidade  $d(V_i, V_j) = 0$  ou  $d(V_i, V_j) \geq \alpha p$ . Isso significa que são também  $(\varepsilon'')$ -uniforme com densidade nula ou pelo menos  $\alpha p$  também.

Por hipótese,  $\chi(H) \geq k$ . Aplicando o Lema 31 sobre  $H$ , temos que, para cada  $i = 1, \dots, t$ , existem subconjuntos  $W_i \subset V_i$  de tamanho  $w$  tais que  $(W_i, W_j)$  forma um grafo  $(\varepsilon')$ -uniforme com a mesma densidade de  $(V_i, V_j)$  (nula ou pelo menos  $\alpha p$ ). Seja  $J$  o subgrafo de  $H$  induzido sobre  $W_1, \dots, W_t$ .

Por contradição, suponha que  $\chi(J) < k$  e considere uma coloração de  $J$  com  $k - 1$  cores. Mostraremos que é possível estender a coloração de  $J$  para uma coloração de  $H$  com  $k - 1$  cores, o que contradiz o fato de  $\chi(H) \geq k$ .

Para  $i = 1, \dots, t$ , seja  $c_i$  a cor mais usada em  $W_i$  na coloração do grafo  $J$ . Seja  $C_i \subseteq W_i$  o conjunto dos vértices que receberam a cor  $c_i$ . Note que  $|C_i| \geq w/k = \varepsilon'|W_i|$ . Assim, para  $1 \leq i, j \leq t$ , como  $(W_i, W_j)$  é  $(\varepsilon')$ -uniforme com densidade  $d(W_i, W_j) = d(V_i, V_j)$ , e  $d(V_i, V_j) = 0$  ou  $d(V_i, V_j) \geq \alpha p$ , temos que a densidade  $d(C_i, C_j) = 0$  se e só se  $d(V_i, V_j) = 0$ .

Logo, podemos colorir  $H$  dando a cor  $c_i$  para o conjunto  $V_i$  inteiro, pois, se houvessem vértices  $v_i \in V_i$  e  $v_j \in V_j$  com a mesma cor tais que  $v_i v_j$  é uma aresta de  $H$ , isso significa que  $d(V_i, V_j) > 0$ , e conseqüentemente,  $d(C_i, C_j) > 0$ , o que seria um absurdo.

Com isso, temos uma coloração própria de  $H$  com  $k - 1$  cores. Contradição.  $\square$

Resumidamente, a prova do teorema aplica a versão esparsa do lema da regularidade sobre  $G$  e elimina algumas arestas para obter um grafo  $H$  com partição uniforme. Tomando uma coleção de pequenos subconjuntos de cada parte, teremos, pela herança de uniformidade, que essa coleção induzirá um grafo  $J$  também uniforme. Se, por contradição,  $\chi(J) < k$  poderemos estender uma  $(k - 1)$ -coloração de  $J$  para uma  $(k - 1)$ -coloração de  $H$ , contradizendo  $\chi(H) \geq k$ .

A prova acima é interessante por aplicar tanto o lema da regularidade esparsa como a herança de uniformidade. No entanto, esta herança é somente

para grafos bipartidos.

### 3.3 Versão Interna para Grafos Esparsos

Em 2005, Kohayakawa e Leite [49] provaram uma versão interna da herança de inf-uniformidade, ou seja, abrangendo não apenas grafos bipartidos. No entanto, a prova desse resultado em [49] apresentou alguns problemas, que foram corrigidos na prova do Lema 34 abaixo.

**Definição 33 (não bipartido  $(\varepsilon)$ -uniforme ou  $(\varepsilon)$ -inf-uniforme com densidade  $d$ ).** Dizemos que um grafo  $G = (V, E)$  não bipartido é  $(\varepsilon)$ -uniforme com densidade  $d$  se, para todos  $U, W \subset V$  com  $|U|, |W| \geq \varepsilon|V|$  e  $U \cap W = \emptyset$ , temos que

$$\frac{|E(U, W)|}{|U||W|} = (1 \pm \varepsilon)d.$$

Se  $|E(U, W)| \geq (1 - \varepsilon)d|U||W|$ , dizemos que  $G$  é não bipartido  $(\varepsilon)$ -inf-uniforme com densidade  $d$ .

Observe a pequena diferença com relação as Definições 28 e 29.

**Lema 34 (Herança interna de inf-uniformidade para grafos esparsos).** Para todos  $0 < \beta, \varepsilon' < 1$ , existem  $C, \varepsilon_0, n_0$  tais que, se  $G = (V, E)$  é um grafo  $(\varepsilon)$ -inf-uniforme, para  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , com  $n > n_0$  vértices e densidade  $d$ , então o número de conjuntos  $W \subset V$ ,  $|W| = w > C/d$  tais que  $e(G[W]) \geq (1 - \varepsilon')d\binom{w}{2}$  é pelo menos

$$(1 - \beta^w) \binom{|V|}{w}.$$

*Prova.* Dizemos que  $(V_1, V_2)$  é uma bipartição equilibrada de  $V = V(G)$  se  $V_1 \cup V_2 = V$  e  $|V_1| = \lfloor n/2 \rfloor$  e  $|V_2| = \lceil n/2 \rceil$ . Obviamente,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . Fixe uma bipartição equilibrada  $(V_1, V_2)$  de  $V$ .

Aplicando o Lema 30, herança de inf-uniformidade esparsa, com constantes de entrada  $\tilde{\beta} = (\beta/3)^2$ ,  $\tilde{\varepsilon}' = \varepsilon'$ , obtém-se como saída  $\tilde{\varepsilon}_0$  e  $\tilde{C}$ . Tome  $\varepsilon_0 = \tilde{\varepsilon}_0/2$  e  $C = 3\tilde{C}$ . Fixe então  $w \geq C/d$ . Note que  $\lfloor w/2 \rfloor \geq C/3d = \tilde{C}/d$ . Tome ainda  $\varepsilon \leq \varepsilon_0 = \tilde{\varepsilon}_0/2$  e o grafo  $G$  não bipartido  $(\varepsilon)$ -inf-uniforme com densidade  $d$ , segundo a Definição 33, do enunciado.

Observe que  $G[V_1, V_2]$  é bipartido  $(2\varepsilon)$ -inf-uniforme com densidade  $d$ , segundo a Definição 29, pois teríamos  $|V_1'| \geq \varepsilon|V| \geq 2\varepsilon|V_1|$ . Como  $2\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , temos pelo Lema 30 que o número de pares  $(W_1, W_2)$  com  $W_1 \subset V_1$ ,  $W_2 \subset V_2$ ,

$|W_1| = \lfloor w/2 \rfloor$ ,  $|W_2| = \lceil w/2 \rceil$ , tais que o grafo  $G[W_1, W_2]$  é  $(\varepsilon')$ -inf-uniforme com densidade  $d$  é pelo menos

$$(1 - \tilde{\beta}^{w/2}) \binom{|V_1|}{|W_1|} (1 - \tilde{\beta}^{w/2}) \binom{|V_2|}{|W_2|} \geq (1 - 2\tilde{\beta}^{w/2}) \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{\lceil w/2 \rceil}^2$$

Dizemos que um par de conjuntos  $(W_1, W_2)$  é *ruim* se  $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ ,  $|W_1| = \lfloor w/2 \rfloor$ ,  $|W_2| = \lceil w/2 \rceil$  e  $e_G(W_1, W_2) < (1 - \varepsilon)d\lfloor w/2 \rfloor\lceil w/2 \rceil$ . Assim, o número de pares  $(W_1, W_2)$  ruins com  $W_1 \subset V_1$  e  $W_2 \subset V_2$  é no máximo  $2\tilde{\beta}^{w/2} \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{\lceil w/2 \rceil}^2$ , para  $(V_1, V_2)$  fixa.

Observe que existem

$$\binom{n-w}{\lfloor \frac{n-w}{2} \rfloor}$$

formas de construir uma partição equilibrada  $(V_1, V_2)$  de  $V$  a partir de um par  $(W_1, W_2)$ . Ou seja, para cada par *ruim* podemos ter esse número de bipartições equilibradas  $(V_1, V_2)$  de  $V$  com  $W_1 \subset V_1$  e  $W_2 \subset V_2$ .

Portanto, como existem  $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$  bipartições equilibradas  $(V_1, V_2)$  de  $V$ , temos que o número de pares  $(W_1, W_2)$  ruins é no máximo

$$\frac{1}{\binom{n-w}{\lfloor (n-w)/2 \rfloor}} \sum_{V_1 \cup V_2 = V}^{bip. eq.} 2\tilde{\beta}^{w/2} \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{\lceil w/2 \rceil}^2 \leq 2\tilde{\beta}^{w/2} \binom{n}{w} \frac{\binom{\lfloor n/2 \rfloor}{\lceil w/2 \rceil}}{\binom{n-w}{\lfloor (n-w)/2 \rfloor}}.$$

Seja agora um conjunto  $W$ , com  $|W| = w$ . Dizemos que  $W$  é *denso* se  $e(G[W]) \geq (1 - \varepsilon')d\binom{w}{2}$ . Como cada aresta de  $W$  aparece em exatamente  $2\binom{w-2}{\lfloor (w-2)/2 \rfloor}$  bipartições equilibradas  $(W_1, W_2)$  de  $W$ , temos que

$$e(G[W]) = \frac{1}{2\binom{w-2}{\lfloor (w-2)/2 \rfloor}} \sum_{W_1 \cup W_2 = W}^{bip. eq.} e(G[W_1, W_2]). \quad (3.1)$$

Se toda bipartição equilibrada  $(W_1, W_2)$  de  $W$  não é um par *ruim*, então

$$e(G[W]) \geq \frac{\binom{w}{\lfloor w/2 \rfloor}}{2\binom{w-2}{\lfloor (w-2)/2 \rfloor}} (1 - \varepsilon')d \lfloor \frac{w}{2} \rfloor \lceil \frac{w}{2} \rceil = (1 - \varepsilon')d \binom{w}{2}, \quad (3.2)$$

ou seja,  $W$  é *denso*. Com isso, se  $W$  não é *denso*, existe  $(W_1, W_2)$  equilibrada que é par *ruim*. Portanto, o número de conjuntos  $W$  não densos é menor ou igual ao número de pares  $(W_1, W_2)$  ruins.

Pela fórmula de Stirling para fatoriais, prova-se facilmente que, para  $w > 1$  e  $n$  suficientemente grande,

$$\frac{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}{\binom{n-w}{\lfloor (n-w)/2 \rfloor}} = (1 + o(1))2^w \sqrt{\frac{n-w}{n}} \leq 2.5^w. \quad (3.3)$$

Tome  $n_0$  tal que, se  $n \geq n_0$ , a desigualdade 3.3 ocorre. Portanto, o número de conjuntos não *densos* é menor que

$$2\tilde{\beta}^{w/2} \binom{n}{w} 2.5^w \leq (3\tilde{\beta}^{1/2})^w \binom{n}{w} = \beta^w \binom{n}{w}.$$

□

Como observado, o Lema 34 e sua prova receberam várias melhorias nesta apresentação com relação ao original. Além disso, acreditamos que ele possa ser estendido de  $(\varepsilon)$ -inf-uniformidade para  $(\varepsilon)$ -uniformidade, no estilo do Lema 31. Outro interesse é adaptá-lo para uma definição de herança mais no sentido original de Duke-Rödl, discutido na próxima seção.

### 3.3.1 $(\varepsilon)$ -uniformidade<sup>2</sup> de Duke-Rödl para grafos esparsos

A seção anterior trata da herança de uniformidade relativa a Definição 33. Esta definição trata de grafo esparsos gerais (não bipartidos), mas é diferente da Definição 28 original utilizada por Duke e Rödl [14].

A definição abaixo seria a versão esparsa da original de Duke e Rödl, que mostra-se bastante próxima da Definição 33, a versão esparsa da seção anterior.

**Definição 35** ( $(\varepsilon)$ -uniforme<sup>2</sup> ou  $(\varepsilon)$ -inf-uniforme<sup>2</sup> com densidade  $d$ ). Dizemos que um grafo  $G = (V, E)$  é  $(\varepsilon)$ -uniforme<sup>2</sup> com densidade  $d$  se, para todo  $V' \subseteq V$ , com  $|V'| \geq \varepsilon|V|$ , então

$$\frac{|E(G[V'])|}{\binom{|V'|}{2}} = (1 \pm \varepsilon)d.$$

Se  $|E(G[V'])| \geq (1 - \varepsilon)d\binom{|V'|}{2}$ , dizemos que  $G$  é  $(\varepsilon)$ -inf-uniforme<sup>2</sup> com densidade  $d$ .

Observe a pequena diferença com relação as Definições 28, 29 e 33.

Nossa intenção é mostrar que essas definições são “quase” equivalentes.

**Lema 36.** Se  $G = (V, E)$  é  $(\varepsilon)$ -uniforme<sup>2</sup> com densidade  $d$ , então  $G$  é  $(2\varepsilon)$ -uniforme com densidade  $d$ .

*Prova.* Tome  $U, W \subset V$  com  $|U|, |W| \geq 2\varepsilon|V|$  e  $U \cap W = \emptyset$ . Seja  $u = |U|$  e  $w = |W|$ . Sejam  $U_1, U_2$  tais que  $U_1 \cup U_2 = U$  com  $|U_1| = \lfloor u/2 \rfloor$  e  $|U_2| = \lceil u/2 \rceil$ . Sejam  $W_1, W_2$  tais que  $W_1 \cup W_2 = W$  com  $|W_1| = \lfloor w/2 \rfloor$  e  $|W_2| = \lceil w/2 \rceil$ .

Temos que

$$e_G(U, W) = e_G(U_1 \cup W_1) + e_G(U_1 \cup W_2) + e_G(U_2 \cup W_1) + e_G(U_2 \cup W_2) - 2e_G(U_1) - 2e_G(U_2) - 2e_G(W_1) - 2e_G(W_2).$$

Portanto,

$$e_G(U, W) = (1 \pm \varepsilon)d \left( \binom{\lfloor \frac{u}{2} \rfloor + \lfloor \frac{w}{2} \rfloor}{2} + \binom{\lfloor \frac{u}{2} \rfloor + \lceil \frac{w}{2} \rceil}{2} + \binom{\lceil \frac{u}{2} \rceil + \lfloor \frac{w}{2} \rfloor}{2} + \binom{\lceil \frac{u}{2} \rceil + \lceil \frac{w}{2} \rceil}{2} - 2 \binom{\lfloor \frac{u}{2} \rfloor}{2} - 2 \binom{\lceil \frac{u}{2} \rceil}{2} - 2 \binom{\lfloor \frac{w}{2} \rfloor}{2} - 2 \binom{\lceil \frac{w}{2} \rceil}{2} \right)$$

Como  $\binom{x+y}{2} - \binom{x}{2} - \binom{y}{2} = xy$ , temos que

$$\begin{aligned} e_G(U, W) &= (1 \pm \varepsilon)d \left( \lfloor \frac{u}{2} \rfloor \lfloor \frac{w}{2} \rfloor + \lfloor \frac{u}{2} \rfloor \lceil \frac{w}{2} \rceil + \lceil \frac{u}{2} \rceil \lfloor \frac{w}{2} \rfloor + \lceil \frac{u}{2} \rceil \lceil \frac{w}{2} \rceil \right) \\ &= (1 \pm \varepsilon)d \left( \lfloor \frac{u}{2} \rfloor + \lceil \frac{u}{2} \rceil \right) \left( \lfloor \frac{w}{2} \rfloor + \lceil \frac{w}{2} \rceil \right) = (1 \pm \varepsilon)d u w \end{aligned}$$

□

**Lema 37.** Se  $G = (V, E)$  é  $(\varepsilon)$ -uniforme com densidade  $d$ , então  $G$  é  $(2\varepsilon)$ -uniforme<sup>2</sup> com densidade  $d$ . Se  $G = (V, E)$  é  $(\varepsilon)$ -inf-uniforme com densidade  $d$ , então  $G$  é  $(2\varepsilon)$ -inf-uniforme<sup>2</sup> com densidade  $d$ .

*Prova.* Provaremos somente a primeira parte. Tome  $W \subset V$  com  $|W| \geq 2\varepsilon|V|$ . Seja  $w = |W|$ . Dizemos que  $(W_1, W_2)$  é uma bipartição equilibrada de  $W$  se  $W_1 \cup W_2 = W$  e  $|W_1| = \lfloor w/2 \rfloor$  e  $|W_2| = \lceil w/2 \rceil$ .

Pela equação 3.1, temos que

$$e_G(W) = \frac{\binom{\lfloor w/2 \rfloor}{\lfloor \frac{w-2}{2} \rfloor}}{2 \binom{\lfloor w/2 \rfloor}{\lfloor \frac{w-2}{2} \rfloor}} (1 \pm \varepsilon)d \lfloor \frac{w}{2} \rfloor \lceil \frac{w}{2} \rceil = (1 \pm \varepsilon)d \binom{w}{2},$$

que é muito semelhante a equação 3.2. □

### 3.4 Hipergrafos uniformes

Em 2003, Mubayi e Rödl [51] generalizaram para hipergrafos uniformes o Teorema 27 de Duke e Rödl sobre testemunhas pequenas. Na verdade, provaram um resultado mais forte sobre homomorfismos.

Na prova desse resultado, foi obtido um outro resultado de herança de uniformidade para hipergrafos, semelhante aos apresentados para grafos, mas ligeiramente diferente.

Representaremos um  $l$ -grafo com  $n$  vértices por  $\mathcal{H}_n^{(l)}$ . Dizemos que um  $\mathcal{H}_n^{(l)}$  é  $(\alpha, \xi)$ -uniforme se todo subgrafo induzido com  $\xi n$  vértices possui  $(\alpha \pm \xi) \binom{\xi n}{l}$  hiperarestas.

**Lema 38 (Herança de uniformidade para hipergrafos).** *Fixe  $0 < \alpha < 1$  e  $l \geq 2$ . Para todo  $\tilde{\delta}$ , existe  $r_0$  tal que, para todo  $r > r_0$ , existem  $\delta, n_0$  tais que ocorre o seguinte: Se  $\mathcal{H}_n^{(l)}$ , com  $n > n_0$ , é  $(\alpha, \delta)$ -uniforme, então todos, exceto  $e^{-r^{1/l}/20} \binom{n}{r}$ ,  $r$ -conjuntos de vértices de  $\mathcal{H}_n^{(l)}$  induzem um sub-hipergrafo  $(\alpha, \tilde{\delta})$ -uniforme.*

Observe inicialmente que, ao invés dos resultados de herança de uniformidade para grafos, não há o fator  $\beta$  que representa o erro e que poderíamos fazer suficientemente pequeno segundo as necessidades do problema. Aqui o erro é exponencialmente pequeno, mas bem maior do que os casos anteriores, “super-exponencialmente” pequenos. Acreditamos ser possível melhorar este resultado. Nas próximas seções, apresentamos um “roteiro” de como poderia ser a prova desta melhoria para erro “super-exponencialmente” pequeno.

Note ainda que se o teorema vale para  $\delta$ , então ele também vale para todo  $\delta' < \delta$ , já que um hipergrafo  $(\alpha, \delta')$ -uniforme é também  $(\alpha, \delta)$ -uniforme. Para a aplicação da próxima seção, por exemplo, vamos querer que  $\delta \ll 1/r^r$ .

Note também que quanto menor  $\tilde{\delta}$ , maior deve ser  $r_0$ , ou seja,  $r_0 \rightarrow \infty$  quando  $\tilde{\delta} \rightarrow 0$ . Caso contrário, poderíamos escolher  $\tilde{\delta}$  tal que  $\tilde{\delta} r_0 < l$  e  $\tilde{\delta} < \alpha$ , fazendo com que nenhum  $r_0$ -conjunto  $R$  possa ser  $(\alpha, \tilde{\delta})$ -uniforme, pois todo subconjunto de  $R$  de tamanho  $\tilde{\delta} r_0 < l$  não induz arestas, mas deveria ter densidade pelo menos  $\alpha - \tilde{\delta} > 0$ .

Como mencionado, o Lema 38 é utilizado para provar o Teorema 39 abaixo (testemunha para hipergrafos), que apresenta elementos muito semelhantes à prova do Teorema 31 (testemunha para grafos esparsos), apesar de envolver homomorfismo.

Um  $l$ -grafo  $\mathcal{H}$  possui um homomorfismo para o  $l$ -grafo  $\mathcal{F}$  se existe uma função  $f : V(\mathcal{H}) \rightarrow V(\mathcal{F})$  tal que se  $\{v_1, \dots, v_l\}$  é uma hiperaresta de  $\mathcal{H}$ , então  $\{f(v_1), \dots, f(v_l)\}$  é uma hiperaresta de  $\mathcal{F}$ . Todo grafo bipartido, para

exemplo de  $l = 2$ , possui homomorfismo para uma aresta.

**Teorema 39 (Testemunha pequena para hipergrafos).** *Seja  $\varepsilon > 0$  e  $\mathcal{F}$  um  $l$ -grafo fixo. Então existem  $n_0$  e  $r$  tais que ocorre o seguinte: Seja  $\mathcal{H}$  um  $l$ -grafo, com  $n > n_0$  vértices e  $m$  hiperarestas, tal que todo  $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ , com pelo menos  $m - \varepsilon n^l$  hiperarestas, não admite homomorfismo para  $\mathcal{F}$ . Então, existe  $J \subseteq \mathcal{H}$ , com no máximo  $r$  vértices, que também não admite homomorfismo para  $\mathcal{F}$ .*

*Prova.* Seja  $\varepsilon > 0$  e  $\mathcal{F}$  um  $l$ -grafo fixo. Aplique o Lema 38, herança de regularidade para hipergrafos, com entrada  $\delta < 1/|V(\mathcal{F})|$  e saída  $\delta$ ,  $r$  e  $n'_0$ , onde podemos assumir que  $\delta \ll \varepsilon$  e  $r \gg 1/\varepsilon$ .

Seja  $t_0 \gg \max\{|V(\mathcal{F})|, 1/\delta\}$ . Aplique o Teorema 15, versão simples do lema da regularidade para hipergrafos, com entrada  $\delta$  e  $t_0$ , e com saída  $T$  e  $n_0$ , onde podemos assumir que  $n_0 > n'_0$ .

Seja  $\mathcal{H}$  um  $l$ -grafo com  $n > n_0$  vértices e  $m$  arestas. Suponha que todo  $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ , com pelo menos  $m - \varepsilon n^l$  hiperarestas, não admite homomorfismo para  $\mathcal{F}$ .

Como  $|V(\mathcal{H})| \geq n_0$ ,  $\mathcal{H}$  admite uma partição  $\delta$ -regular  $V(\mathcal{H}) = V_0 \cup \dots \cup V_t$ , com  $t_0 \leq t \leq T$ , onde  $|V_0| \leq \delta n$  e  $|V_1| = \dots = |V_t| = s \leq n/t$ .

Pela aplicação da versão  $l$ -partida do Lema 38 (Lema 41), temos que toda  $l$ -upla  $\{V_{i_1}, \dots, V_{i_l}\}$   $\delta$ -regular com densidade  $\alpha \geq \varepsilon/2$  é tal que todas, exceto  $e^{-r^{1/l}/20} \binom{s}{r}^l$ ,  $l$ -uplas  $\{\tilde{V}_{i_1}, \dots, \tilde{V}_{i_l}\}$  de  $r$ -conjuntos  $\tilde{V}_{i_j} \in V_{i_j}$ ,  $|\tilde{V}_{i_j}| = r$ , são  $(\alpha, \tilde{\delta})$ -uniformes.

Consequentemente, se escolhermos aleatoriamente um  $r$ -conjunto  $\tilde{V}_i$  de cada  $V_i$ ,  $1 \leq i \leq t$ , então o número esperado de  $l$ -uplas (formadas por  $l$  desses  $t$   $r$ -conjuntos) que não são  $(\alpha, \tilde{\delta})$ -uniformes é no máximo  $e^{-r^{1/l}/20} \binom{t}{l}$ . Portanto, existe uma escolha de  $r$ -conjuntos  $V'_i$  de cada  $V_i$ ,  $1 \leq i \leq t$ , tal que todas, exceto no máximo  $2e^{-r^{1/l}/20} \binom{t}{l}$ ,  $l$ -uplas desses  $r$ -conjuntos são  $(\alpha, \tilde{\delta})$ -uniformes. Fixe tal escolha desses  $r$ -conjuntos  $V'_i \subset V_i$ .

Remova de  $\mathcal{H}$  toda  $l$ -aresta com algum vértice de  $V_0$ , ou que possui 2 vértices de uma mesma parte  $V_i$ , ou que pertence a uma  $l$ -upla  $V_{i_1}, \dots, V_{i_l}$   $\delta$ -irregular, ou  $\delta$ -regular com densidade menor que  $\varepsilon/2$ . É fácil ver que o número de arestas removidas de  $\mathcal{H}$  é no máximo  $(\varepsilon/2)n^l$ .

Remova também de  $\mathcal{H}$  toda  $l$ -aresta que pertence a uma  $l$ -upla  $V_{i_1}, \dots, V_{i_l}$  cujos  $r$ -conjuntos  $V'_{i_1}, \dots, V'_{i_l}$  selecionados formam uma  $l$ -upla que não é  $(\alpha, \tilde{\delta})$ -uniforme. É fácil ver que o número de arestas removidas aqui é no máximo  $2e^{-r^{1/l}/20} \binom{t}{l} s^l < (\varepsilon/2)n^l$ , tomando  $r \gg 1/\varepsilon$ .

Portanto, no total, são removidas no máximo  $\varepsilon n^l$  hiperarestas de  $\mathcal{H}$  e, por hipótese, o  $l$ -grafo  $\mathcal{H}'$  resultante não admite homomorfismo para  $\mathcal{F}$ .

Além disso,  $\mathcal{H}'$  é tal que toda  $l$ -upla  $\{V_{i_1}, \dots, V_{i_l}\}$  é  $(\alpha, \tilde{\delta})$ -uniforme ou não possui hiperarestas.

Seja  $J$  o sub-hipergrafo de  $\mathcal{H}'$  induzido sobre  $V_1', \dots, V_t'$ . Por contradição, suponha que  $J$  possui homomorfismo para  $\mathcal{F}$ . Seja  $f : V(J) \rightarrow V(\mathcal{F})$  a função de homomorfismo. Mostraremos que é possível estender essa função de homomorfismo de  $J$  para uma de  $\mathcal{H}'$ , o que contradiz o fato de  $\mathcal{H}'$  não possuir homomorfismo para  $\mathcal{F}$ .

Para  $i = 1, \dots, t$ , seja  $f_i$  o vértice de  $\mathcal{F}$  com maior número de vértices  $v_i' \in V_i'$  tais que  $f(v_i') = f_i$ . Seja  $F_i \subseteq V_i'$  o conjunto dos vértices  $v_i' \in V_i'$  tais que  $f(v_i') = f_i$ . Note que  $|F_i| \geq |V_i'|/|V(\mathcal{F})| \geq \tilde{\delta}r$ , para todo  $1 \leq i \leq t$ .

Assim, como toda  $l$ -upla  $\{V_{i_1}', \dots, V_{i_l}'\}$  é  $(\alpha, \tilde{\delta})$ -uniforme ou não possui hiperarestas, temos que  $\{F_{i_1}, \dots, F_{i_l}\}$  não possui hiperaresta em  $\mathcal{H}'$  se e só se  $\{V_{i_1}', \dots, V_{i_l}'\}$  também não possui e, conseqüentemente, se e só se  $\{V_{i_1}, \dots, V_{i_l}\}$  também não possui.

Logo, podemos estender o homomorfismo de  $J$  em  $\mathcal{F}$  para de  $\mathcal{H}'$  em  $\mathcal{F}$  fazendo  $f(v_i) = f_i$  para todo  $v_i \in V_i$ , pois, se  $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_l}\}$  é uma hiperaresta de  $\mathcal{H}'$ , com  $v_{i_j} \in V_{i_j}$ ,  $\forall 1 \leq j \leq l$ , então  $\{F_{i_1}, \dots, F_{i_l}\}$  também possui hiperaresta (já que  $\{V_{i_1}, \dots, V_{i_l}\}$  possui uma), o que confirma o homomorfismo.

Com isso,  $\mathcal{H}'$  possui homomorfismo para  $\mathcal{F}$ . Contradição. Além disso, o número de vértices de  $\mathcal{H}'$  é  $tr = r'$ , cujo valor não depende de  $n$ .  $\square$

Como antes, o subgrafo  $J$  representa a “testemunha pequena” de  $\mathcal{H}$ . Além disso, para grafos  $l = 2$ , a relação entre “homomorfismo de  $J$  para  $\mathcal{F}$ ” e “ $\chi(J) \leq k$ ” é direta, bastando tomar  $\mathcal{F} = K_k$  (grafo completo com  $k$  vértices). Isso porque se  $\chi(J) \leq k$ , temos uma coloração de  $J$  com  $k$  cores. Podemos fazer então a função  $f$  levar vértices de  $J$  com a mesma cor em um único vértice de  $\mathcal{F}$ . Temos assim um homomorfismo, pois toda aresta  $(v_1, v_2)$  de  $J$  será obviamente entre vértices de cores diferentes  $c_1$  e  $c_2$ , as quais formam uma aresta em  $\mathcal{F}$  completo.

### 3.4.1 Prova da Herança para Hipergrafos de Mubayi e Rödl

Nesta seção, apresentamos um esboço da prova do Lema 38: herança de uniformidade para hipergrafos (de [51]). É uma demonstração complexa, mas que possui elementos que poderão ser melhorados a fim de obter um erro “super-exponencialmente” pequeno, como no caso dos grafos (ao invés de exponencialmente pequeno).

A prova é feita usando hipergrafos “ponderados”, ou seja, com pesos nas hiperarestas. Seja  $\mathcal{H}$  um  $l$ -grafo  $l$ -partido completo com partes  $V_1, \dots, V_l$ . Seja  $w : V_1 \times \dots \times V_l \rightarrow [0, 1]$  uma função peso para as arestas de  $\mathcal{H}$ .



Definimos o peso da  $l$ -upla  $(V_1, \dots, V_l)$  sobre  $w$  como:

$$w(V_1, \dots, V_l) = \sum_{(v_1, \dots, v_l) \in V_1 \times \dots \times V_l} w(v_1, \dots, v_l)$$

A densidade de  $(V_1, \dots, V_l)$  é:

$$d(V_1, \dots, V_l) = \frac{w(V_1, \dots, V_l)}{|V_1| \dots |V_l|}$$

Dizemos que  $w$  é  $\varepsilon$ -regular com densidade  $\alpha = d(V_1, \dots, V_l)$  se para todo  $V'_i \subseteq V_i$  com  $|V'_i| \geq \varepsilon|V_i|$ ,  $1 \leq i \leq l$ , temos que  $d(V'_1, \dots, V'_l) = \alpha \pm \varepsilon$ . Dizemos que  $w$  é  $(\alpha, \varepsilon)$ -uniforme se para todo  $V'_i \subseteq V_i$  com  $|V'_i| \geq \varepsilon|V_i|$ ,  $1 \leq i \leq l$ , temos que  $d(V'_1, \dots, V'_l) = \alpha \pm \varepsilon$ . Existe uma ligeira diferença entre essas duas definições. Na primeira, a densidade fixa  $\alpha$  é a própria densidade de  $(V_1, \dots, V_l)$ . Na segunda, a densidade fixa  $\alpha$  é um número dado e a densidade de  $(V_1, \dots, V_l)$  é  $\alpha \pm \varepsilon$ .

Considere o lema abaixo, que é a versão do lema 38 para  $l$ -grafos ponderados.

**Lema 40.** *Fixe  $0 < \alpha < 1$  e  $l \geq 2$ . Para todo  $\tilde{\delta}$ , existe  $r_0$  tal que, para todo  $r > r_0$ , existem  $\delta, n_0$  tais que ocorre o seguinte: Se  $\mathcal{H}_n^{(l)}$ , com  $n > n_0$ , é um  $l$ -grafo ponderado com função peso  $w$   $(\alpha, \delta)$ -uniforme, então todos, exceto  $e^{-r^{1/l}/20} \binom{n}{r}$ ,  $r$ -conjuntos de vértices de  $\mathcal{H}_n^{(l)}$  induzem um sub-hipergrafo ponderado com função peso  $w'$   $(\alpha, \tilde{\delta})$ -uniforme.*

Seja  $WT(l)$  a afirmação do Lema 40 para  $l$ -grafos e  $UWT(l)$  a afirmação do Lema 38 para  $l$ -grafos.

Tomando uma função peso  $w$  do tipo 0 – 1, temos claramente que:

$$WT(l) \Rightarrow UWT(l).$$

O objetivo é provar por indução que  $WT(l) \Rightarrow WT(l+1)$ . Na verdade, prova-se apenas que  $WT(2) \Rightarrow UWT(3)$ . Depois, estende-se esse resultado para  $WT(2) \Rightarrow WT(3)$ , com alguns argumentos simples. Da mesma forma, com simples argumentos, estende-se esse último resultado para  $WT(l) \Rightarrow WT(l+1)$ , que é o desejado.

Para facilitar, utiliza-se uma versão  $l$ -partida do Lema 40, a saber:

**Lema 41.** *Fixe  $0 < \alpha < 1$  e  $l \geq 2$ . Para todo  $\tilde{\delta}$ , existe  $r_0$  tal que, para todo  $r > r_0$ , existem  $\delta, n_0$  tais que ocorre o seguinte: Se  $\mathcal{H}_n^{(l)} = \mathcal{H}(V_1, \dots, V_l)$  é um  $l$ -grafo  $l$ -partido ponderado com  $|V_i| = n > n_0$ ,  $1 \leq i \leq l$  e com função peso  $w$   $(\alpha, \delta)$ -uniforme, então todas, exceto  $e^{-r^{1/l}/10} \binom{n}{r}^l$ ,  $l$ -uplas  $(V'_1, \dots, V'_l)$ , com*

$V'_i \subseteq V_i$ ,  $|V'_i| = r$ ,  $1 \leq i \leq l$ , induzem um sub-hipergrafo ponderado com função peso  $w'$   $(\alpha, \tilde{\delta})$ -uniforme.

Para podermos utilizá-la, devemos provar que o Lema 41 implica o Lema 40. Como mencionado acima, basta considerar nessas provas o caso não ponderado e  $l = 3$ . Resolve-se isso, provando com certa facilidade que:

- Hipótese do Lema 40 com  $\delta$ ,  $n_0 \Rightarrow$  Hipótese do Lema 41 com  $14\delta$ ,  $n_0/2$
- Conclusão do Lema 40 com  $\tilde{\delta}$ ,  $r$  falha  $\Rightarrow$  Conclusão do Lema 41 com  $\tilde{\delta}/2$ ,  $r/3$  falha

O objetivo agora é provar o Lema 41, seguindo a estratégia indutiva descrita acima. Para provar o caso base da indução, ou seja, o Lema 41 com  $l = 2$ , utiliza-se o resultado abaixo de [1] que equipara regularidade com certas condições sobre os graus dos vértices.

Seja  $G(X, Y)$  um grafo bipartido e  $0 < \varepsilon, \varepsilon', \alpha < 1$ . Seja  $UNI(\varepsilon)$  a afirmação de que  $G$  é  $(\alpha, \varepsilon)$ -uniforme. Seja  $DPC(\varepsilon')$  as seguintes afirmações:

- Todos, exceto  $\varepsilon'|X|$ , vértices de  $X$  tem grau  $(\alpha \pm \varepsilon)|Y|$
- Todos, exceto  $\varepsilon'|X|^2$ , pares de vértices de  $X$  tem vizinhança em comum de tamanho  $(\alpha^2 \pm \varepsilon)|Y|$

O termo  $DPC$  significa “degree and pair condition”. É provado em [1] que  $UNI(\varepsilon)$  e  $DPC(\varepsilon')$  são “equivalentes”.

**Fato 42.** *Equivalência entre DPC e UNI [1]:*

- $\forall \varepsilon, \exists \varepsilon', n_0, \forall \alpha$ : Se  $\min\{|X|, |Y|\} > n_0$  então  $DPC(\varepsilon') \Rightarrow UNI(\varepsilon)$
- $\forall \varepsilon', \exists \varepsilon, n_0, \forall \alpha$ : Se  $\min\{|X|, |Y|\} > n_0$  então  $UNI(\varepsilon) \Rightarrow DPC(\varepsilon')$

Porém, para o nosso caso, utilizamos grafos ponderados, sendo necessário passar esses conceitos para o caso ponderado. Sejam  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  e  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ . Seja  $w : A \times B \rightarrow [0, 1]$  uma função peso. Sejam  $w_{i,j} = w(a_i, b_j)$  e  $\vec{w}_i = \{w_{i,1}, \dots, w_{i,n}\}$ . Em analogia,  $\sum_{j=1}^n w_{i,j}$  representa o grau de  $a_i$  em  $A$ , para  $w$  do tipo 0 – 1. Seja  $\alpha = \sum_{i,j} w_{i,j}/n^2$ , que, para  $w$  do tipo 0 – 1, representa a densidade do grafo.

Assim, seja  $UNI(\delta)$  a afirmação de que  $w$  é  $(\alpha, \delta)$ -uniforme. Seja agora  $DPC(\delta')$  a afirmação de que todos, exceto  $\delta'n^2$ , pares  $i, j \in [n]$  tem produto escalar  $\vec{w}_i \vec{w}_j = (\alpha \pm \delta')^2 n$ .

Prova-se então no próprio artigo ([51]) com certa facilidade que  $UNI(\delta)$  e  $DPC(\delta')$  são “equivalentes”, ou seja:

- $\forall \delta, \exists \delta', n_0, \forall \alpha, \forall n > n_0: DPC(\delta') \Rightarrow UNI(\delta)$
- $\forall \delta', \exists \delta, n_0, \forall \alpha, \forall n > n_0: UNI(\delta) \Rightarrow DPC(\delta')$

Além desse resultado, são provados ainda, com certa dificuldade, dois lemas auxiliares de grande importância, chamados “lemas hipergeométricos”, a saber:

**Lema 43.**  $\forall c, \varepsilon, \exists r_0, n_0, \forall r > r_0, n > n_0$ : Se  $\sum_{i \in [n]} x_i = cn$ , para  $0 \leq x_i \leq 1$ , então todos, exceto  $e^{-\sqrt{r}/2} \binom{n}{r}$ ,  $r$ -conjuntos  $R \subset [n]$ ,  $|R| = r$ , satisfazem  $\sum_{i \in R} x_i = (c \pm \varepsilon)r$ .

*Idéia da Prova.* A prova é longa, mas basicamente particiona os elementos  $x_i$  em intervalos e aplica desigualdades de grandes desvios para distribuição binomial e hipergeométricas a cada intervalo que tem uma proporção grande dos  $x_i$ 's.  $\square$

**Lema 44.** Fixe  $k \geq 2$ .  $\forall \beta, \exists r_0, n_0, \forall r > r_0, n > n_0$ : Seja  $G$  um grafo ponderado com  $n$  vértices, peso total (soma dos pesos das arestas)  $\leq \beta n^k$ , máximo grau ponderado  $\leq n^{k-1}$  e peso máximo  $\leq n^{k-2}$ . Então todos, exceto  $2e^{-\sqrt{r}/2} \binom{n}{r}$ ,  $r$ -conjuntos de vértices induzem um subgrafo com peso total  $\leq 2\beta n^{k-2} r^2$ .

*Idéia da Prova.* Aplicações sucessivas do Lema 43.  $\square$

Finalmente, podemos provar o Lema 41 para grafos ( $l = 2$ ), ou seja, o caso base da indução.

**Lema 45.** Fixe  $0 < \alpha < 1$ . Para todo  $\tilde{\delta}$ , existe  $r_0$  tal que, para todo  $r > r_0$ , existem  $\delta, n_0$  tais que ocorre o seguinte: Se  $G = G(A, B)$  é um grafo bipartido ponderado com  $|A| = |B| = n > n_0$  e com função peso  $w$  ( $\alpha, \delta$ )-uniforme, então todos, exceto  $e^{-\sqrt{r}/10} \binom{n}{r}^2$ , pares  $\{A', B'\}$ , onde  $A' \subseteq A$ ,  $B' \subseteq B$ ,  $|A'| = |B'| = r$ , induzem um subgrafo ponderado com função peso  $w'$  ( $\alpha, \tilde{\delta}$ )-uniforme.

*Esboço da prova.* Tome  $\tilde{\delta} \gg \delta'' \geq \delta' \gg \delta$ , com  $\tilde{\delta} \rightarrow 0$  quando  $\delta \rightarrow 0$ . Como  $w$  é ( $\alpha, \delta$ )-uniforme,  $G$  satisfaz  $DPC(\delta')$ .

Seja  $G_A$  um grafo auxiliar com  $V(G_A) = A$  e arestas consistindo dos pares  $i, j$  excepcionais em  $DPC(\delta')$ . Logo,  $G_A$  tem  $\leq \delta' n^2$  arestas.

Aplice o Lema 44 com  $\beta = \delta'$  e  $k = 2$ . Então todos, exceto  $2e^{-\sqrt{r}/2} \binom{n}{r}$ ,  $r$ -conjuntos de vértices  $A' \subseteq A$ , com  $|A'| = r$ , induzem  $\leq 2\delta' r^2$  arestas de  $G_A$ . Fixe um tal  $A'$ .

Nosso objetivo é provar que para a maioria dos  $r$ -conjuntos  $B' \subseteq B$ , com  $|B'| = r$ , o par  $A', B'$  satisfaz  $DPC(\delta'')$  com  $\delta'' = 3\delta'$ . Com isso, a função  $w$  restrita a  $A' \cup B'$  seria  $(\alpha, \tilde{\delta})$ -uniforme, como desejado.

Fixe então um par  $\{i, i'\}$ , onde  $i, i' \in A'$ , tal que não é aresta de  $G_A$  (ou seja,  $\{i, i'\}$  não é excepcional). Para todo  $j \in B$ , seja  $x_j = w_{i,j}w_{i',j}$ . Pela escolha de  $\{i, i'\}$ , temos que:

$$\sum_{j \in B} x_j = \sum_{j \in B} w_{i,j}w_{i',j} = \vec{w}_i \vec{w}_{i'} = (\alpha \pm \delta')^2 n.$$

Aplicue o Lema 43, com  $c = (\alpha \pm \delta')^2$  e  $\varepsilon = \delta'$ . Então todos, exceto  $e^{-\sqrt{r}/2} \binom{n}{r}$ ,  $r$ -conjuntos  $B' \subseteq B$ , com  $|B'| = r$ , satisfazem

$$\sum_{j \in B'} x_j = (c \pm \varepsilon)r = ((\alpha \pm \delta')^2 \pm \delta')r = (\alpha \pm 3\delta')^2 r. \quad (3.4)$$

Portanto, contabilizando o máximo de escolhas possíveis de  $\{i, i'\}$ , temos que todos, exceto  $\binom{r}{2} e^{-\sqrt{r}/2} \binom{n}{r} < e^{-\sqrt{r}/3} \binom{n}{r}$ ,  $r$ -conjuntos  $B' \subseteq B$ , com  $|B'| = r$ , satisfazem (3.4) para todas as escolhas de  $\{i, i'\} \in [A']^2 - E(G_A)$ .

Assim, contabilizando os conjuntos  $A'$  ruins com quaisquer  $B'$  mais os  $B'$  ruins com quaisquer  $A'$ , temos que o número de escolhas de  $A', B'$  que não satisfazem  $DPC(\delta'')$  é no máximo

$$2e^{-\sqrt{r}/2} \binom{n}{r}^2 + e^{-\sqrt{r}/3} \binom{n}{r}^2 < e^{-\sqrt{r}/10} \binom{n}{r}^2,$$

□

Provado o caso base da indução ( $l = 2$ ), passaremos à prova do passo da indução, que, como já mencionado, será para hipergrafos não ponderados e para  $l = 3$ , a saber:

**Lema 46.** *Fixe  $0 < \alpha < 1$ . Para todo  $\tilde{\delta}$ , existe  $r_0$  tal que, para todo  $r > r_0$ , existem  $\delta, n_0$  tais que ocorre o seguinte: Se  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(A, B, C)$  é um 3-grafo 3-partido  $(\alpha, \delta)$ -uniforme com  $|A| = |B| = |C| = n > n_0$ , então todos, exceto  $e^{-r^{1/3}/10} \binom{n}{r}^3$ , triplas  $\{A', B', C'\}$ , onde  $A' \subseteq A$ ,  $B' \subseteq B$ ,  $C' \subseteq C$ ,  $|A'| = |B'| = |C'| = r$ , induzem um sub-hipergrafo  $\mathcal{H}' = \mathcal{H}'(A', B', C')$   $(\alpha, \tilde{\delta})$ -uniforme.*

*Esboço da prova.* Não entraremos em detalhes, pois a prova é muito longa e técnica. Apresentamos apenas as linhas gerais. Teremos a seguinte hierarquia de constantes:

$$\alpha \gg \tilde{\delta} \gg \tilde{\delta}^{(2)} \gg \varepsilon'' \gg \varepsilon' \gg \varepsilon \gg 1/t \gg 1/r \gg \delta \gg 1/n. \quad (3.5)$$

Fixe  $\alpha$  e  $\tilde{\delta}$ . Seja  $\Gamma = (A \times B, C)$  um grafo bipartido com  $E(\Gamma) = \{(a, b, c) : (a, b, c) \in E(\mathcal{H}), a \in A, b \in B, c \in C\}$ . Temos que  $\Gamma$  tem a mesma densidade de  $\mathcal{H}$ , igual a  $\alpha$ .

PASSO 1: Aplique o Lema da regularidade de Szemerédi sobre  $\Gamma$  com entrada  $\varepsilon > 0$  escolhida apropriadamente e saída  $n_0$  e  $t$ . Obtemos então um particionamento

$$A \times B = G_1 \cup \dots \cup G_t, |G_i| = n^2/t, 1 \leq i \leq t$$

$$C = C_1 \cup \dots \cup C_t, |C_j| = n/t, 1 \leq j \leq t$$

tal que todos, exceto  $\varepsilon t^2$ , pares  $G_i, C_j$  são  $\varepsilon$ -regulares.

Para todo  $1 \leq j \leq t$ , considere o grafo ponderado  $H_j(A, B)$  com função peso  $w_j$ , onde  $w_j(a, b)$  é o número de vértices  $c \in C_j$  tal que  $\{a, b, c\} \in \mathcal{H}$ , ou seja:

$$w_j(a, b) = |\{c \in C_j : (a, b, c) \in \mathcal{H}\}|.$$

PASSO 2: Fixe  $\tilde{\delta}^{(2)} \gg \tilde{\delta}$ . Aplique a hipótese de indução  $WT(2)$ , Lema 45, sobre  $H_j(A, B)$ . Temos então que a “maioria” (exceto  $e^{-\sqrt{r}/10} \binom{n}{r}^2$ ) dos  $r$ -conjuntos  $A', B'$ , com  $A' \subset A, B' \subset B, |A'| = |B'| = r$ , são tais que  $w_j$  restrito a  $A' \cup B'$  é  $(\alpha, \tilde{\delta}^{(2)})$ -uniforme.

Ou seja,  $d(A'', B'', C_j) = d_{H_j(A, B)}(A'', B'') = \alpha \pm \tilde{\delta}^{(2)}$ , para todo  $A'' \subset A', |A''| \geq \tilde{\delta}^{(2)}|A'|$ , e  $B'' \subset B', |B''| \geq \tilde{\delta}^{(2)}|B'|$ .

Como  $WT(2)$  continua verdadeiro para  $\delta$  menor e  $r$  maior, escolhe-se  $\delta$  e  $r$  satisfazendo (3.5).

Seja  $\Gamma_{i,j}$  o subgrafo de  $\Gamma$  induzido por  $G_i \cup C_j$ . Seja  $\Gamma_{i,j}(A' \times B') \subset \Gamma_{i,j}$  o subgrafo induzido por  $[G_i \cap (A' \times B')] \cup C_j$ .

PASSO 3: Escolhe-se  $\varepsilon'$  apropriadamente. Prova-se então, com certa dificuldade, que para a “maioria” (exceto  $2e^{-\sqrt{r}/2} \binom{n}{r}^2$ ) dos pares  $A', B'$ ,  $A' \subset A, B' \subset B, |A'| = |B'| = r$ , temos que  $\Gamma_{i,j}(A' \times B')$  satisfaz  $DPC(3\varepsilon')$  para a “maioria” dos  $i, j$ .

Fixe  $A', B'$  satisfazendo os passos acima. Seja  $\Gamma_{i,j}(A' \times B', C')$  o subgrafo de  $\Gamma_{i,j}(A' \times B')$  apenas com arestas que intersectam um subconjunto  $C' \subset C$  dado.

PASSO 4: Escolhe-se  $\varepsilon'' \gg \tilde{\delta}^{(2)}$  apropriado. Prova-se então com certa dificuldade em 3 lemas auxiliares que para a maioria (exceto  $e^{-\sqrt{r}/3} \binom{n}{r}$ ) dos  $r$ -conjuntos  $C' \subset C, |C'| = r$ , temos que  $\Gamma_{i,j}(A' \times B', C')$  é  $(\alpha_{i,j}, \varepsilon'')$ -uniforme. Fixe um tal  $C' \subset C$  satisfazendo isso.

PASSO 5: Finalmente, prova-se, com muito esforço, que  $d(A', B', C') = \alpha \pm \tilde{\delta}$ , ou seja, que  $\mathcal{H}(A', B', C')$  é  $(\alpha, \tilde{\delta})$ -uniforme.  $\square$

O Lema 46 anterior prova que  $WT(2) \Rightarrow UWT(3)$ , e o Lema 45 prova  $WT(2)$ . No entanto, é necessário provar que  $WT(l) \Rightarrow WT(l+1)$ . Na verdade, prova-se apenas que  $WT(l) \Rightarrow UWT(l+1)$ , pois segundo as palavras dos próprios autores [51]: “*Estender o resultado para o caso ponderado é essencialmente idêntico a prova para o caso não ponderado. É necessário apenas adicionar notação que não conta apenas arestas, mas conta arestas baseadas nos seus pesos*”.

A estratégia para provar que  $WT(l) \Rightarrow UWT(l+1)$ , para  $l > 2$ , é basicamente alterar a notação do Lema 46, substituindo:

- $A, B$  por  $A_1, \dots, A_l$ ,
- $C$  por  $A_{l+1}$ ,
- $A \times B$  por  $A_1 \times \dots \times A_l$ ,

e igualmente para  $A', B'$  e  $C'$ , a fim de provar o seguinte lema.

**Lema 47.** *Fixe  $0 < \alpha < 1$ . Para todo  $\tilde{\delta}$ , existe  $r_0$  tal que, para todo  $r > r_0$ , existem  $\delta, n_0$  tais que ocorre o seguinte: Se  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(A_1, \dots, A_{l+1})$  é um  $(l+1)$ -grafo  $(l+1)$ -partido  $(\alpha, \delta)$ -uniforme com  $|A_1| = \dots = |A_{l+1}| = n > n_0$ , então todos, exceto  $e^{-r^{1/(l+1)}/10} \binom{n}{r}^{l+1}$ ,  $(l+1)$ -uplas  $\{A'_1, \dots, A'_{l+1}\}$ , onde  $A'_i \subseteq A_i$ ,  $1 \leq i \leq l+1$ ,  $|A'_1| = \dots = |A'_{l+1}| = r$ , induzem um sub-hipergrafo  $\mathcal{H}' = \mathcal{H}'(A'_1, \dots, A'_{l+1})$   $(\alpha, \tilde{\delta})$ -uniforme.*

Cabe aqui uma observação final. Já comentamos que o erro desse resultado de herança é exponencialmente pequeno, e não “super-exponencialmente” pequeno, como nas heranças para grafos. Os resultados importantes acima que fecham a prova são dois:  $WT(2)$  e  $WT(2) \Rightarrow UWT(3)$ . Se estes dois resultados fossem provados com erro “super-exponencialmente” pequeno, poderíamos obter o resultado final com tal erro, seguindo o mesmo roteiro.

Abaixo a conjectura para  $WT(2)$  “super-exponencial”. Acreditamos que sua prova possa ser obtida com técnicas similares utilizadas em [14], [29] e [51].

**Conjectura 48.** *Fixe  $0 < \alpha < 1$ . Para todo  $\beta, \tilde{\delta}$ , existe  $r_0$  tal que, para todo  $r > r_0$ , existem  $\delta, n_0$  tais que ocorre o seguinte: Se  $G = G(A, B)$  é um grafo bipartido ponderado com  $|A| = |B| = n > n_0$  e com função peso  $w$   $(\alpha, \delta)$ -uniforme, então todos, exceto  $(1 - \beta^r) \binom{n}{r}^2$ , pares  $\{A', B'\}$ , onde  $A' \subseteq A$ ,  $B' \subseteq B$ ,  $|A'| = |B'| = r$ , induzem um subgrafo ponderado com função peso  $w'$   $(\alpha, \tilde{\delta})$ -uniforme.*

Abaixo a conjectura para  $WT(2) \Rightarrow UWT(3)$  “super-exponencial”.

**Conjectura 49.** Fixe  $0 < \alpha < 1$ . Para todo  $\beta, \tilde{\delta}$ , existe  $r_0$  tal que, para todo  $r > r_0$ , existem  $\delta, n_0$  tais que ocorre o seguinte: Se  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(A, B, C)$  é um 3-grafo 3-partido  $(\alpha, \delta)$ -uniforme com  $|A| = |B| = |C| = n > n_0$ , então todos, exceto  $(1 - \beta^r) \binom{n}{r}^3$ , triplas  $\{A', B', C'\}$ , onde  $A' \subseteq A, B' \subseteq B, C' \subseteq C, |A'| = |B'| = |C'| = r$ , induzem um sub-hipergrafo  $\mathcal{H}' = \mathcal{H}'(A', B', C')$   $(\alpha, \tilde{\delta})$ -uniforme.

As conjecturas acima provam a conjectura final abaixo com erro “super-exponencialmente” pequeno.

**Conjectura 50.** Fixe  $0 < \alpha < 1$  e  $l \geq 2$ . Para todo  $\beta, \tilde{\delta}$ , existe  $r_0$  tal que, para todo  $r > r_0$ , existem  $\delta, n_0$  tais que ocorre o seguinte: Se  $\mathcal{H}_n^{(l)}$ , com  $n > n_0$ , é  $(\alpha, \delta)$ -uniforme, então todos, exceto  $(1 - \beta^r) \binom{n}{r}$ ,  $r$ -conjuntos de vértices de  $\mathcal{H}_n^{(l)}$  induzem um sub-hipergrafo  $(\alpha, \tilde{\delta})$ -uniforme.

### 3.4.2 Melhoria de Czygrinow e Nagle para 3-grafos

Recentemente, Czygrinow e Nagle [12] melhoraram o erro da herança do Lema 38 de Mubayi e Rödl para  $e^{-cr} \binom{n}{r}$ , para uma constante  $c$ , no caso de 3-grafos.

**Lema 51 (Melhoria na herança para 3-grafos).** Fixe  $0 < \alpha < 1$ . Para todo  $\tilde{\delta}$ , existem  $\delta_0, c, K_0$  tais que, para todo  $0 < \delta \leq \delta_0$ , existe  $n_0$  tal que todo 3-grafo 3-partido  $\mathcal{H}(V_1, V_2, V_3)$   $(\alpha, \delta)$ -uniforme,  $|V_i| = n_i > n_0$ , então, se  $K_0 \leq k_i \leq n_i, 1 \leq i \leq 3$ , todos exceto

$$\exp\{-c \min\{k_1, k_2, k_3\}\} \binom{n_1}{k_1} \binom{n_2}{k_2} \binom{n_3}{k_3}$$

triplas de conjuntos  $W_i \in \binom{V_i}{k_i}, 1 \leq i \leq 3$ , induzem um 3-grafo  $\mathcal{H}[W_1, W_2, W_3]$   $(d, \tilde{\delta})$ -uniforme.

A prova desse herança utiliza três pontos principais: uma configuração de 3-grafos sobre grafos, um lema de herança forte de  $(\alpha, \delta)$ -minimalidade e um novo lema da regularidade para hipergrafos proposto recentemente por Haxell, Nagle e Rödl [37], aplicado para o caso de 3-grafos, onde se contam cópias do  $K_{2,2,2}^{(3)}$ , o 3-grafo 3-partido com 6 vértices e 8 triplas.

Fixe  $\alpha, d, \varepsilon$ .

**Configuração 52.** Seja  $\mathcal{H}$  um 3-grafo 3-partido e  $P = P^{12} \cup P^{23} \cup P^{13}$  um grafo 3-partido satisfazendo as seguintes condições:

- $\mathcal{H}$  e  $P$  possuem a mesma partição  $(V_1, V_2, V_3)$ ,  $|V_i| = n_i, 1 \leq i \leq 3$

- $P_{ij}$  é  $(d, \varepsilon)$ -uniforme, para cada  $1 \leq i < j \leq 3$
- $P$  dá suporte a  $\mathcal{H}$ , ou seja, toda hiperaresta de  $\mathcal{H}$  é triângulo em  $P$
- $d_{\mathcal{H}}(P) = |\mathcal{H}|/|K_3^2(P)| = \alpha$ .

Seja  $K_3^2(P)$  o conjunto dos triângulos de  $P$ . Seja  $K_{2,2,2}^{(3)}$  o 3-grafo 3-partido com 6 vértices e 8 triplas. Seja  $K_{2,2,2}^{(3)}(\mathcal{H})$  o conjunto das cópias de  $K_{2,2,2}^{(3)}$  em  $\mathcal{H}$ . Dizemos que  $\mathcal{H}$  é  $(\alpha, \delta, d)$ -minimal se

$$|K_{2,2,2}^{(3)}(\mathcal{H})| \leq \alpha^8 d^{12} \binom{|V_1|}{2} \binom{|V_2|}{2} \binom{|V_3|}{2} (1 + \delta).$$

Em [12], é provado com facilidade que

$$|K_{2,2,2}^{(3)}(\mathcal{H})| \geq \alpha^8 d^{12} \binom{n_1}{2} \binom{n_2}{2} \binom{n_3}{2} (1 - \varepsilon^{1/10}). \quad (3.6)$$

**Lema 53 (Herança forte de  $(\alpha, \delta, d)$ -minimalidade).** *Existe  $\delta_0$  tal que para todo  $\alpha$ ,  $0 < \delta < \delta_0$ ,  $d$ , existe  $\varepsilon_0$  tal que, para todo  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , existe  $c > 0$  e inteiros  $K_0$  e  $n_0$  tais que, se  $\mathcal{H}$  e  $P$  satisfazem a Configuração 52 com constantes  $\alpha, d, \varepsilon$  e  $n_i > n_0$ , então, se  $K_0 \leq k_i \leq n_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , todos exceto*

$$\exp\{-c \min\{k_1, k_2, k_3\}\} \binom{n_1}{k_1} \binom{n_2}{k_2} \binom{n_3}{k_3}$$

*triplas de conjuntos  $W_i \in \binom{V_i}{k_i}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , induzem um 3-grafo  $\mathcal{H}[W_1, W_2, W_3]$  e um grafo  $P(W_1, W_2, W_3)$  satisfazendo:*

- $P^{ij}[W_i, W_j]$  é  $(d, \varepsilon^{1/216})$ -uniforme,  $1 \leq i < j \leq 3$
- $\mathcal{H}[W_1, W_2, W_3]$  tem densidade  $d_{\mathcal{H}(W_1, W_2, W_3)}(P[W_1, W_2, W_3]) = \alpha \pm \delta$
- Se  $\mathcal{H}$  é  $(\alpha, \delta, d)$ -minimal com respeito a  $P$ , então  $\mathcal{H}(W_1, W_2, W_3)$  é  $(\alpha \pm \delta, 2\delta^{1/300000}, d)$ -minimal com respeito a  $P(W_1, W_2, W_3)$ .

Na prova do Lema 53, são utilizados dois resultados importantes: um sobre herança fraca de  $(\alpha, \delta, d)$ -minimalidade e outro sobre caracterização local de 3-grafos  $(\alpha, \delta, d)$ -minimais, abaixo descritos.

**Lema 54 (Herança fraca de  $(\alpha, \delta, d)$ -minimalidade).** *Para todo  $\alpha, \tilde{\delta}$ , existe  $\delta_0$  tal que para todo  $0 < \delta < \delta_0$ ,  $d$ , existe  $\varepsilon_0$  tal que, para todo  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , existe  $n_0$  tal que, se  $\mathcal{H}$  e  $P$  satisfazem a Configuração 52 com constantes  $\alpha, d, \varepsilon$  para  $n_i > n_0$  e  $\mathcal{H}$  é  $(\alpha, \delta)$ -minimal com respeito a  $P$ , então para quaisquer  $W_i \in V_i$ ,  $|W_i| \geq \delta^{1/10} n_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , vale que:*



- $P^{ij}[W_i, W_j]$  é  $(d, \varepsilon/\delta^{1/1000})$ -uniforme,  $1 \leq i < j \leq 3$
- $\mathcal{H}[W_1, W_2, W_3]$  tem densidade  $d_{\mathcal{H}(W_1, W_2, W_3)}(P[W_1, W_2, W_3]) = \alpha \pm \tilde{\delta}$
- $\mathcal{H}(W_1, W_2, W_3)$  é  $(\alpha \pm \tilde{\delta}, \tilde{\delta}, d)$ -minimal com respeito a  $P(W_1, W_2, W_3)$

Para a caracterização local, define-se o grafo de ligação  $L_x$  de um vértice  $x \in V(\mathcal{H}) = V(P)$  como  $L_x = \{\{y, z\} \in P : \{x, y, z\} \in \mathcal{H}\}$ . O grafo de coligação  $L_{xy}$  de um par de vértices  $x, y \in V(\mathcal{H}) = V(P)$  é definido como  $L_{xy} = L_x \cap L_y$ . Seja  $K_{2,2}^{(2)}(P^{12})$  o conjunto de cópias do grafo  $K_{2,2}^{(2)} = C_4$  em  $P^{12}$ , ou seja, o conjunto de quádruplas  $\{x, y, a, b\}$ ,  $x, y \in V_1$ ,  $a, b \in V_2$ , que induzem um  $K_{2,2}^{(2)}$  em  $P^{12}$ .

Define-se com isso as afirmações  $\mathbf{S}_1(\delta_1)$  e  $\mathbf{S}_2(\delta_2)$  para  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{P}$  segundo a Configuração 52:

- $\mathbf{S}_1(\delta_1)$  :  $\mathcal{H}$  é  $(\alpha, \delta_1, d)$ -minimal com respeito a  $P$
- $\mathbf{S}_2(\delta_2)$  : todas exceto  $\delta_2 |K_{2,2}^{(2)}(P^{12})|$  cópias  $\{x, y, a, b\} \in K_{2,2}^{(2)}(P^{12})$  são tais que  $\deg_{L_{xy}}(a, b) = \alpha^4 d^2 \deg_{P^{12}}(x, y)(1 \pm \delta_2)$ , onde  $\deg_{P^{12}}(x, y) = d^2 n_3(1 \pm \varepsilon)^2$ .

**Lema 55 (Caracterização local de 3-grafos  $(\alpha, \delta, d)$ -minimais).** *Para todo  $\alpha$ ,  $0 < \delta < 10^{-6}$  e  $d$ , existe  $\varepsilon_0$  tal que, para todo  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , existe  $n_0$  tal que, se  $n_i \geq n_0$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , então  $\mathbf{S}_1(\delta) \implies \mathbf{S}_2(\delta^{1/4})$  e  $\mathbf{S}_2(\delta) \implies \mathbf{S}_1(\delta^{1/4})$ .*

*Idéia da prova.* Prova-se apenas que  $\mathbf{S}_1(\delta) \implies \mathbf{S}_2(\delta^{1/4})$ , já que a prova de  $\mathbf{S}_2(\delta) \implies \mathbf{S}_1(\delta^{1/4})$  é simples. As duas equações abaixo são provadas com facilidade:

$$\sum_{K_{2,2}^{(2)}(P^{12})} \deg_{L_{xy}}(a, b) \geq \alpha^4 d^4 n_3 |K_{2,2}^{(2)}(P^{12})| (1 - \varepsilon^{1/8}) \quad (3.7)$$

$$\sum_{K_{2,2}^{(2)}(P^{12})} \deg_{L_{xy}}^2(a, b) < (\alpha^4 d^4 n_3)^2 |K_{2,2}^{(2)}(P^{12})| (1 + 3\delta) \quad (3.8)$$

A partir da equação 3.7, prova-se com facilidade a equação 3.6. Por uma aplicação aproximada de Cauchy-Schwarz às equações 3.7 e 3.8, temos que no máximo  $2(3\delta)^{1/3} |K_{2,2}^{(2)}(P^{12})|$  cópias  $(\{x, y\}, \{a, b\}) \in K_{2,2}^{(2)}(P^{12})$  são tais que  $\deg_{L_{xy}}(a, b) = \alpha^4 d^4 n_3(1 \pm 2(3\delta)^{1/3})$ . Ou seja,  $\mathbf{S}_1(\delta) \implies \mathbf{S}_2(\delta^{1/4})$ .  $\square$

Neste artigo [12], utiliza-se bastante o Lema 11 da Contagem aplicado ao caso em questão:

**Fato 56 (Aplicação do Lema da Contagem).**  $\forall \gamma, \exists \theta_0$  tal que  $\forall 0 < \theta \leq \theta_0$ , se  $F = F^{12} \cup F^{13} \cup F^{23}$  é um grafo 3-partido com  $V(F) = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ , onde todos  $F^{ij}$  são  $(\gamma, \theta)$ -uniformes,  $1 \leq i < j \leq 3$ , então

$$|K_3^{(2)}(F)| = \gamma^3 |X_1| |X_2| |X_3| (1 \pm \theta^{1/3})$$

O Teorema 54 é provado pela aplicação do teorema abaixo três vezes.

**Lema 57 (Herança fraca de  $(\alpha, \delta, d)$ -minimalidade versão 2).** Para todo  $\alpha$ , existe  $\delta_0$  tal que para todo  $0 < \delta < \delta_0$ ,  $d$ , existe  $\varepsilon_0$  tal que, para todo  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , existe  $n_0$  tal que, se  $\mathcal{H}$  e  $P$  satisfazem a Configuração 52 com constantes  $\alpha, d, \varepsilon$  para  $n_i > n_0$  e  $\mathcal{H}$  é  $(\alpha, \delta)$ -minimal com respeito a  $P$ , então para qualquer  $W_1 \in V_1$ ,  $|W_1| \geq \delta^{1/10} n_1$ , vale que:

- $P^{1j}[W_1, V_j]$  é  $(d, \varepsilon/\delta^{1/10})$ -uniforme,  $j = 2, 3$
- $\mathcal{H}[W_1, V_2, V_3]$  tem densidade  $d_{\mathcal{H}(W_1, V_2, V_3)}(P[W_1, V_2, V_3]) = \alpha \pm 20\delta^{1/20}$
- $\mathcal{H}(W_1, V_2, V_3)$  é  $(\alpha \pm 20\delta^{1/20}, \delta^{1/30}, d)$ -minimal com resp.  $P(W_1, V_2, V_3)$

*Idéia da prova.* O item 1 é o caso herança simples, *Slicing Lemma*, da Seção 3.1.

Grande parte da prova dos itens 2 e 3 é feita sobre a equação abaixo:

$$|K_{2,2,2}^{(3)}(\mathcal{H}[W_1, V_2, V_3])| = \alpha^8 d^{12} \binom{|W_1|}{2} \binom{n_2}{2} \binom{n_3}{2} (1 \pm 10\delta^{1/20}) \quad (3.9)$$

A prova do item 2 é simples, mas longa. Basicamente, analisam-se três casos: (a)  $\delta^{1/10} n_1 < |W_1| < (1 - \delta^{1/10}) n_1$ , (b)  $(1 - \delta^{1/10}) n_1 \leq |W_1| < (1 - \varepsilon^{1/2}) n_1$  e (c)  $(1 - \varepsilon^{1/2}) n_1 \leq |W_1| \leq n_1$ .

No item (c), por exemplo,  $|W_1^C| < \varepsilon^{1/2} n_1$  e portanto  $|\mathcal{H}[W_1^C, V_2, V_3]| < \varepsilon^{1/2} n_1 n_2 n_3$ . Assim,

$$d_{\mathcal{H}[W_1, V_2, V_3]}(P[W_1, V_2, V_3]) > \frac{|\mathcal{H}| - \varepsilon^{1/2} n_1 n_2 n_3}{|K_3^2(P[W_1, V_2, V_3])|} \geq \alpha - \frac{\varepsilon^{1/2}}{2d^3} > \alpha - 20\delta^{1/20},$$

onde, na última desigualdade,  $|\mathcal{H}| = \alpha |K_3^2(P)|$  e, do Fato 56, tem-se que  $|K_3^2(P[W_1, V_2, V_3])| = (d \pm \varepsilon)^3 |W_1| n_2 n_3 \geq 2d^3 n_1 n_2 n_3$ .

A prova do item 3 sai facilmente do item 2 e da equação 3.9:

$$\frac{|K_{2,2,2}^{(3)}(\mathcal{H}[W_1, V_2, V_3])|}{d^{12} \binom{|W_1|}{2} \binom{n_2}{2} \binom{n_3}{2}} = \alpha^8 (1 \pm 10\delta^{1/10}) \leq (\alpha - 20\delta^{1/20})^8 (1 + \delta^{1/30}),$$

pois  $\delta \ll \alpha$ , ou seja, por definição,  $\mathcal{H}[W_1, V_2, V_3]$  é  $(\alpha - 20\delta^{1/20}, \delta^{1/30}, d)$ -minimal com relação a  $P[W_1, V_2, V_3]$ , como desejado.  $\square$

O Teorema 53 é provado pela aplicação do teorema abaixo três vezes.

**Lema 58 (Herança forte de  $(\alpha, \delta, d)$ -minimalidade versão 2).** Para todo  $\alpha$ ,  $0 < \delta < 10^{-6}$ ,  $d$ , existe  $\varepsilon_0$  tal que, para todo  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , existe  $c > 0$  e inteiros  $K_0$  e  $n_0$  tais que, se  $\mathcal{H}$  e  $P$  satisfazem a Configuração 52 com constantes  $\alpha, d, \varepsilon$  e  $n_i > n_0$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , então, se  $K_0 \leq k_3 \leq n_3$ , todos exceto

$$\exp\{-ck_3\} \binom{n_3}{k_3}$$

conjuntos  $W_3 \in \binom{V_3}{k_3}$  induzem 3-grafo  $\mathcal{H}[V_1, V_2, W_3]$  e grafo  $P(V_1, V_2, W_3)$  satisfazendo:

- $P^{i3}[V_i, W_3]$  é  $(d, \varepsilon^{1/6})$ -uniforme, para  $i = 1, 2$
- $\mathcal{H}[V_1, V_2, W_3]$  tem densidade  $d_{\mathcal{H}(V_1, V_2, W_3)}(P[V_1, V_2, W_3]) = \alpha \pm \delta^{1000}$
- Se  $\mathcal{H}$  é  $(\alpha, \delta, d)$ -minimal com respeito a  $P$ , então  $\mathcal{H}(V_1, V_2, W_3)$  é  $(\alpha \pm \delta^{1000}, 2\delta^{1/64}, d)$ -minimal com respeito a  $P(V_1, V_2, W_3)$ .

Para sua prova, utiliza-se um resultado de [15] sobre caracterização local de grafos uniformes, semelhante ao Fato 42 da seção 3.4.1.

**Fato 59 (caracterização local de grafos uniformes [15]).** Seja  $G$  um grafo bipartido com partes  $X$  e  $Y$ . Dado  $\gamma$  e  $\theta$ , seja  $\binom{X}{2}_{ruim}$  o conjunto dos pares  $\{x, x'\} \subset X$  tais que  $\deg(x, x') \neq (\gamma \pm \theta)^2|Y|$ . Seja  $\binom{X}{2}_{bom} = \binom{X}{2} \setminus \binom{X}{2}_{ruim}$ .

- Se  $2\theta < \gamma$  e  $G$  é  $(\gamma, \theta)$ -uniforme, então  $|\binom{X}{2}_{ruim}| < 4\theta|X|^2$ ,
- Se  $|\binom{X}{2}_{ruim}| < \theta|X|^2$ , então  $G$  é  $(\gamma, 16\theta^{1/5})$ -uniforme.

Na prova do item (1) do Teorema 58, fixa-se  $\{x, y\} \in \binom{V_1}{2}_{bom}$ , sorteia-se  $W_3 \in \binom{V_3}{k_3}$  uniformemente, aplica-se desigualdade de Chernoff para estimar  $|N_{P^{13}(x, y)} \cap W_3|$  e aplica-se o Fato 59 para finalizar. As provas dos itens (2) e (3) também são simples, embora mais trabalhosas.

A Figura 3.1 mostra as relações entre os lemas e teoremas do artigo [12]. A numeração utilizada é a original do artigo. Números entre parêntesis significam equações e CS representa a aplicação de Cauchy-Schwarz.

A herança de uniformidade para 3-grafos de Czygrinow e Nagle é provada então aplicando-se os Lemas 54 e 53, heranças fraca e forte de  $(\alpha, \delta, d)$ -minimalidade. Utiliza-se ainda uma outra versão muito recente do lema da regularidade para hipergrafos de Haxell, Nagle e Rödl [37], aplicado para o

caso de 3-grafos, onde se contam cópias do  $K_{2,2,2}^{(3)}$ . Esta variante também se utiliza de particionamento  $(\alpha, \delta, d)$ -minimal dos vértices e dos pares de vértices, os quais “darão suporte” as hiperarestas do 3-grafo  $\mathcal{H}$ .

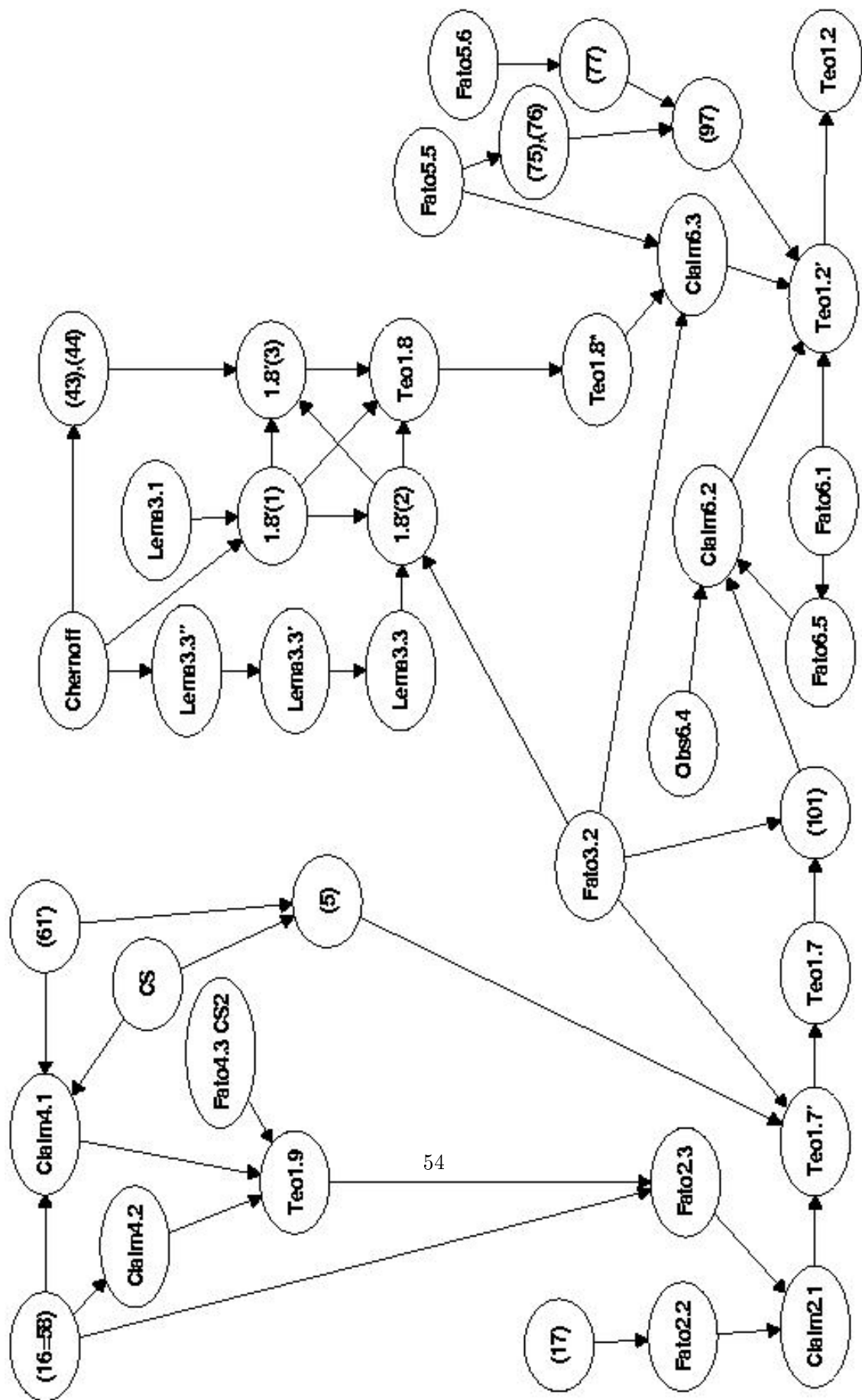


Figura 3.1: Hierarquia dos lemas de [12]

## Capítulo 4

# Versões Probabilísticas na Teoria Combinatória dos Números

### 4.1 Introdução

Um resultado clássico de Turán [66], de 1941, deu início a Teoria dos Grafos Extremais. Seja  $\text{ex}(n, H)$  o o número máximo de arestas em um grafo  $G$  com  $n$  vértices que não contém o grafo  $H$ . É fácil ver que se  $H' \subseteq H$ , então  $\text{ex}(n, H') \leq \text{ex}(n, H)$ , pois  $G \not\supseteq H'$  implica  $G \not\supseteq H$ .

**Teorema 60 (Turán [66], 1941).**

$$\text{ex}(n, K_p) = \left(1 - \frac{1}{p-1} + o(1)\right) \binom{n}{2}$$

*Prova.* Ver capítulo IV.2 de [5] □

Assim como na seção 2.6, seja  $R^t$  o grafo obtido de  $R$  substituindo cada vértice  $x$  de  $R$  por um conjunto  $V_x$  com  $t$  vértices, mantendo a relação das arestas, ou seja, cada aresta por um  $K_{t,t}$ .

Em 1946, Erdős e Stone [21] provaram o resultado mais forte abaixo.

**Teorema 61 (Erdős-Stone [21], 1946).**

$$\text{ex}(n, K_p^t) = \left(1 - \frac{1}{p-1} + o(1)\right) \binom{n}{2}$$

*Prova.* Ver seção A.2 □

Em 1966, Erdős e Simonovits observaram que o teorema de Erdős-Stone implica um resultado mais forte relacionando  $\text{ex}(n, H)$ , para qualquer grafo  $H$ , com seu número cromático  $\chi(H)$ .

**Teorema 62 (Erdős-Stone-Simonovits [20], 1966).**

$$\text{ex}(n, H) = \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + o(1)\right) \binom{n}{2}$$

*Prova.* Ver seção A.2 □

Uma área recente de pesquisas é atacar problemas de Turán para subgrafos de grafos dados. Seja  $\text{ex}(G, H)$  o número máximo de arestas de um subgrafo de  $G$  que não contém  $H$ . Claramente,  $\text{ex}(n, H) = \text{ex}(K_n, H)$ . Em [45], é mostrada uma forte conjectura sobre  $\text{ex}(G(n, p), H)$ , a versão probabilística do teorema de Erdős-Stone-Simonovits, uma das principais em aberto, a saber:

**Conjectura 63 (Erdős-Stone-Simonovits probabilístico [45]).** *Seja  $H$  um grafo não vazio com pelo menos 3 vértices. Se  $p = p(n) \gg n^{-1/d_2(H)}$ , então, com probabilidade  $1 - o(1)$ ,*

$$\text{ex}(G(n, p), H) = \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + o(1)\right) e(G(n, p)).$$

Como, com probabilidade  $1 - o(1)$ ,  $e(G(n, p)) = (1 + o(1))p \binom{n}{2}$ , o termo  $e(G(n, p))$  pode ser substituído por  $p \binom{n}{2}$ . A 2-densidade  $d_2(H)$  é definida como

$$d_2(H) = \max \left\{ \frac{|E(J)| - 1}{|V(J)| - 2} : J \subset H, |V(J)| \geq 3 \right\}.$$

Escrevemos  $G \rightarrow_\eta H$  se, para todo grafo  $G' \subseteq G$  com  $|E(G')| \geq \eta |E(G)|$ , temos que  $G'$  contém  $H$  como subgrafo. Observe que o resultado acima é equivalente a provar que, para todo  $\eta > 0$ ,

$$G(n, p) \rightarrow_{1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + \eta} H.$$

Atualmente, existem avanços desta conjectura apenas para alguns grafos  $H$ , como para florestas,  $K_3$  [23],  $C^{2l}$  [35],  $C^{2l+1}$  [36],  $K_4$  [45] e  $K_5$  [30]. A maioria deles se utiliza da versão esparsa do lema da regularidade

## 4.2 Teoria Combinatória dos Números

Na teoria combinatória dos números, observam-se resultados similares. Seja  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ . Seja  $S$  um conjunto de inteiros e  $\mathcal{P}$  uma propriedade.

De acordo com a Definição 1, escrevemos  $S \rightarrow (\mathcal{P})_r$  se toda  $r$ -coloração dos elementos de  $S$  gera um subconjunto monocromático satisfazendo  $\mathcal{P}$ .

De acordo com a Definição 2, escrevemos  $S \rightarrow_\eta \mathcal{P}$  se todo subconjunto de  $S$  com pelo menos  $\eta|S|$  elementos satisfaz a propriedade  $\mathcal{P}$ .

Como já descrito na Seção 1.2, denominamos as propriedades de Schur, Sárkozy e van der Waerden, respectivamente, por  $\mathcal{P} = \text{Schur}(n)$ ,  $\mathcal{P} = \text{Dif}(\mathbb{Q}(n))$  e  $\mathcal{P} = \text{PA}_k$ .

A motivação principal é o estudo de versões probabilísticas para os clássicos teoremas 3, 4, 5 e 6 de Schur, Sárkozy, van der Waerden e Szemerédi.

O Teorema 7, de [32], mostra que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}([n]_N \rightarrow (\text{Schur}(n))_{r=2}) = \begin{cases} 0 & \text{se } N \ll n^{1/2} \\ 1 & \text{se } N \gg n^{1/2} \end{cases}$$

O Teorema 8, de [57], mostra que  $\forall k \geq 3, r \geq 2$ , existem constantes  $C > c > 0$  tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}([n]_N \rightarrow (\text{PA}_k)_r) = \begin{cases} 0 & \text{se } N \leq cn^{1-1/(k-1)} \\ 1 & \text{se } N \geq Cn^{1-1/(k-1)} \end{cases}$$

O Teorema 9, de [44], mostra que  $\forall \eta > 0$ , existem constantes  $C > c > 0$  tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}([n]_N \rightarrow_\eta \text{PA}_3) = \begin{cases} 0 & \text{se } N \leq cn^{1/2} \\ 1 & \text{se } N \geq Cn^{1/2} \end{cases}$$

Desejamos investigar resultados similares sobre o conjunto  $\mathbb{Z}_n$ , o anel de inteiros módulo  $n$ . Seja  $\mathbb{Z}_{n,p}$  o subconjunto aleatório de  $\mathbb{Z}_n$ , onde cada elemento tem probabilidade  $p$  de estar presente, de modo independente.

Nosso interesse é descobrir funções limiars para  $p = p(n)$  de forma que  $\mathbb{Z}_{n,p}$  satisfaça uma determinada propriedade acima. Chung e Graham [11] obtiveram resultados sobre subconjuntos quase-aleatórios de  $\mathbb{Z}_n$  que fornecem importantes ferramentas para atacar esses problemas.

No decorrer do documento, dizemos que *quase todo* grafo  $G(n, p)$  tem a propriedade  $\mathcal{P}$  quando isso ocorrer com probabilidade  $1 - o(1)$ .



### 4.3 Quase-Aleatoriedade

O conceito de grafo aleatório, bem como o próprio método probabilístico, é usado principalmente para determinar a existência de estruturas combinatorias com determinadas propriedades. Frequentemente uma prova de existência não é o suficiente, sendo necessária uma construção explícita.

Para isso, em geral, determina-se um conjunto de propriedades importantes de grafos aleatórios. Grafos que satisfazem tais propriedades são chamados de quase-aleatórios. Ou seja, um grafo quase-aleatório não é aleatório, mas se comporta como se fosse, pois contém as principais propriedades de grafos aleatórios.

Com isso, torna-se relativamente fácil contruir grafos quase-aleatórios, que, de certa forma, irão imitar grafos aleatórios (basta forçar que as propriedades sejam satisfeitas).

O conceito de quase-aleatoriedade para grafos surgiu principalmente em 1989 com Chung, Graham e Wilson [8], que listaram propriedades de quase-aleatoriedade que são satisfeitas, quase certamente, por grafos aleatórios  $G(n, \frac{1}{2})$ . Com isso, surpreenderam ao provar que tais propriedades são equivalentes entre si, ou seja, se um grafo tem uma dessas propriedades, então também tem as demais. Abaixo, alguns exemplos dessas propriedades, onde  $\Gamma(u)$  é a vizinhança de um vértice  $u$ .

1. Para todo  $S \subset V(G)$ , o número de arestas de  $G$  com ambas as extremidades em  $S$  é  $\frac{1}{4}|S|^2 + o(n^2)$ .
2. Para todos  $A, B \subset V(G)$ , o número de arestas de  $G$  com uma extremidade em  $A$  e outra em  $B$  é  $\frac{1}{2}|A||B| + o(n^2)$ .
3.  $\sum_{u,v \in V(G)} \left| |\Gamma(u) \cap \Gamma(v)| - n/4 \right| = o(n^3)$ .

Posteriormente, essas propriedades foram estendidas para o caso geral  $G(n, p)$ . Desde então outros resultados de quase-aleatoriedade surgiram, como para hipergrafos [9], [10], [48]) e subconjuntos de  $\mathbb{Z}_n$  [11].

Em 1992, Chung e Graham [11] estenderam resultados de quase-aleatoriedade para subconjuntos de  $\mathbb{Z}_n$ . Eles descreveram uma classe de propriedades quase-aleatórias equivalentes para subconjuntos de  $\mathbb{Z}_n$ , fornecendo ainda construções explícitas de subconjuntos que satisfazem essas propriedades.

Para  $S \subset \mathbb{Z}_n$ , seja  $\chi_S$  sua função indicadora, ou seja,  $\chi_S(x) = 1$ , se  $x \in S$ , e  $\chi_S(x) = 0$ , caso contrário. A translação de  $S$  por  $x$  é o conjunto  $S + x = \{s + x | s \in S\}$ . Observe que a soma de elementos de  $\mathbb{Z}_n$  é sempre feita módulo  $n$ . O grafo Chung-Graham de  $S$ , denotado por  $CG_n(S)$ , tem

$\mathbb{Z}_n$  como conjunto de vértices e  $x, y \in \mathbb{Z}_n$  formam uma aresta se e só se  $x + y \in S$ .

Abaixo, enumeramos as propriedades descritas em [11] para um subconjunto quase-aleatório  $S \subseteq \mathbb{Z}_n$ , onde  $s = |S|$ ,  $t = |T|$  e  $\chi = \chi_S$ , quando  $S$  estiver subentendido.

1. (WT) — *Weak translation*. Para quase todo  $x \in \mathbb{Z}_n$ ,

$$|S \cap (S + x)| = s^2/n + o(n).$$

2. (ST) — *Strong translation*. Para todo  $T \subset \mathbb{Z}_n$  e quase todo  $x \in \mathbb{Z}_n$ ,

$$|S \cap (T + x)| = st/n + o(n).$$

3. ( $P(k)$ ) — *k-pattern*. Para todo  $k$  fixo e quase todos  $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{Z}_n$ ,

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}_n} \prod_{j=1}^k \chi(x + u_j) = s^k/n^{k-1} + o(n).$$

O produto interno é 1, se todos  $x + u_j \in S$ , e 0, caso contrário.

4. ( $R(k)$ ) — *k-representation*. Para todo  $k$  fixo e para quase todo  $x \in \mathbb{Z}_n$ ,

$$\sum_{u_1 + \dots + u_k = x} \prod_{j=1}^k \chi(u_j) = s^k/n + o(n^{k-1}).$$

O produto interno é 1, se todos  $u_j \in S$ , e 0, caso contrário.

5. (EXP) — *Exponential sum*. Seja  $i = \sqrt{-1}$ . Para todo  $j \neq 0$  em  $\mathbb{Z}_n$ ,

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}_n} \chi(x) \exp\left(\frac{2\pi i j x}{n}\right) = o(n).$$

Significa que esses vetores de raio 1 devem praticamente se anular, ou seja, os elementos devem estar bem “espalhados”.

6. (GRAPH) — *Quasi-random graph*. O grafo  $CG_n(S)$  é quase-aleatório.

7. ( $C(2t)$ ) — *2t-cycle* em  $CG_n(S)$ .

$$\sum_{x_1, \dots, x_{2t}} \chi(x_1 + x_2) \chi(x_2 + x_3) \dots \chi(x_{2t-1} + x_{2t}) \chi(x_{2t} + x_1) = s^{2t} + o(n^{2t}).$$

8. (DENSITY) — *Relative Density*. Para todo  $T \subset \mathbb{Z}_n$ ,

$$\sum_{x,y} \chi_T(x)\chi_T(y)\chi_S(x+y) = st^2/n + o(n^2).$$

O somando representa que a soma de cada par de elementos de  $T$  pertence a  $S$ .

Com isso, podemos explorar tais propriedades ao trabalhar com  $\mathbb{Z}_{n,p}$ , pois sabemos que, quase certamente, será um subconjunto quase-aleatório.

## 4.4 Grafos de Chung-Graham

Lembramos que, no grafo de Chung-Graham  $\text{CG}_n(S)$ ,  $x, y \in \mathbb{Z}_n$  formam uma aresta se e só se  $x + y \in S$ . Existe uma variante, denotada por  $\text{CG}_n^-(S)$ , onde  $x, y \in \mathbb{Z}_n$  formam uma aresta se e só se  $x - y \in S$ .

Em 2005, Kohayakawa e Leite [49] mostraram vários resultados sobre o número de arestas e sobre regularidade de grafos de Chung-Graham, motivados pela equivalência entre as propriedades *GRAPH* (grafo quase-aleatório de Chung-Graham) e *EXP* (coeficientes pequenos da transformada de Fourier).

A transformada de Fourier de uma função  $f: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}$  é definida pela função  $\mathcal{T}(f): \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$\mathcal{T}(f)(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}_n} f(y)e^{-2\pi iyx/n}.$$

Uma função  $f: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}$  pode ser vista como um vetor em  $\mathbb{C}^n$ , ou seja,  $(f(0), f(1), \dots, f(n-1)) \in \mathbb{C}^n$ . Com isso, a transformada de Fourier pode ser vista como uma função  $\mathcal{T}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ .

Vários resultados básicos de transformada de Fourier são conhecidos. Considerando-se o espaço euclidiano complexo  $\mathbb{C}^n$ , com produto interno hermitiano usual, observa-se facilmente, por exemplo, que a transformada de Fourier é linear e que a base canônica é levada para uma base ortogonal de tamanho  $\sqrt{n}$ . Com isso, para todo  $X, Y \in \mathbb{C}^n$ , temos que  $\langle \mathcal{T}(X), \mathcal{T}(Y) \rangle = n \langle X, Y \rangle$  e que  $\|\mathcal{T}(X)\| = \sqrt{\langle \mathcal{T}(X), \mathcal{T}(X) \rangle} = \sqrt{n} \|X\|$ .

Sabe-se ainda que o produto da transformada de Fourier de duas funções  $f, g: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}$  é a transformada da convulsão  $f * g$ , ou seja,  $\mathcal{T}(f * g)(x) = \mathcal{T}(f)(x)\mathcal{T}(g)(x)$ . A convulsão  $f * g: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}$  é definida por

$$(f * g)(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}_n} f(y)g(x - y).$$

Esses resultados de transformada de Fourier são usados para delimitar o número de arestas em grafos de Chung-Graham. Sejam  $R, U, W \subset \mathbb{Z}_n$  com  $U \cap W = \emptyset$ . Esses subconjuntos podem ser vistos também como funções indicadoras 0 – 1, ou seja,  $R(x) = 1$ , se  $x \in R$ , e  $R(x) = 0$ , caso contrário.

Em [49], prova-se que o número de arestas do grafo  $\text{CG}_n(R)$  com uma extremidade em  $U$  e outra em  $W$  é igual ao produto escalar

$$e(\text{CG}_n(R)[U, W]) = \langle R, U * W \rangle \quad (4.1)$$

Como  $\langle R, U * W \rangle = \frac{1}{n} \langle \mathcal{T}(R), \mathcal{T}(U * W) \rangle = \frac{1}{n} \langle \mathcal{T}(R), \mathcal{T}(U)\mathcal{T}(W) \rangle$ , obtém-se ainda que

$$\left| e(\text{CG}_n(R)[U, W]) - \frac{1}{n} |R| |U| |W| \right| \leq \left( \max_{j \neq 0} |\mathcal{T}(R)(j)| \right) \sqrt{|U| |W|} \quad (4.2)$$

Da equação 4.2 e da Definição 33 de  $(\varepsilon)$ -uniformidade, segue diretamente o Lema 64 abaixo, que é usado apenas no problema de Sárközy.

**Lema 64.** *Seja  $R \subset \mathbb{Z}_n$ . Se  $\max_{j \neq 0} |\mathcal{T}(R)(j)| \leq \varepsilon^2 |R|$ , o grafo  $\text{CG}_n(R)$  é  $(\varepsilon)$ -uniforme com densidade  $|R|/n$ . Se  $\max_{j \neq 0} |\mathcal{T}(R \cup (-R))(j)| \leq \varepsilon^2 |R \cup (-R)|$ , o grafo  $\text{CG}_n^-(R)$  é  $(\varepsilon)$ -uniforme com densidade  $|R \cup (-R)|/n$ .*

*Prova.* Sejam  $U, W \subset \mathbb{Z}_n$  com  $|U|, |W| \geq \varepsilon n$ . Logo

$$\max_{j \neq 0} |\mathcal{T}(R)(j)| \sqrt{|U| |W|} \leq \varepsilon^2 |R| \sqrt{|U| |W|} \leq \varepsilon \frac{|R|}{n} |U| |W|.$$

□

Outro resultado simples é também obtido:

$$e(\text{CG}_n(R)) = \left(1 + \frac{1}{n} \pm \frac{1}{n}\right) \frac{n}{2} |R|. \quad (4.3)$$

Disso segue que, se  $D \subset R$  e  $|D| = \alpha |R|$ , então

$$e(\text{CG}_n(D)) = \alpha \left(1 \pm \frac{2}{n}\right) e(\text{CG}_n(R)) \quad (4.4)$$

Definimos ainda uma outra noção de regularidade bem diferente das vistas anteriormente. Ela é utilizada em [36], cujo resultado será usado.

**Definição 65.** *Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices, e sejam  $A > 0$ ,  $p > 0$ . Faça  $d = pn$ . Dizemos que  $G$  é  $(p, A)$ -uniforme se, para todos os conjuntos  $U, W \subset V(G)$  com  $U \cap W = \emptyset$  e  $1 \leq |U| \leq |W| \leq d|U|$ , temos*

$$\left| e_G(U, W) - p|U| |W| \right| \leq A \sqrt{d|U| |W|}.$$

Assim, o grafo  $\text{CG}_n(R)[U, W]$  é  $(p, A)$ -uniforme para  $p = |R|/n$  e  $A \geq (\max_{j \neq 0} |\mathcal{T}(R)(j)|)/\sqrt{pn}$ . Limitando  $(\max_{j \neq 0} |\mathcal{T}(R)(j)|)$  pela desigualdade de Chernoff, obtém-se que, quase certamente,

$$\text{CG}_n(\mathbb{Z}_{n,p}) \text{ é } (p, A)\text{-uniforme para } A = \sqrt{24 \log n}. \quad (4.5)$$

Mais adiante será mostrado que, se se provasse o mesmo para  $A$  constante, teríamos imediatamente a prova do Problema 66.

## 4.5 Propriedade de Schur

O Teorema 3 de Schur afirma que, se  $\mathbb{N}$  é colorido com  $r$  cores, então existem  $x, y$  e  $z$  com mesma cor, satisfazendo  $x + y = z$ . Nesse caso, diz-se que  $x, y$  e  $z$  formam uma tripla de Schur. É possível obter uma versão finita do Teorema 3, pelo princípio da compacidade, substituindo  $\mathbb{N}$  por  $[n]$ , onde  $n > n_0$  para  $n_0$  dado segundo a quantificação  $\forall r, \exists n_0$ .

Propõe-se então uma versão de densidade para o Teorema 3 de Schur.

**Problema 66 (Versão probabilística e de densidade para Schur).** *Para todo  $0 < \eta \leq 1/2$ , existe uma constante  $C = C(\eta)$  tal que, se  $p = p(n) \geq Cn^{-1/2}$ , então todo subconjunto  $D \subset \mathbb{Z}_{n,p}$  com  $|D| \geq (1/2 + \eta)|\mathbb{Z}_{n,p}|$ , contém uma tripla de Schur.*

Porque  $n^{-1/2}$ ? O número esperado de triplas de Schur em  $\mathbb{Z}_{n,p}$  é  $n^2 p^3$  e o tamanho esperado de  $\mathbb{Z}_{n,p}$  é  $np$ . Se  $n^2 p^3 \ll np$ , ou seja,  $p \ll n^{-1/2}$ , então quase sempre poderemos remover todas as triplas de Schur de  $\mathbb{Z}_{n,p}$ , obtendo um subconjunto  $D$ , com tamanho  $|D| = (1 - o(1))|\mathbb{Z}_{n,p}|$ , sem triplas de Schur.

Em 2005, Kohayakawa e Leite [49] provaram este resultado para  $p(n) > Cn^{-1/2} \log n$ , usando regularidade para grafos esparsos e resultados de transformada de Fourier, motivados pela equivalência entre as propriedades de quase-aleatoriedade *GRAPH* (grafo de Chung-Graham) e *EXP* (coeficientes pequenos de Fourier). Observe que encontrar uma tripla de Schur em  $D \subset \mathbb{Z}_{n,p}$  é o mesmo que encontrar um triângulo em  $\text{CG}_n(D)$ , e vice-versa.

A prova desse resultado é interessante e bastante relevante, pois existem trechos que podem ser melhorados e que poderão levar a prova do Problema 66.

### 4.5.1 Versão fraca

Na prova da versão fraca do Problema 66 de Kohayakawa e Leite [49], utiliza-se um forte resultado sobre função limiar para existência de ciclos ímpares

em certos subgrafos de grafos aleatórios. Em 1996, Haxell, Kohayakawa e Łuczak [36] provaram o seguinte resultado:

**Teorema 67 (forbidding odd cycles [36]).** *Para todo  $l \geq 1$  e  $0 < \eta \leq \frac{1}{2}$ , existe uma constante  $C_0 > 0$  tal que, para  $p = p(n) > C_0 n^{-1+1/2^l}$ , com probabilidade  $1 - o(1)$ ,  $G(n, p) \rightarrow_{1/2+\eta} \mathcal{C}^{2l+1}$ .*

Ou seja, os autores resolveram a Conjectura 63 (problema de Turán sobre grafos aleatórios, Erdős-Stone-Simonovits probabilístico) para o caso de ciclos ímpares. Esse teorema prova que, se  $p = p(n)$  é maior que um certo valor que depende de  $n$ , então quase certamente  $\text{ex}(G(n, p), \mathcal{C}^{2l+1}) \leq (1/2 + \eta)e(G(n, p))$ .

Na prova desse lema, utiliza-se uma importante ferramenta auxiliar que limita inferiormente o número de pares proibidos, que são pares de vértices que formariam um  $\mathcal{C}^{2l+1}$  se se tornassem adjacentes (há um caminho de tamanho  $2l$  entre eles).

**Lema 68 (forbidding pairs [36]).** *Para todo  $l \geq 1$ ,  $0 < \alpha, \delta \leq 1$   $A > 0$ , existe uma constante  $C_0 > 0$  tal que todo grafo  $(p, A)$ -uniforme  $G$  com  $n$  vértices,  $p = p(n) \geq C_0 A^2 n^{-1+1/2^l}$ , é tal que, se  $H \subset G$  com  $e(H) \geq \alpha e(G)$ , então o número de pares proibidos de  $H$  é maior que  $(1 - \delta)(e(H)/e(G))\binom{n}{2}$ .*

Tomando  $l = 3$  (triângulos), tomando  $G$  como o grafo de Chung-Graham de  $\mathbb{Z}_{n,p}$ , que é  $(p, A)$ -uniforme para  $A = \sqrt{24 \log n}$ , e tomando  $H$  como o grafo de Chung-Graham de  $D \subset \mathbb{Z}_{n,p}$ , onde  $|D| \geq \alpha |\mathbb{Z}_{n,p}|$ , o lema acima pode ser aplicado, pois, pela equação 4.4,  $e(\text{CG}_n(D)) \geq \alpha(1 - \frac{2}{n})e(\text{CG}_n(\mathbb{Z}_{n,p}))$ .

Logo, o número de pares proibidos para se evitar triângulos em  $e(\text{CG}_n(D))$  é maior que  $(1 - \delta)(1 - \frac{2}{n})\alpha\binom{n}{2}$ .

Dizemos que  $x \in \mathbb{Z}_n$  é um elemento proibido por  $D \subset \mathbb{Z}_n$ , ou que  $D$  proíbe  $x$ , se  $x \in (D - D) := \{d_1 - d_2 : d_1, d_2 \in D\}$ . Isso porque  $D \cap (D - D) = \emptyset$ , se  $D$  não contém uma tripla de Schur, ou seja,  $\text{CG}_n(D)$  não contém um triângulo. De fato, se  $x \in D \cap (D - D)$ , então  $x = z - y$  com  $x, y, z \in D$ , ou seja,  $x + y = z$  (tripla de Schur).

É fácil ver então que o número de elementos proibidos por  $D$  é  $\geq (1 - 2\delta)\alpha n$ . Isso porque, se  $\{x, z\}$  é um par proibido, então  $\{x + t, z + t\}$  também é par proibido para todo  $t$ . Esse é o lema dos elementos proibidos de [49], que será usado abaixo na prova da versão fraca de densidade de Schur.

Finalmente, daremos um esboço da prova do resultado de Kohayakawa e Leite [49]. Deseja-se mostrar que quase certamente todo subconjunto  $D \subset \mathbb{Z}_{n,p}$  com  $|D| \geq (1/2 + \eta)|\mathbb{Z}_{n,p}|$  contém uma tripla de Schur. Fixe um sorteio de  $\mathbb{Z}_{n,p}$  e tome  $D$  como acima e tal que  $D$  não contém uma tripla de Schur. Divide-se  $\mathbb{Z}_{n,p}$  em  $k + 1$  partes  $(Z_i)_{i=1}^{k+1}$ , sendo  $k$  partes menores e a última

de tamanho  $|\mathbb{Z}_{n,p}|/2$ . Prova-se então que uma das partes menores  $Z_i$  é tal que  $D \cap Z_i$  proíbe muitos elementos, ou seja,  $|D - D| \geq |(D \cap Z_i) - (D \cap Z_i)|$  é grande. Prova-se em seguida que há muitos elementos proibidos por  $D$  em  $Z_{k+1}$ , com alta probabilidade, e, como  $(D - D) \cap D = \emptyset$ , não sobra “espaço” em  $Z_{k+1}$  para os elementos de  $D \cap Z_{k+1}$ . Essa contradição fecha a prova mostrada abaixo em esboço.

*Esboço da prova da versão fraca do Problema 66.* Deseja-se provar que, para a maioria dos  $\mathbb{Z}_{n,p}$  sorteados, todo subconjunto  $D \subset \mathbb{Z}_{n,p}$  com densidade  $1/2 + \eta$  possui uma tripla de Schur.

Seja  $\mathcal{Z}(n, p)$  o espaço de probabilidades formado pelos subconjuntos aleatórios de  $\mathbb{Z}_n$ , onde cada elemento  $x \in \mathbb{Z}_n$  tem probabilidade  $p$  independentemente. Ou seja,  $\mathcal{Z}(n, p)$  é o espaço dos  $\mathbb{Z}_{n,p}$ .

Primeiramente, prova-se que basta considerar o caso  $p = o(1)$ . Isso porque, se provamos o resultado para  $p = p(n)$ , podemos provar também para  $p' = p'(n) \geq p(n)$ . Grosso modo, podemos sortear um subconjunto  $\mathbb{Z}_{n,p'}^* \subset \mathbb{Z}_{n,p'}$ , colocando cada elemento de  $\mathbb{Z}_{n,p'}$  em  $\mathbb{Z}_{n,p'}^*$  com probabilidade  $p/p'$ .

Fixe então  $p = p(n) = o(1)$ . Escrevemos  $\mathbb{Z}_{n,p} \in \mathcal{Z}(n, p)$  como uma união de dois subconjuntos aleatórios de  $\mathcal{Z}(n, p_1)$ , onde  $(1 - p) = (1 - p_1)^2$ :

$$\mathbb{Z}_{n,p} = \mathbb{Z}_{n,p_1}^{(1)} \cup \mathbb{Z}_{n,p_1}^{(2)},$$

e agora escrevemos  $\mathbb{Z}_{n,p_1}^{(1)}$  como uma união de  $k$  elementos de  $\mathcal{Z}(n, p_2)$ , onde  $k$  é uma constante a ser definida posteriormente, e  $p_2$  é tal que  $(1 - p_1) = (1 - p_2)^k$ . Temos

$$\mathbb{Z}_{n,p_1}^{(1)} = \bigcup_{i=1}^k \mathbb{Z}_{n,p_2}^{(i)}.$$

Como  $p = o(1)$ , temos  $p_1 \sim p/2$  e  $p_2 \sim p_1/k \sim p/2k$ .

Isto significa, a grosso modo, que o sorteio de  $\mathbb{Z}_{n,p}$  será feito em  $k + 1$  etapas, sendo que os  $k$  primeiros ‘pedaços’ serão pequenos e o último terá aproximadamente metade de  $\mathbb{Z}_{n,p}$ . Como o último pedaço sorteado tem só metade de  $\mathbb{Z}_{n,p}$  e a fração do subconjunto  $D$  é de  $1/2 + \eta$ , alguns elementos de  $D$  deverão cair entre os  $k$  primeiros pedaços menores. Iremos nos concentrar no pedaço  $j$  ( $1 \leq j \leq k$ ) com maior densidade.

Formalmente, suponha que  $D \subset \mathbb{Z}_{n,p}$  não contém soluções da equação de Schur e que  $|D| = (1/2 + \eta)|\mathbb{Z}_{n,p}|$ . Sejam  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , respectivamente, as

densidades de  $D \cap \mathbb{Z}_{n,p_1}^{(1)}$  e de  $D \cap \mathbb{Z}_{n,p_1}^{(2)}$ . Ou seja,  $|D \cap \mathbb{Z}_{n,p_1}^{(1)}| = \gamma_1 |\mathbb{Z}_{n,p_1}^{(1)}|$  e  $|D \cap \mathbb{Z}_{n,p_1}^{(2)}| = \gamma_2 |\mathbb{Z}_{n,p_1}^{(2)}|$ . Assim,  $\gamma_1 + \gamma_2 \sim 1 + 2\eta$ , com grande probabilidade.

Para  $1 \leq i \leq k$ , seja  $D_i = D \cap \mathbb{Z}_{n,p_2}^{(i)}$  e a densidade  $\gamma_i^{(2)}$  tal que  $|D_i| = \gamma_i^{(2)} |\mathbb{Z}_{n,p_2}^{(i)}|$ . Seja  $j$  ( $1 \leq j \leq k$ ) tal que  $\gamma_j^{(2)} = \max_{1 \leq i \leq k} \gamma_i^{(2)}$  e seja  $\gamma^* = \gamma_j^{(2)}$ . Observe que temos  $\gamma^* \geq \gamma_1 > 2\eta$ . Aplicando o lema dos elementos proibidos a  $D_j \subset \mathbb{Z}_{n,p_2}^{(j)}$ , temos quase certamente que

$$|D - D| \geq |D_j - D_j| \geq (1 - 2\delta)\gamma^*n.$$

Ou seja,  $|D - D| \geq \gamma^*n$ , já que  $\delta$  pode ser tão pequeno quanto se queira. Como  $D$  não contém triplas de Schur,  $(D - D) \cap D = \emptyset$ , já que  $(D - D)$  são os elementos proibidos.

É muito improvável que o número de elementos de  $\mathbb{Z}_{n,p_1}^{(2)}$  proibidos por  $D$  seja muito menor que  $p_1\gamma^*n \sim \gamma^*|\mathbb{Z}_{n,p_1}^{(2)}|$ , já que se comporta como uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros  $p_1$  e  $|D - D| \geq \gamma^*n$ .

Como já observado,  $D \cap \mathbb{Z}_{n,p_1}^{(2)}$  não pode conter elementos proibidos. Como uma proporção  $\gamma^*$  dos elementos de  $\mathbb{Z}_{n,p_1}^{(2)}$  são proibidos,  $D \cap \mathbb{Z}_{n,p_1}^{(2)}$  deve estar contido entre os  $(1 - \gamma^*)|\mathbb{Z}_{n,p_1}^{(2)}|$  elementos restantes de  $\mathbb{Z}_{n,p_1}^{(2)}$ . Mas isto é muito improvável, já que  $|D \cap \mathbb{Z}_{n,p_1}^{(2)}| = \gamma_2 |\mathbb{Z}_{n,p_1}^{(2)}|$  e

$$\gamma_2 |\mathbb{Z}_{n,p_1}^{(2)}| \sim (1 + 2\eta - \gamma_1) |\mathbb{Z}_{n,p_1}^{(2)}| \geq (1 + 2\eta - \gamma^*) |\mathbb{Z}_{n,p_1}^{(2)}| > (1 - \gamma^*) |\mathbb{Z}_{n,p_1}^{(2)}|.$$

Ou seja, “falta espaço” em  $\mathbb{Z}_{n,p_1}^{(2)}$ .

Com isso, dado um sorteio de  $\mathbb{Z}_{n,p}$ , e selecionando os elementos de  $D$  em  $k$  etapas ( $D_j \subset \mathbb{Z}_{n,p_2}^{(j)}$ , onde  $1 \leq j \leq k$ ), com pequena probabilidade encontraremos uma tripla de Schur.

Tomando  $k$  suficientemente grande, esta probabilidade reduz-se praticamente a zero, de tal forma que, mesmo multiplicando pelo número de possíveis escolhas de  $D_j \subset \mathbb{Z}_{n,p_2}^{(j)}$  para a etapa  $j$  (com  $1 \leq j \leq k$ ), que é da ordem de  $k2^{|\mathbb{Z}_{n,p_2}^{(j)}|} \sim k2^{np_2} \sim k2^{np/(2k)}$ , ela ainda se mantém muito baixa, já que temos  $1/k$  no expoente.  $\square$

#### 4.5.2 Versão forte

Toda a demonstração da versão fraca pode ser usada para resolver o problema 66, caso se provasse que  $\text{CG}_n(\mathbb{Z}_{n,p})$  é  $(p, A)$ -uniforme para  $A$  constante, ao invés da equação 4.5 para  $A = \sqrt{24 \log n}$ . Ou seja, seria suficiente provar o seguinte:



**Conjectura 69.** *Existe  $A > 0$  tal que para todo  $p = p(n)$ , com probabilidade  $1 - o(1)$ , para  $n \rightarrow \infty$ , temos*

$$\left( \max_{j \neq 0} |\mathcal{T}(\mathbb{Z}_{n,p})(j)| \right) \leq A\sqrt{pn}.$$

Outra abordagem seria a análise dos resultados em [36]. A versão original do Lema 68 (lema 6 de [36]) menciona apenas  $C_0 = C_0(l, \delta, \alpha, A)$ , ao invés de  $C_0 A^2$ . No entanto, o lema 9 de [36], que é usado em sua prova, apresenta  $C_0 = 32(A/\delta\alpha\mu)^2$ . Por isso, foi adicionado o termo  $A^2$  no Lema 68.

Com isso, a remoção do termo  $A^2$  de  $C_0$  no lema 9 de [36], obteria a versão forte. Tivemos algum trabalho nisso, principalmente no *Claim 2* de [36] sobre expansores, mas sem resultados significativos.

Uma outra abordagem é a verificação do resultado sobre o erro  $o(n)$  na propriedade *EXP* para subconjuntos quase-aleatórios da seção 4.3, para  $S = \mathbb{Z}_{n,p}$  com  $p = p(n) \geq Cn^{-1/2}$ . Caso fosse possível provar que, nesse caso,  $o(n)$  em *EXP* é na verdade  $O(n^{1/4})$ , acreditamos ser possível provar que  $(\max_{j \neq 0} |\mathcal{T}(\mathbb{Z}_{n,p})(j)|) = “o(n) = O(n^{1/4})” \leq A\sqrt{pn}$ , para  $A$  constante, com probabilidade  $1 - o(1)$ .

Uma última possibilidade seria a prova da herança de uniformidade super-exponencial para hipergrafos, como mencionado no final da seção 3.4.1 nas Conjecturas 48 e 49. Na verdade, bastaria um resultado de inf-uniformidade para 3-grafos.

Se esta conjectura é verdadeira, poderíamos construir um “3-grafo de Chung-Graham”  $\text{CG}_n^3(S)$ , no qual  $x, y, z \in \mathbb{Z}_n$  formam uma hiperaresta se e só se  $x, y, z \in S$  e  $z = x + y \pmod{n}$ . Tomando  $S = \mathbb{Z}_{n,p}$ , precisaríamos provar ainda que  $\text{CG}_n^3(\mathbb{Z}_{n,p})$  é inf-uniforme.

Com isso, aplicando a herança a um conjunto “pequeno”  $D$ , teríamos que  $\text{CG}_n^3(\mathbb{Z}_{n,p})[D]$  também é inf-uniforme e, por isso, muito provavelmente possui alguma hiperaresta, que seria uma tripla de Schur.

## 4.6 Propriedade de Sárközy

O Teorema 5 de Sárközy afirma que, se  $A \subset \mathbb{N}$  é um conjunto com densidade superior positiva, então existem  $x, y \in A$  tais que  $x - y$  é um quadrado perfeito. Uma versão mais fraca disso é que, se  $\mathbb{N}$  é colorido com  $r$  cores, então existem  $x$  e  $y$  com a mesma cor, satisfazendo  $x - y$  é um quadrado perfeito.

Propõe-se então uma versão de densidade para o Teorema 5 de Sárközy.

**Problema 70 (Versão de densidade para Sárközy).** Para todo  $0 < \eta \leq 1$ , existe uma constante  $C = C(\eta)$  tal que, se  $p = p(n) > Cn^{-1}$ , então, para todo subconjunto  $D \subset \mathbb{Z}_{n,p}$  com  $|D| \geq \eta|\mathbb{Z}_{n,p}|$ , existem  $x, y \in D$  tais que  $x - y$  é um resíduo quadrático diferente de zero pertencente a  $\mathbb{Z}_n$ .

Porque  $n^{-1}$ ? O número esperado de pares  $x, y$  em  $\mathbb{Z}_{n,p}$ , tais que  $x - y \neq 0$  é um resíduo quadrático, é  $\frac{1}{4}n^2p^2$ , já que existem  $\frac{n-1}{2}$  resíduos quadráticos em  $\mathbb{Z}_n$  [40]. Como o tamanho esperado de  $\mathbb{Z}_{n,p}$  é  $np$ , temos que, se  $n^2p^2 \ll np$ , ou seja,  $p \ll n^{-1}$ , então quase sempre poderemos remover esses pares de  $\mathbb{Z}_{n,p}$ , obtendo um subconjunto  $D$  com tamanho  $|D| = (1 - o(1))|\mathbb{Z}_{n,p}|$ .

Em 2005, Kohayakawa e Leite [49] provaram este resultado, que chamaremos de versão fraca.

A prova desse resultado é interessante e merece atenção, pois existem trechos que podem ser melhorados e que poderão levar a prova do Problema 70. Além disso, utiliza o Lema 34, ou seja, a versão interna de herança de uniformidade.

Estamos interessados em investigar a restrição  $x - y \in \mathbb{Z}_{n,p}$ , a qual chamaremos de a versão forte do Problema 70.

Dizemos que um conjunto tem a propriedade  $\text{Dif}(S)$  (resp.  $\text{Soma}(S)$ ) se possui dois elementos  $x$  e  $y$  tais que  $x - y \in S$  (resp.  $x + y \in S$ ).

#### 4.6.1 Versão fraca

Seja  $Q(n) \subset \mathbb{Z}_n$  o conjunto dos resíduos quadráticos, ou seja, quadrados módulo  $n$ , exceto 0. O resultado provado em [49] é um pouco mais geral e é útil para outros subconjuntos, além de  $Q(n)$ .

Seja  $M = \{m_1, m_2, \dots\}$  um subconjunto infinito de  $\mathbb{N}$  com  $1 \leq m_1 < m_2 < \dots$ . Dizemos que  $\mathcal{S}_M$  é uma  $M$ -sequência se  $\mathcal{S}_M$  for uma sequência de conjuntos indexada por  $M$ ,  $\mathcal{S}_M = (S_{m_i})_{i \in \mathbb{N}}$ , tal que, para todo  $i$ ,  $S_{m_i} \subset \mathbb{Z}_{m_i}$ .

**Definição 71.** Uma  $M$ -sequência  $\mathcal{S}_M$  é **uniforme- $\text{CG}^+$**  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $i_0 \in \mathbb{N}$  tal que, se  $i \geq i_0$ , o grafo de Chung-Graham  $\text{CG}_{m_i}(S_{m_i})$  é  $(\varepsilon)$ -inf-uniforme. Analogamente,  $\mathcal{S}_M$  é **uniforme- $\text{CG}^-$**  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $i_0 \in \mathbb{N}$  tal que, se  $i \geq i_0$ , o grafo  $\text{CG}_{m_i}^-(S_{m_i})$  é  $(\varepsilon)$ -inf-uniforme.

Os principais resultados são os teoremas 72 e 73 abaixo.

**Teorema 72.** Seja  $\mathcal{S}_M = (S_{m_i})_{i \in \mathbb{N}}$  uma  $M$ -sequência uniforme- $\text{CG}^+$ . Para todos  $0 < \eta, \gamma < 1$ , existem constantes  $C = C(\eta, \gamma)$  e  $i_0 = i_0(\eta, \gamma)$  tais que, se  $i \geq i_0$  e se  $p: M \rightarrow [0, 1]$  satisfaz  $p = p(m_i) \geq C/|S_{m_i}|$ , então, com probabilidade pelo menos  $1 - \gamma$ , temos que

$$\mathbb{Z}_{m_i,p} \rightarrow_{\eta} \text{Soma}(S_{m_i}).$$

**Teorema 73.** *Seja  $\mathcal{S}_M = (S_{m_i})_{i \in \mathbb{N}}$  uma  $M$ -sequência uniforme- $CG^-$ . Para todos  $0 < \eta, \gamma < 1$ , existem constantes  $C = C(\eta, \gamma)$  e  $i_0 = i_0(\eta, \gamma)$  tais que, se  $i \geq i_0$  e se  $p: M \rightarrow [0, 1]$  satisfaz  $p = p(m_i) \geq C/|S_{m_i}|$ , então, com probabilidade pelo menos  $1 - \gamma$ , temos que*

$$\mathbb{Z}_{m_i, p} \rightarrow_{\eta} \text{Dif}(S_{m_i}).$$

A versão fraca do Problema 70 segue imediatamente do teorema 73. Basta tomar  $M$  como sendo o conjunto dos números primos e  $\mathcal{S}_M = (S_{m_i})_{i \in \mathbb{N}}$  com  $S_{m_i} = \mathbb{Q}(m_i)$  sendo o conjunto dos resíduos quadráticos em  $\mathbb{Z}_{m_i}$ . É fácil ver que, se  $n > 2$  é primo, então  $|\mathbb{Q}(n)| = (n - 1)/2$  [4]. Com isso,  $p = p(n) > Cn^{-1} > 2C/|\mathbb{Q}(n)|$ .

Falta verificar se nesse caso  $\mathcal{S}_M$  é uniforme- $CG^-$ . Para isso, basta mostrar, pelo Lema 64, que  $|\mathcal{T}(\mathbb{Q}(m))(j)| \leq \varepsilon^2 |\mathbb{Q}(m)| = \varepsilon^2(m - 1)/2$ , para  $m$  grande. O fato abaixo resolve essa questão.

**Fato 74.** *Se  $m > 2$  é primo, então, para todo  $j \in \mathbb{Z}_m$ ,  $j \neq 0$ , temos que*

$$\left| \mathcal{T}(\mathbb{Q}(m))(j) \right| = \left| \sum_{x \in \mathbb{Q}(m)} e^{-2\pi i j x / m} \right| = \sqrt{m}. \quad (4.6)$$

*Prova.* Como  $(m - x)^2 \equiv x^2 \pmod{m}$ , temos que

$$\left| \sum_{x \in \mathbb{Q}(m)} e^{-2\pi i j x / m} \right| = \frac{1}{2} \left| \sum_{x=1}^{m-1} e^{-2\pi i j x^2 / m} \right| = \sqrt{m},$$

onde a última igualdade vem de um resultado clássico de teoria dos números sobre somas de Gauss ([4], [39] ou [40]).  $\square$

Para finalizar, falta provar os Teoremas 72 e 73. Pela semelhança, esboça-se apenas a primeira.

*Prova do Teorema 72.* Tome  $\varepsilon' = 10^{-2}$  e  $\beta$  pequeno, a ser definido.

Aplique o Lema 34 (herança interna de inf-uniformidade), com entrada  $\beta$  e  $\varepsilon'$ , para obter  $\tilde{C}$  e  $\varepsilon_0$ .

Como  $\mathcal{S}_M$  é uniforme- $CG^+$ , existe  $i_0$  tal que o grafo  $G = CG_{m_i}(S_{m_i})$  é  $(\varepsilon_0)$ -inf-uniforme, para  $i \geq i_0$ . Tome  $i \geq i_0$ .

Deseja-se provar que, para todo  $0 < \eta, \gamma < 1$ ,

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{Z}_{m_i, p} \rightarrow_{\eta} \text{Soma}(S_{m_i})\right) \geq 1 - \gamma.$$

Escolhendo  $C$  grande adequado e, como  $p \geq C/|S_{m_i}| \geq C/m_i$ , temos pela desigualdade de Hoeffding que

$$\mathbb{P}(m_i p/2 \leq |\mathbb{Z}_{m_i, p}| \leq 3m_i p/2) \geq 1 - 2e^{-m_i p/12} \geq 1 - 2e^{-C/12} \geq 1 - \gamma/2.$$

Suponha então que  $m_i p/2 \leq |\mathbb{Z}_{m_i, p}| \leq 3m_i p/2$ . Com isso, se  $D \subset \mathbb{Z}_{m_i, p}$  com  $|D| = \eta|\mathbb{Z}_{m_i, p}|$ , então  $\eta m_i p/2 \leq |D| \leq 3\eta m_i p/2$ .

Dizemos que um subconjunto  $Q \subset \mathbb{Z}_{m_i}$ , com  $q = |Q|$  é *ruim* se

$$e(\text{CG}_{m_i}(S_{m_i})[Q]) < (1 - \varepsilon')d(\text{CG}_{m_i}(S_{m_i})) \binom{q}{2}.$$

Tome  $q$  um inteiro positivo com  $\eta m_i p/2 \leq q \leq 3\eta m_i p/2$ . Escolhendo  $C$  grande adequado, segue da equação 4.3 que

$$q \geq \frac{\eta m_i p}{2} \geq \frac{\eta C}{2} \geq \frac{\eta 4\tilde{C}m_i}{2\eta|S_{m_i}|} \geq \frac{\tilde{C}}{d(\text{CG}_{m_i}(S_{m_i}))}.$$

Com isso,  $\text{CG}_{m_i}(S_{m_i})$  e  $q$  satisfazem a aplicação da herança interna de inf-uniformidade, e com isso, podemos concluir que o número de conjuntos *ruins*  $Q \subset \mathbb{Z}_{m_i}$  de tamanho  $q$  é no máximo  $\beta^q \binom{m_i}{q}$ .

O número esperado de conjuntos *ruins*  $Q \subset \mathbb{Z}_{m_i, p}$  de tamanho  $q$ , para  $m_i p/2 \leq |\mathbb{Z}_{m_i, p}| \leq 3m_i p/2$ , é no máximo o número de conjuntos *ruins* de tamanho  $q$  vezes a probabilidade de um destes conjuntos *ruins* estar contido em  $\mathbb{Z}_{m_i, p}$ . Esse número é no máximo:

$$\beta^q \binom{m_i}{q} p^q \leq \left( \beta \frac{em_i}{q} p \right)^q \leq \left( \frac{2e\beta}{\eta} \right)^q,$$

onde utiliza-se o fato de que  $\binom{m_i}{q} \leq (em_i/q)^q$  [43].

Portanto, escolhendo  $\beta$  pequeno apropriado, o número esperado de conjuntos *ruins* em  $\mathbb{Z}_{m_i, p}$  com tamanho entre  $\eta m_i p/2$  e  $3\eta m_i p/2$  é no máximo

$$\sum_{q=\eta m_i p/2}^{3\eta m_i p/2} \left( \frac{2e\beta}{\eta} \right)^q \leq \sum_{q=1}^{\infty} \left( \frac{2e\beta}{\eta} \right)^q = \gamma/2.$$

Com isso, temos que a probabilidade de  $\mathbb{Z}_{m_i, p}$ , com tamanho entre  $\eta m_i p/2$  e  $3\eta m_i p/2$ , não conter um conjunto *ruim* com tamanho entre  $\eta m_i p/2$  e  $3\eta m_i p/2$  é pelo menos  $1 - \gamma/2$ , por Markov ( $\mathbb{P}(X = 0) \geq 1 - E(X)$ ).

Finalmente, com probabilidade pelo menos  $(1 - \gamma/2)(1 - \gamma/2) \geq 1 - \gamma$ , nenhum conjunto  $D \subset \mathbb{Z}_{m_i, p} \in \mathcal{Z}(m_i, p)$  com  $|D| \geq \eta|\mathbb{Z}_{m_i, p}|$  é *ruim*, ou seja,  $e(G[D]) \geq (1 - \varepsilon)d(\text{CG}_{m_i}(S_{m_i})) \binom{|D|}{2} > 0$ . Cada uma dessas arestas representa uma solução de  $x + y \in S_{m_i}$  com  $x, y \in D$ .  $\square$

### 4.6.2 Versão forte

Os teoremas 72 e 73 podem ser aplicados para outras  $M$ -sequências interessantes que sejam uniforme-CG<sup>+</sup> ou uniforme-CG<sup>-</sup>.

Com isso, talvez seja possível provar a versão forte do Problema 70, ou seja, provar o mesmo resultado de Kohayakawa-Leite, mas obrigando que o resíduo quadrático diferente de zero pertença a  $\mathbb{Z}_{n,p}$ .

Acreditamos que a probabilidade limite é  $p = O(n^{-1/2})$ . Isso porque o número esperado de pares  $x, y$ , tais que  $x - y \neq 0$  é um resíduo quadrático em  $\mathbb{Z}_{n,p}$ , é  $\frac{1}{4}n^2p^3$  e o tamanho esperado de  $\mathbb{Z}_{n,p}$  é  $np$ . Se  $n^2p^3 \ll np$ , ou seja,  $p \ll n^{-1/2}$ , então podemos remover todos os pares com essa propriedade de  $\mathbb{Z}_{n,p}$ , obtendo um subconjunto  $D$  com tamanho  $|D| = (1 - o(1))|\mathbb{Z}_{n,p}|$ .

Isso parece ser bem mais difícil do que para resíduos quadráticos em  $\mathbb{Z}_n$ , pois, neste caso, temos uma grande quantidade de resíduos (da ordem de  $n/2$ ), e que tem boas chances de “cair” em  $\mathbb{Z}_{n,p}$ .

## 4.7 Propriedade de van der Waerden

O Teorema 4 de B. L. van der Waerden (1927) [67] afirma que, para todos inteiros positivos  $k$  e  $r$ , existe um inteiro  $W(k, r)$  tal que se o conjunto de inteiros  $\{1, 2, \dots, W(k, r)\}$  é colorido com  $r$  cores, então uma das cores contém uma progressão aritmética com  $k$  elementos, ou seja, satisfaz PA <sub>$k$</sub> .

Além da demonstração original, posteriormente surgiram provas mais simples (ver [65], [34] e [13]).

Como exemplo, tomando  $r = 2$  e fazendo  $W(k) = W(k, 2)$ , os valores conhecidos no caso de duas cores são  $W(2) = 3$ ,  $W(3) = 9$ ,  $W(4) = 35$ ,  $W(5) = 178$  [33].

Em 1936, Erdős e Turán [22] conjecturaram que, para todo inteiro  $k$  e para toda constante  $\alpha$ , todo subconjunto  $A \subseteq [n]$ ,  $n$  suficientemente grande, com pelo menos  $\alpha n$  elementos contém uma PA com  $k$  elementos.

Essa conjectura foi provada para  $k = 3$  por Roth [60] em 1953 e depois provado em sua generalidade em 1975 por Szemerédi [63], descrito no Teorema 6. Alguns anos depois em 1977, Furstenberg [28] apresentou uma prova desse resultado por método totalmente diferente, baseado em teoria ergódica.

Desde então, o principal problema em aberto relacionado a conjectura de Erdős e Turán é obter melhores limites inferiores para o tamanho do conjunto  $A \subseteq [n]$  que garanta a existência de uma PA com  $k$  elementos em  $A$ . Sobre isso, não existem resultados satisfatórios para  $k \geq 4$ .

Para o caso  $k = 3$ , Roth [60] obteve  $|A| \geq n/\log \log n$  e o melhor resultado atual é  $|A| \geq n/(\log n)^c$ , para alguma constante  $c > 0$ , devido a Heath-Brown [38] e Szemerédi.

Uma abordagem diferente é o interesse na existência de um conjunto “pequeno” e “esparso”  $R \subseteq [n]$  tal que todo subconjunto  $A \subseteq R$ , que contém uma fração fixa  $\alpha$  de  $R$ , contém uma PA com 3 elementos. A esparsidade deverá fazer com que  $R$  seja localmente pobre em PA’s de tamanho 3.

Seja então  $\mathcal{R}(n, M)$ , para um dado  $1 \leq M \leq n$ , o espaço de probabilidade uniforme dos subconjuntos de  $[n]$  com  $M$  elementos. Como antes, escrevemos  $R \rightarrow_\eta \text{PA}_3$ , se todo subconjunto  $A \subseteq R$  com  $|A| \geq \eta|R|$  contém uma PA com 3 elementos.

Em 1996, Kohayakawa, Łuczak e Rödl [44] provaram os seguintes resultados:

**Teorema 75 (PA<sub>3</sub> densidade em  $\mathcal{R}(n, M)$ ).** *Para todo  $0 < \eta \leq 1$ , existe uma constante  $C = C(\eta)$  tal que, se  $M = M(n) > Cn^{1/2}$ , então, com probabilidade  $1 - o(1)$ , um subconjunto  $R \in \mathcal{R}(n, M)$  satisfaz  $R \rightarrow_\eta \text{PA}_3$ .*

**Teorema 76 (PA<sub>3</sub> densidade em  $\mathbb{Z}_{n,p}$ ).** *Para todo  $0 < \eta \leq 1$ , existe uma constante  $C = C(\eta)$  tal que, se  $p = p(n) > Cn^{-1/2}$ , então, com probabilidade  $1 - o(1)$ ,  $\mathbb{Z}_{n,p}$  satisfaz  $\mathbb{Z}_{n,p} \rightarrow_\eta \text{PA}_3$ .*

O Teorema 76 se assemelha aos já vistos de Schur e Sárközy, e utiliza principalmente o lema da regularidade para grafos esparsos. Motivado por esses resultados, conjecturou-se uma versão de densidade para o caso geral  $\text{PA}_k$ .

**Problema 77 (Versão geral de densidade para Szemerédi).** *Para todo inteiro  $k$  e  $0 < \eta \leq 1$ , existe uma constante  $C = C(\eta)$  tal que, se  $p = p(n) > Cn^{-1/(k-1)}$ , então, com probabilidade  $1 - o(1)$ ,  $\mathbb{Z}_{n,p}$  satisfaz  $\mathbb{Z}_{n,p} \rightarrow_\eta \text{PA}_k$ .*

Infelizmente, a prova do teorema 76 para o caso  $k = 3$  de Kohayakawa, Łuczak e Rödl [44] é muito técnica e não parece admitir uma generalização simples para  $k > 3$ .

## Apêndice A

# Aplicações dos Lemas da Regularidade

### A.1 Introdução

Esta seção tem como objetivo apresentar resultados básicos utilizados neste documento. Principalmente, as desigualdades de Markov, Chebyshev, Chernoff e Hoeffding.

Seja  $X$  uma variável aleatória. A desigualdade de Markov diz que

$$P(X \geq \beta) \leq E(X)/\beta.$$

A desigualdade de Chebyshev diz que

$$P(|X - E(X)| \geq \beta) \leq Var(X)/\beta^2,$$

onde  $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$ .

Se  $X$  é uma variável inteira e positiva, temos então que

$$P(X > 0) \leq E(X),$$

$$P(X = 0) \leq \frac{Var(X)}{E^2(X)}.$$

Ou seja, se  $E(X) \rightarrow 0$ , então  $X = 0$  quase sempre. Se  $E(X) \rightarrow \infty$ , mas  $Var(X) = o(E^2(X))$ , então  $X > 0$  quase sempre.  $Var(X)$  não é muito fácil de se calcular, mas geralmente utilizam-se os mesmos esquemas comuns que facilitam seu cálculo.

Fixe  $n > 0$ . Para  $1 \leq i \leq n$ , seja  $X_i$  uma variável aleatória indicadora (0-1) de um evento  $A_i$  com probabilidade  $p_i = P(A_i) = P(X_i = 1)$ . Ou seja,  $X_i = 1$  se  $A_i$  ocorre e, caso contrário,  $X_i = 0$ . Com isso,

$$\text{Var}(X_i) = p_i(1 - p_i) \leq p_i = E(X_i).$$

Se  $X = X_1 + \dots + X_n$ , então, como

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, X_j),$$

onde  $\text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$ , temos que

$$\text{Var}(X) \leq E(X) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

Note que se  $X_i$  e  $X_j$  são independentes, então  $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ . Escrevemos então  $i \sim j$  se  $i \neq j$  e os eventos  $A_i$  e  $A_j$  não são independentes. Note que, se  $i \sim j$ , então  $\text{Cov}(X_i, X_j) \leq E(X_i X_j) = \text{Pr}(A_i \wedge A_j)$ . Logo,

$$\text{Var}(X) \leq E(X) + \Delta,$$

onde

$$\Delta = \sum_{i \sim j} P(A_i \wedge A_j) = \sum_i P(A_i) \sum_{j \sim i} P(A_j | A_i).$$

Se  $X_1, \dots, X_n$  são simétricas (“*todos parecem a mesma coisa*”), temos que

$$\Delta^* = \sum_{j \sim i} P(A_j | A_i)$$

é o mesmo valor para todo  $i = 1, \dots, n$ . Com isso,  $\Delta = \Delta^* E(X)$ .

Com isso, se  $E(X) \rightarrow \infty$  e,  $\Delta = o(E^2(X))$  ou  $\Delta^* = o(E(X))$ , então, por Chebyshev,  $X > 0$  e  $X \sim E(X)$  quase sempre.

Alternativamente, a desigualdade de Chernoff diz que, se  $X_1, \dots, X_n$  são independentes entre si, então

$$P(|X - E(X)| > t) \leq 2 \exp\{-2t^2/n\}.$$

Por outro lado, a desigualdade de Hoeffding diz que, se  $X_1, \dots, X_n$  são independentes entre si, mas não são indicadoras (0-1), então

$$P(X - E(X) \geq t) \leq \exp\left\{\frac{-2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right\},$$



onde  $a_i \leq X_i \leq b_i$ ,  $E(X_i) < \infty$  e  $Var(X_i) < \infty$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ . Outra versão desta desigualdade diz que, se  $a_i = 0$  e  $b_i = 1$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ , então

$$P(X - E(X) \geq t) \leq \exp \left\{ \frac{-t^2}{3E(X)} \right\},$$

$$P(X - E(X) \leq -t) \leq \exp \left\{ \frac{-t^2}{2E(X)} \right\},$$

e, conseqüentemente,

$$P(|X - E(X)| \geq t) \leq 2 \exp \left\{ \frac{-t^2}{3E(X)} \right\}.$$

## A.2 Versão Original

Fixe  $\varepsilon > 0$ ,  $t_0 > 0$  e  $0 \leq d < 1$ . Considere um grafo  $G = (V, E)$  e  $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_t$  uma partição dada pelo lema da regularidade, onde  $n \geq n_0$ , ou seja:

- $t_0 \leq t \leq T_0$
- $|V_0| < \varepsilon n$
- $|V_1| = \dots = |V_t| \leq n/t$
- Com exceção de no máximo  $\varepsilon t^2$ , todos pares  $(V_i, V_j)$  são  $\varepsilon$ -regulares.

Dada uma densidade  $d > 0$ , o grafo reduzido  $R$  de  $G$  é tal que seus vértices são os conjuntos  $V_1, \dots, V_t$  e  $V_i$  está ligado a  $V_j$  se o par  $(V_i, V_j)$  é  $\varepsilon$ -regular com densidade pelo menos  $d$ .

Em aplicações, geralmente removem-se arestas do grafo  $G$ , purificando-o no grafo  $G''$ , deixando apenas as arestas que pertencem a pares  $(V_i, V_j)$   $\varepsilon$ -regulares com densidade pelo menos  $d$ . É mais fácil de se lidar com  $G''$  do que com o grafo original  $G$ , e ele possui ainda a maior parte das arestas de  $G$ , para  $\varepsilon$  e  $d$  pequenos e  $k$  grande.

De fato, se uma aresta de  $G$  não está em  $G''$ , então ou ela está ligada a  $V_0$ , ou é uma aresta interna de algum conjunto, ou pertence a um par irregular ou com densidade menor que  $d$ . O número de arestas nessa situação é limitado por:

$$\leq t \binom{n/t}{2} + \varepsilon n^2 + \varepsilon t^2 (n/t)^2 + d(n/t)^2 \binom{t}{2} \leq \left( \frac{1}{t} + 5\varepsilon + d \right) \binom{n}{2}$$

Tomando  $t_0$  grande, como da ordem de  $1/\varepsilon$ , temos que  $(\frac{1}{t} + 5\varepsilon + d)$  é uma fração pequena para  $e(G)$ , já que  $G$  não é esparso.

O Lema abaixo, conhecido por *Key Lemma* [50], é extremamente usado nas aplicações do lema da regularidade para encontrar em  $G$  cópias de um grafo  $H$  pequeno (ou da ordem de  $G$ , mas com grau máximo limitado), baseado no grafo reduzido  $R$ . Na verdade, ele dá ainda uma estimativa do número de cópias de  $H$  em  $G$ .

Assim como na seção 2.6, seja  $R^t$  o grafo obtido de  $R$  substituindo cada vértice  $x$  de  $R$  por um conjunto  $V_x$  com  $t$  vértices, mantendo a relação das arestas, ou seja, cada aresta por um  $K_{t,t}$ .

**Teorema 78 (Key Lemma [50]).** *Fixe  $d > \varepsilon > 0$  e  $m > 0$ . Dado um grafo  $R$ , construa um grafo  $G$  substituindo os vértices de  $R$  por  $m$  vértices, e as arestas de  $R$  por pares  $\varepsilon$ -regulares com densidade pelo menos  $d$ . Seja  $H$  um subgrafo de  $R^t$  com  $h$  vértices e grau máximo  $\Delta > 0$ . Seja  $\varepsilon_0 = (d - \varepsilon)^\Delta / (2 + \Delta)$ . Se  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  e  $t - 1 \leq \varepsilon_0 m$ , então  $H \subset G$ . Além disso, o número de cópias de  $H$  em  $G$  é maior que  $(\varepsilon_0 m)^h$ .*

Como exemplo da aplicação do lema da regularidade de Szemerédi, através do *Key Lemma*, mostramos uma prova curta do Teorema 61 de Erdős e Stone de 1946 [21], mencionado na seção 4.1.

*Prova do Teorema 61 de Erdős e Stone.* Seja  $0 < \beta < 1$  e  $G$  um grafo com  $n$  vértices e  $(1 - \frac{1}{p-1} + \beta) \binom{n}{2}$  arestas. Aplique o lema da regularidade com parâmetros  $\varepsilon = (\beta/6)^{pt}$  e  $t_0 = \lceil 1/\varepsilon \rceil$ , retornando  $n_0$  e  $T_0$ .

Se  $n > n_0$ , então existe uma partição  $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_t$  de  $G$  segundo o lema, com  $t_0 \leq t \leq T_0$ . Fixe a densidade  $d = \beta/2$  e tome o grafo purificado  $G''$  e seu grafo reduzido  $R$ .

Como os pares  $(V_i, V_j)$  de  $G''$  são sempre  $\varepsilon$ -regulares com densidade  $d_{ij} = 0$  ou  $d_{ij} \geq d$ , então  $R$  é mais denso do que  $G''$ . Além disso, como, pela escolha das constantes,  $\frac{1}{t} + 5\varepsilon + d < \beta$ , temos que

$$\frac{e(R)}{\binom{t}{2}} \geq \frac{e(G'')}{\binom{n}{2}} > 1 - \frac{1}{p-1}.$$

Portanto, pelo teorema de Turán,  $R$  contém um  $K_p$ .

Finalmente, seja  $\Delta = (p-1)t \leq pt$  o grau máximo do grafo  $K_p^t$ . Seja  $\varepsilon_0 = (d - \varepsilon)^\Delta / (2 + \Delta)$ . Como, pela escolha das constantes,  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  e  $t - 1 \leq \varepsilon_0 \lfloor n/t \rfloor$ , temos, pelo *Key Lemma*, que  $G$  contém um  $K_p^t$ .  $\square$

Como mencionado na seção 4.1, o Teorema 62 de Erdős e Simonovits melhora a conclusão do teorema de Erdős-Stone.

*Prova do Teorema 62 de Erdős e Simonovits.* Seja  $h$  o número de vértices de  $H$ . Observe que  $H \subseteq K_{\chi(H)}^h$ . Logo, por Erdős-Stone,  $\text{ex}(n, H) \leq \text{ex}(n, K_{\chi(H)}^h) = (1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + o(1)) \binom{n}{2}$

Além disso, seja  $G$  o grafo  $(\chi(H) - 1)$ -partido completo com  $n$  vértices e partes de tamanho  $\lfloor \frac{n}{\chi(H)-1} \rfloor$  ou  $\lceil \frac{n}{\chi(H)-1} \rceil$ . Como  $H \not\subseteq G$ , temos que  $\text{ex}(n, H) \geq e(G) = (1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + o(1)) \binom{n}{2}$ .  $\square$

### A.3 Versão Esparsa

Aplicações da versão esparsa do Lema de Regularidade de Szemerédi podem ser vistas em [42] e [46], bem como na prova do Teorema 32 da seção 3.2 (testemunha pequena para grafos esparsos) ou na prova do teorema 76 (PA de tamanho 3 em  $\mathbb{Z}_{n,p}$ , disponível em [44]).

A versão esparsa é um resultado útil para solução de Problemas tipo Turán sobre grafos esparsos. Foi utilizado também na obtenção de um novo critério de quase-aleatoriedade para grafos [47]. Deste critério segue imediatamente que existe um algoritmo  $O(n^2)$  que verifica se um grafo de ordem  $n$  é quase-aleatório, superando o resultado anterior  $O(n^{2,376})$ .

### A.4 Versão para 3-grafos

Aplicações do lema da regularidade de Frankl-Rödl para 3-grafos são mencionadas em [24], [25] e [59].

Uma outra aplicação vem do estudo da conjectura abaixo. Seja  $\mathcal{H}^k(n, p)$  o  $k$ -grafo aleatório com  $n$  vértices, onde cada  $k$ -upla tem probabilidade  $p$  independentemente. Dado um  $k$ -grafo  $\mathcal{H}$ , definimos  $m_1(\mathcal{H})$  como

$$m_1(\mathcal{H}) = \max \left\{ \frac{e_{\mathcal{H}'}}{v_{\mathcal{H}'} - 1} : \mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}, v_{\mathcal{H}'} > 1 \right\}.$$

Para  $t > 1$ , definimos  $m_t(\mathcal{H})$  como

$$m_t(\mathcal{H}) = \max \left\{ \frac{e_{\mathcal{H}'} - 1}{v_{\mathcal{H}'} - t} : \mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}, v_{\mathcal{H}'} > t \right\}.$$

Conjectura-se então em [58] que existe uma constante  $C > 0$  tal que, se colorimos as arestas de  $\mathcal{H}^k(n, p)$ , para  $p = p(n) \geq Cn^{-1/m_k(\mathcal{H})}$ , com  $r$  cores, obtemos um  $\mathcal{H}$  monocromático.

Em [58], esta conjectura é resolvida para o caso  $k = 3$  (3-grafos),  $r = 2$  (bicoloração das arestas) e  $\mathcal{H} = K_4^3$  (3-grafo completo com 4 vértices), usando principalmente o Lema de Regularidade de Frankl-Rödl para 3-grafos.

Outro resultado interessante de [58] são os limiares  $p = p(n) > Cn^{-1/m_1(\mathcal{H})}$  para emergência de um  $k$ -grafo  $\mathcal{H}$  qualquer monocromático em uma  $r$ -coloração dos vértices de  $\mathcal{H}^k(n, p)$ , e  $p = p(n) < cn^{-1/m_1(\mathcal{H})}$ , para não emergência, onde  $0 < c < C$ .

## A.5 Versão para Subgrafos

Esta seção tem por objetivo apresentar um resumo da aplicação do lema da regularidade para Subgrafos quaisquer, vista em [27]. O problema consiste em provar a existência de um limiar severo para a propriedade  $\mathcal{R}$  de Ramsey. Um grafo  $G \in \mathcal{R}$  se toda 2-coloração das arestas gera um triângulo monocromático. Por exemplo,  $K_6 \in \mathcal{R}$ .

Trabalhando nesse sentido, em 1994, Rödl e Ruciński [57] provaram um resultado próximo deste, a saber:

**Teorema 79.** *Existem constantes  $C > c > 0$  tais que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(G(n, p) \in \mathcal{R}) = \begin{cases} 0 & \text{se } p = p(n) \leq cn^{-1/2} \\ 1 & \text{se } p = p(n) \geq Cn^{-1/2} \end{cases}$$

A questão sobre a existência de um limiar severo para  $\mathcal{R}$  ficou em aberto sem muitos avanços até 1999, quando Friedgut [26] obteve uma técnica geral para tratar esses problemas.

Grosso modo, foi provado que a questão da severidade em grafos aleatórios depende se a propriedade é um fenômeno local ou global. Por exemplo, a conectividade é um fenômeno global e, por isso, possui um limiar severo. Por outro lado, a emergência de um subgrafo pequeno é um fenômeno local e, assim, não possui um limiar severo.

A propriedade  $\mathcal{R}$  de Ramsey é certamente influenciada pela existência de um  $K_6$ , que é, no entanto, improvável de aparecer em  $G(n, p)$  com  $p = \Theta(n^{-1/2})$ .

Para enunciar o resultado principal de [27], chamaremos de  $M^*$  a uma cópia ordenada de um grafo  $M$  colocada uniformemente e de forma aleatória sobre um conjunto de  $n$  vértices.

**Teorema 80 (Condição para limiar severo).** *Seja  $Q$  uma propriedade crescente de grafos sem limiar severo. Então existem constantes reais  $0 < c < C$ ,  $\beta > 0$ , um racional  $\rho$ , e  $p = p(n)$  satisfazendo  $cn^{-1/\rho} < p(n) < Cn^{-1/\rho}$ , tal que  $\beta < \mathbb{P}(G(n, p) \in Q) < 1 - \beta$ , para todo  $n$ . Além disso, existem  $\alpha, \xi > 0$  e um grafo balanceado  $M$  com densidade  $\rho$  tais que, para toda propriedade  $\mathcal{G}$  com  $G(n, p) \in \mathcal{G}$ , existem infinitamente muitos valores de  $n$  para os quais existe um grafo  $G$  com  $n$  vértices, onde:*

- $G \in \mathcal{G}$
- $G \notin Q$
- $\mathbb{P}((G \cup M^*) \in Q) > 2\alpha$
- $\mathbb{P}((G \cup G(n, \xi p)) \in Q) < \alpha$

Em outras palavras,  $M^*$  induz a propriedade localmente, enquanto que a adição de arestas aleatoriamente por uma proporção constante  $\xi$  (fenômeno global) não induz a propriedade. Assim, a técnica geral para provar a severidade é por contradição. Ou seja, se não possui um limiar severo, o teorema garante a existência de  $M$ .

Na prática, o objetivo do artigo é provar uma contradição mais forte do teorema acima, a saber:

**Teorema 81.**  $\forall \alpha, \xi > 0, \forall p = p(n)$  tal que  $c_2 n^{-1/2} < p < C_2 n^{-1/2}$  e  $\forall M$  grafo balanceado com  $\rho(M) = 2$ , existe uma propriedade  $\mathcal{G}$  de grafos com  $\mathbb{P}(G(n, p) \in \mathcal{G}) = 1 - o(1)$ , e um inteiro  $n_0$  tais que,  $\forall G \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{R}$  com  $|V(G)| = n > n_0$ , se  $\mathbb{P}((G \cup M^*) \in \mathcal{R}) > 2\alpha$ , então  $\mathbb{P}((G \cup (G(n, \xi p))) \in \mathcal{R}) = 1 - o(1)$ .

Inicialmente, é necessário garantir que  $M \notin Q$ , para que o teorema não valha trivialmente. Isso é feito facilmente.

A seguir, é escolhida então uma propriedade  $\mathcal{G}$  específica apropriada, típica de  $G(n, p)$ , com várias restrições (que não cabe mencionar aqui) sobre o número de conjuntos independentes, sobre a vizinhança e o grau dos vértices, sobre o número de triângulos, entre outras. Prova-se então que  $G(n, p) \in \mathcal{G}$  com probabilidade  $1 - o(1)$ , para  $cn^{-1/2} < p(n) < Cn^{-1/2}$  (para  $\mathcal{R}$ , temos  $\rho = 2$ ).

Para provar então que  $\mathbb{P}((G \cup G(n, \xi p)) \in \mathcal{R}) = 1 - o(1)$ , onde  $G \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{R}$  com  $\mathcal{G}$  típica de  $G(n, p)$ , é preciso investigar como saber se  $G_1 \cup G_2 \in \mathcal{R}$ , onde  $G_1 = G(n, b_1 n^{-1/2})$  e  $G_2 = G(n, b_2 n^{-1/2})$ .

Para isso, sejam  $Azul(G)$  e  $Verm(G)$  os conjuntos das arestas de um grafo  $G$  2-colorido com as cores azul e vermelha, respectivamente. Seja ainda  $Base(F) = \{uv : \text{tal que } uw, wv \in F, w \in V(G)\}$ , para  $F \subseteq E(G)$ .

Supondo, sem perda de generalidade, que  $|Azul(G_1)| \geq |Verm(G_1)|$ , temos que, se  $Base(Azul(G_1))$  contém um triângulo  $\Delta$ , nenhuma coloração própria de  $G_1 \cup \Delta$  pode ser derivada da original. Logo bastaria mostrar que  $Base(Azul(G_1)) \cap G_2$  contém um triângulo. O Lema a seguir de [27] auxilia nessa questão.

**Lema 82.**  $\forall 0 < \lambda < 1, c > 0$ , existe  $0 < a < 1/6$  tal que, se  $p \geq cn^{-1/2}$ , então  $G(n, p)$  é tal que  $\forall F \subseteq E(G)$ , com  $|F| \geq \lambda|E(G)|$ ,  $Base(F)$  contém pelo menos  $a|V(G)|^3$  triângulos, com probabilidade  $1 - o(1)$ .

Aplicando o lema 82 para o exemplo de  $G_1$  e  $G_2$ , com  $F = Azul(G_1)$ ,  $\lambda = 1/2$  e  $c = b_1$ , obteríamos  $\Theta(n^3)$  triângulos em  $Base(Azul(G_1))$ . A partir da desigualdade de Janson [41], pelo menos um desses triângulos estará em  $G_2$  com alta probabilidade  $1 - \varepsilon$ . Tomando  $b_2$  grande o suficiente, podemos diminuir o erro  $\varepsilon$  para  $o(1)$ , “provando” que  $G_1 \cup G_2 \in \mathcal{R}$ .

No entanto, no problema aqui tratado,  $b_2 = \xi b_1$ , podendo ser muito menor que  $b_1$ . Para resolver esse problema, será aplicado o lema da regularidade para Subgrafos, construindo uma família de subgrafos chamada *CORE*, a partir das “políades” da regularização. Esse é o maior esforço de [27]:

**Lema 83.** *Seja  $G \in \mathcal{G} \setminus (R)$  um grafo com  $|V(G)| = n > n_0$ , com  $\mathbb{P}((G \cup M^*) \in \mathcal{R}) > 2\alpha$ . Logo,  $\forall \tau > 0$ , existe uma família *CORE* de subgrafos de  $G$  tal que:*

- Para toda coloração própria de  $E(G)$ , existe  $K \in CORE$  monocromático
- $|CORE| \leq e^{\tau n^{3/2}}$
- $\forall K \in CORE, |K| > \lambda |E(G)|$

Sua prova será esboçada na subseção abaixo. Finalmente, o lema 84 abaixo fecha a prova do lema 81.

**Lema 84.**  *$\forall K \in CORE$ , a probabilidade de  $K \cup G(n, \xi p)$  possuir uma coloração própria na qual  $K$  é monocromático é no máximo  $e^{-2\tau_0 n^{3/2}}$ , onde  $\tau_0 = \frac{a^2 \xi^6 c_3^3}{(2a\xi^3 c_2^3 + 4\xi^5 C_2^5)}$ .*

A sua prova é uma aplicação simples do método probabilístico e da desigualdade de Janson [41]. A seguir fornecemos uma prova do lema 81 a partir dos lemas 83 e 84.

*Prova do Lema 81.* O lema 83(a) implica que, se  $G \cup G(n, \xi p)$  tem uma coloração própria, então existe um  $K \in CORE$  monocromático. Mas, pelo lema 83(b), com  $\tau = \tau_0$ , e pelo lema 84, temos que a probabilidade de algum  $K \in CORE$  ser monocromático é menor ou igual a  $e^{\tau_0 n^{3/2}} e^{-2\tau_0 n^{3/2}} = e^{-\tau_0 n^{3/2}} = o(1)$ . Logo a probabilidade de  $G \cup G(n, \xi p)$  ter uma coloração própria é  $o(1)$ . Consequentemente, a probabilidade de  $G \cup G(n, \xi p) \in \mathcal{R}$  é igual a  $1 - o(1)$ , como desejado.  $\square$

### A.5.1 Obtenção da Família *CORE*

Para construir a família de grafos *CORE* do lema 83, explora-se bastante a condição  $\mathbb{P}((G \cup M^*) \in \mathcal{R}) > 2\alpha$ .

Seja  $M$  um grafo balanceado qualquer com  $\rho(M) = 2$ ,  $|V(M)| = \nu$  e  $|E(M)| = 2\nu$ , cujos vértices são rotulados por  $x_1, \dots, x_\nu$ . Para toda sequência  $X = (v_1, \dots, v_\nu)$  de vértices distintos de  $G$ , seja  $M_X$  uma cópia de  $M$  com os vértices  $x_i$  mapeados sobre  $v_i$ ,  $1 \leq i \leq \nu$ .

Definimos então a família  $\chi$  dos  $X$  tais que  $G \cup M_X \in \mathcal{R}$ . Por hipótese, temos que  $|\chi| \geq 2\alpha n(n-1) \dots (n-\nu+1) = (2-o(1))\alpha n^\nu$ .

A família  $\chi$  é refinada sucessivamente para as famílias  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  e  $\chi_3$ , todas com cardinalidade  $\Theta(n^\nu)$ . Não descreveremos esse processo, apresentado em [27], limitando-nos a descrever os membros  $X$  da família  $\chi_3$ :

- $G \cup M_X \in \mathcal{R}$
- $X$  é um conjunto independente de  $G$
- Todo vértice de  $G$  tem no máximo dois vizinhos de  $G$
- $T(X)$  é isomorfo a um grafo fixo  $\mathcal{M}$  com  $\nu + \phi$  vértices,  $2\phi$  arestas e  $V(\mathcal{M}) = \{x_1, \dots, x_\nu, u_1, \dots, u_\phi\}$ , para  $\phi \leq 10C_2^2\nu/\alpha$ , onde  $T(X)$  é o grafo formado pelos caminhos de tamanho 2 (*tendas*) em  $G$  entre pares de vértices de  $X$  que são arestas em  $M_X$
- Existe uma partição  $\pi_0 = \{V_1, \dots, V_\nu, W_1, \dots, W_\phi\}$  de  $V(G)$  em  $\nu + \phi$  partes com mesmo tamanho  $m = n/(\nu + \phi)$ , tal que  $T(X)$  é consistente com  $\pi_0$ , ou seja,  $x_i \in V_i$  e  $u_j \in W_j$ ,  $\forall 1 \leq i \leq \nu, 1 \leq j \leq \phi$
- $\forall v \in V_1 \cup \dots \cup V_\nu, \forall 1 \leq j \leq \phi$ , temos que  $3m/4 \leq \deg_G(v, W_j) \leq 3m/2$

Para facilitar, ao invés de trabalhar com  $T(X)$ , trabalha-se com  $S(X) \subset T(X)$ , gerado desse removendo uma aresta (*perna direita*) de cada *tenda* de  $T(X)$ .

Como  $X$  é um conjunto independente em  $G$ , para  $X \in \chi_3$ , então  $S(X)$  será formado por várias *estrelas* e, por isso, será chamado de *constelação especial*.

Como  $T(X)$  é isomorfo a  $\mathcal{M}$ , segue que,  $\forall X \in \chi_3$ , todas as constelações  $S(X)$  são isomorfas entre si e, conseqüentemente, a um mesmo grafo que chamaremos de  $S$ .

Resumindo, uma *constelação* é uma cópia de  $S$  em  $G$  consistente com  $\pi_0$ . Uma *constelação especial* é uma cópia de  $S$  em  $G$  sobre uma sequência  $X \in \chi_3$  com  $S(X) = S$ . Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{S}$ , respectivamente, os conjuntos de todas as constelações e constelações especiais em  $G$ .

Essa análise estabelece uma forte ligação entre sequências  $X$  de vértices, tais que  $G \cup M_X \in \mathcal{R}$ , com um grafo  $S$ . Neste ponto, é aplicado então

o lema da regularidade para Subgrafos  $S$ , com o intuito de se construir a família  $CORE$  do lema 83, a partir dos blocos quase-aleatórios (políades) provenientes da regularização.

Mas, a regularização não pode ser feita sobre o conjunto de todas as constelações  $\mathcal{C}$ , mas sobre o das especiais  $\mathcal{S}$ , como citado. O lema da regularização para subgrafos é bem geral para permitir tal condicionamento.

Além disso, a regularização só pode ser aplicada se não existem subgrafos relativamente grandes e densos em arestas e em cópias de  $S$ , já que  $G$  é esparso. Com grande dificuldade, isso é provado, ou seja, prova-se que, com probabilidade  $1 - o(1)$ ,  $G \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{R}$  não possui tais subgrafos densos.

Finalmente, aplicando a regularização, obtemos um particionamento dos vértices em um refinamento  $\pi_1$  da partição  $\pi_0 = \{V_1, \dots, V_\nu, W_1, \dots, W_\phi\}$ , e um particionamento das arestas.

É definida então a família  $PRECORE$ , construída com os blocos dessas partições (as políades). Contrói-se então a família  $CORE$ , baseada em  $PRECOREs$ . Finalmente (e resumidamente), numa sequência de 3 lemas não tão longos em [27], são satisfeitas todas as restrições do lema 83, terminando a prova.

Apesar da falta de alguns detalhes nessa exposição, consideramos importante realizá-la, já que o lema da regularidade para Subgrafos é muito recente e não tão conhecido como os demais. Além disso, trouxe-nos técnicas envolvendo triângulos, limiares severos, entre outras, que poderão servir para o ataque a alguns de nossos problemas abordados.



## Apêndice B

# Aplicações de Herança de Uniformidade

### B.1 Versão Original

A aplicação da versão original da herança de uniformidade de Duke e Rödl pode ser vista em [14], na prova do Teorema 27 da seção 3.1.

### B.2 Versão Esparsa

A aplicação da versão esparsa da herança de uniformidade de Gerke, Kohayakawa, Rödl e Steger [29] pode ser vista na prova do Teorema 32 da seção 3.2. Pode ser vista também na prova do Teorema 72 da seção 4.6.1.

### B.3 Versão para Hipergrafos

A aplicação da versão para hipergrafos da herança de uniformidade de Mubayi e Rödl [51] pode ser vista na prova do Teorema 39 da seção 3.4.

A herança de uniformidade para hipergrafos (Lema 38) também tem sido aplicada sobre problemas de Ramsey-Turán para hipergrafos. Em particular, é usada em [52] para construir infinitamente muitos  $l$ -grafos cuja densidade de Ramsey-Turán é estritamente positiva e menor que a densidade de Turán.

Seja  $\mathcal{G}$  um  $l$ -grafo. O número de Turán  $ex(n, \mathcal{G})$  é o número máximo de arestas de um  $l$ -grafo  $\mathcal{H}$  com  $n$  vértices tal que  $\mathcal{H}$  não contém  $\mathcal{G}$ . A

densidade de Turán é o limite

$$\pi(\mathcal{G}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{ex}(n, \mathcal{G})}{\binom{n}{l}}.$$

Como visto em [52], é sabido que o limite  $\pi(\mathcal{G})$  existe.

A densidade de Ramsey-Turán  $\rho(\mathcal{G})$  é definida como em  $\pi(\mathcal{G})$ , mas restrito a  $l$ -grafos  $\mathcal{H}$  com conjuntos independentes pequenos  $o(n)$ . Uma outra variante  $\tilde{\rho}(\mathcal{G})$  é definida como em  $\pi(\mathcal{G})$ , mas com restrição mais forte para  $l$ -grafos  $\mathcal{H}$  densos, ou seja, todo conjunto de vértices de tamanho maior ou igual a  $\xi n$ ,  $0 < \xi < 1$ , tem densidade limitada inferiormente por algum valor fixo.

Por definição,  $0 \leq \tilde{\rho}(\mathcal{G}) \leq \rho(\mathcal{G}) \leq \pi(\mathcal{G})$ . No entanto, até pouco tempo não se sabia se algumas dessas desigualdades eram estritas, para algum  $l$ -grafo  $\mathcal{G}$ . Em [52], são provados vários resultados interessantes sobre essa questão.

Antes de apresentar os resultados que nos interessam, são necessárias algumas definições preliminares. Dizemos que um  $l$ -grafo  $\mathcal{H}_n^{(l)}$  é  $(\alpha, \xi)$ -uniforme se todo subgrafo induzido com  $\xi n$  vértices possui  $(\alpha \pm \xi) \binom{\xi n}{l}$  hiperarestas. Dizemos que um  $l$ -grafo  $\mathcal{H}_n^{(l)}$  é  $(\alpha, \xi)$ -denso se todo subgrafo induzido com  $\xi n$  vértices possui pelo menos  $\alpha \binom{\xi n}{l}$  hiperarestas.

Para definir  $\tilde{\rho}(\mathcal{G})$  adequadamente, recorre-se a noção de sequência  $\{\mathcal{H}_i\}$  de  $l$ -grafos, onde  $|V(\mathcal{H}_i)| \rightarrow \infty$  e  $|V(\mathcal{H}_{i+1})| > |V(\mathcal{H}_i)|$ .

Dizemos que a sequência  $\{\mathcal{H}_i\}$  é  $\mathcal{G}$ -livre se todos os  $l$ -grafos  $\mathcal{H}_i$ , exceto uma quantidade finita, são  $\mathcal{G}$ -livres, ou seja, não contém uma cópia de  $\mathcal{G}$ . Dizemos que a sequência  $\{\mathcal{H}_i\}$  contém  $\mathcal{G}$  se infinitamente muitos  $l$ -grafos  $\mathcal{H}_i$  contém uma cópia de  $\mathcal{G}$ .

Dizemos que uma sequência  $\{\mathcal{H}_i\}$  é  $\alpha$ -uniforme se, para todo  $\xi > 0$ , existe  $n_0$  tal que todo hipergrafo  $\mathcal{H}_n$ , para  $n > n_0$ , é  $(\alpha, \xi)$ -uniforme. Dizemos que uma sequência  $\{\mathcal{H}_i\}$  é  $\alpha$ -densa se, para todo  $\xi > 0$ , existe  $n_0$  tal que todo hipergrafo  $\mathcal{H}_n$ , para  $n > n_0$ , é  $(\alpha, \xi)$ -denso.

Nesse ponto, em [52] são definidas as densidades de Ramsey-Turán  $\rho_U(\mathcal{G})$  e  $\rho_D(\mathcal{G})$ , como:

$$\begin{aligned} \rho_U(\mathcal{G}) &= \sup\{\alpha: \text{existe sequência } \{\mathcal{H}_i\} \text{ } \alpha\text{-uniforme } \mathcal{G}\text{-livre}\} \\ &= \inf\{\alpha: \text{toda sequência } \{\mathcal{H}_i\} \text{ } \alpha\text{-uniforme contém } \mathcal{G}\} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \rho_D(\mathcal{G}) &= \sup\{\alpha: \text{existe sequência } \{\mathcal{H}_i\} \text{ } \alpha\text{-densa } \mathcal{G}\text{-livre}\} \\ &= \inf\{\alpha: \text{toda sequência } \{\mathcal{H}_i\} \text{ } \alpha\text{-densa contém } \mathcal{G}\} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Com essas definições, os autores provam com certa dificuldade que toda sequência  $\{\mathcal{H}_i\}$   $\alpha$ -densa contém uma subsequência  $\{\mathcal{H}'_{j_i}\}$   $\alpha$ -uniforme. Esse resultado é importante, pois é mais fácil trabalhar com  $l$ -grafos uniformes, ao invés de densos. Como consequência, temos que  $\tilde{\rho}(\mathcal{G}) = \rho_D(\mathcal{G}) = \rho_U(\mathcal{G})$ .

Com essas definições, finalmente podemos enunciar o resultado que nos interessa.

**Lema 85.** *Para todo  $\xi > 0$ , existe  $\hat{\mathcal{G}}$  contendo  $\mathcal{G}$  tal que  $\tilde{\rho}(\hat{\mathcal{G}}) > 1 - \xi$  e  $\tilde{\rho}(\hat{\mathcal{G}}) = \rho(\hat{\mathcal{G}})$ .*

Como corolário desse lema, temos que, se  $\tilde{\rho}(\mathcal{G}) > 0$ , então existe  $\hat{\mathcal{G}}$  contendo  $\mathcal{G}$  tal que  $0 < \tilde{\rho}(\hat{\mathcal{G}}) < \rho(\hat{\mathcal{G}}) \leq \pi(\hat{\mathcal{G}})$ .

Para a prova do Lema 85, utiliza-se o resultado abaixo, que possui uma aplicação da herança de uniformidade para hipergrafos. A “multiplicação” de um vértice  $v$  em um  $l$ -grafo  $\mathcal{G}$  é a substituição de  $v$  por  $l$  novos vértices  $v_1, \dots, v_l$ , substituindo cada hiperaresta  $E$  que contém  $v$  por  $l$  hiperarestas  $(E - v) \cup \{v_i\}$ , para cada  $1 \leq i \leq l$ , e adicionando a hiperaresta  $\{v_1, \dots, v_l\}$ .

**Lema 86.** *Se o  $l$ -grafo  $\mathcal{G}'$  é obtido do  $l$ -grafo  $\mathcal{G}$  após uma sequência de multiplicação de vértices, então  $\tilde{\rho}(\mathcal{G}') = \tilde{\rho}(\mathcal{G})$ .*

*Prova.* Seja  $\mathcal{G}'$  o  $l$ -grafo obtido de  $\mathcal{G}$  através da multiplicação de um único vértice  $v$  de  $\mathcal{G}$ .

Como  $\mathcal{G}' \supseteq \mathcal{G}$ , temos que  $\tilde{\rho}(\mathcal{G}') \geq \tilde{\rho}(\mathcal{G})$ . Para provar que  $\tilde{\rho}(\mathcal{G}') = \tilde{\rho}(\mathcal{G})$ , bastará provar que  $\tilde{\rho}(\mathcal{G}') \leq \tilde{\rho}(\mathcal{G})$ , mostrando que,  $\forall \tilde{\delta} > 0$ ,  $\tilde{\rho}(\mathcal{G}') \leq \tilde{\rho}(\mathcal{G}) + 2\tilde{\delta}$ .

Fixe  $\tilde{\delta} > 0$  pequeno e  $\alpha = \tilde{\rho}(\mathcal{G}) + 2\tilde{\delta}$ . Seja  $\{\mathcal{H}_i\}$  uma sequência  $\alpha$ -uniforme de  $l$ -grafos. Devemos provar que  $\{\mathcal{H}_i\}$  contém  $\mathcal{G}$ .

Aplique o Lema 38 (herança de uniformidade para hipergrafos), com entrada  $\tilde{\delta}$ ,  $\alpha$  e  $l$ , e saída  $\delta$ ,  $r$  e  $n_0$ , tomando  $\delta \ll 1/r^r$ , como observado na seção anterior.

Tome  $i$  grande tal que  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_i$  satisfaça os itens abaixo.  $\mathcal{H}$  existe pois  $\{\mathcal{H}_i\}$  é  $\alpha$ -uniforme.

- $|V(\mathcal{H})| \geq n_0$
- $\mathcal{H}$  é  $(\alpha, \delta)$ -uniforme

Nosso objetivo é provar que  $\mathcal{H}$  contém  $\mathcal{G}'$ , pois assim infinitamente muitos membros de  $\{\mathcal{H}_i\}$  contém  $\mathcal{G}'$  e, portanto,  $\{\mathcal{H}_i\}$  contém  $\mathcal{G}'$ .

Pelo Lema 38, todos, exceto  $e^{-r^{1/l}/20} \binom{n}{r}$ ,  $r$ -conjuntos de  $\mathcal{H}$  induzem um subhipergrafo  $\mathcal{H}'$   $(\alpha, \delta)$ -uniforme. Logo,  $\mathcal{H}'$  tem densidade  $\geq \tilde{\rho}(\mathcal{G}) + 2\tilde{\delta} - \tilde{\delta} = \tilde{\rho}(\mathcal{G}) + \tilde{\delta}$ . Como  $|V(\mathcal{H}')| = r$  e  $r$  é grande (pois  $\tilde{\delta} \rightarrow 0$ , como frisado na seção anterior), temos que  $\mathcal{H}' \supset \mathcal{G}$ , pois a densidade de  $\mathcal{H}$  é maior ou igual a  $\tilde{\rho}(\mathcal{G})$ .

Seja  $m = |V(\mathcal{G})|$ . Temos então que o número de cópias de  $\mathcal{G}$  em  $\mathcal{H}$  é

$$\geq \frac{1 - e^{-r^{1/l}/20} \binom{n}{r}}{\binom{n-m}{r-m}} = \frac{1 - e^{-r^{1/l}/20} \binom{n}{m}}{\binom{r}{m}} > \frac{1}{r^m} \binom{n}{m}$$

Seja  $\mathcal{F}$  o  $m$ -grafo consistindo das cópias de  $\mathcal{G}$  em  $\mathcal{H}$ , onde cada  $m$ -hiperaresta tem um vértice especial correspondente ao vértice  $v$  de  $\mathcal{G}$ , que é multiplicado. Para um  $(m-1)$ -conjunto  $M$ , seja  $C_M$  o número de arestas de  $\mathcal{F}$  que contém  $M$ , mas com o vértice especial fora de  $M$ . Assim:

$$\sum_{M, |M|=m-1} C_M = e(\mathcal{F}) > \frac{1}{r^m} \binom{n}{m}$$

Logo, existe  $M_0$ ,  $|M_0| = m-1$ , com

$$C_{M_0} > \frac{1}{r^m} \frac{\binom{n}{m}}{\binom{n}{m-1}} > \frac{n}{2mr^m} > \delta n,$$

já que  $\delta \ll 1/r^r$  e  $r \gg m$  e, portanto,  $\delta < 1/2mr^m$ .

Como  $\mathcal{H}$  é  $(\alpha, \delta)$ -uniforme, o conjunto dos vértices especiais correspondentes a  $M_0$  contém uma aresta em  $\mathcal{H}$  (muitas de fato). Seja  $\{v_1, \dots, v_l\}$  uma tal aresta dessa em  $\mathcal{H}$ . Logo, como  $M_0$  e  $v$  induzem uma cópia de  $\mathcal{G}$  em  $\mathcal{H}$ , então  $M_0$  e  $\{v_1, \dots, v_l\}$  induzem uma cópia de  $\mathcal{G}'$  em  $\mathcal{H}$ .  $\square$

Os próximos lemas fecham a prova do lema 85. Apesar de não utilizarem os conceitos de herança de uniformidade, consituem bom material para técnicas de prova. Algumas definições são necessárias.

Fixe  $l \geq 3$ . Seja  $\mathcal{G}_0$  o  $l$ -grafo com um vértice apenas. Para  $i \geq 1$ , seja  $\mathcal{G}_i$  o  $l$ -grafo obtido de  $l$ -cópias disjuntas de  $\mathcal{G}_{i-1}$ , adicionando todas as hiperarestas formadas por um vértice exatamente em cada cópia. Temos que  $\mathcal{G}_i$  contém  $l^i$  vértices.

Dizemos que um  $l$ -grafo é simples se cada duas arestas tem no máximo um vértice em comum. Para um  $l$ -grafo  $\mathcal{G}$ , seja  $\chi_S(\mathcal{G})$  o menor número de cores tais que cada classe de cor induz um  $l$ -grafo simples. Seja  $\alpha_S(\mathcal{G})$  o máximo tamanho de um subconjunto de vértices que induz um  $l$ -grafo simples. Claramente,

$$\chi_S(\mathcal{G}) \geq \frac{|V(\mathcal{G})|}{\alpha_S(\mathcal{G})}.$$

**Lema 87.**

$$\chi_S(\mathcal{G}_i) \geq \left(1 + \frac{1}{l-1}\right)^{i-1}$$

*Prova.* Basta provar que  $\alpha_S(\mathcal{G}_i) \leq l(l-1)^{i-1}$ , já que  $|V(\mathcal{G}_i)| = l^i$ . Faremos indução em  $i$ . O caso base  $i=0$  é trivial, pois  $\alpha_S(\mathcal{G}_0) = 1 \leq l/(l-1)$ .

Considere que o resultado vale para  $\mathcal{G}_{i-1}$ .  $\mathcal{G}_i$  contém  $l$  cópias de  $\mathcal{G}_{i-1}$ . Tomando 2 vértices de uma mesma cópia de  $\mathcal{G}_{i-1}$  em  $\mathcal{G}_i$  e 1 vértice de cada uma das outras  $l-1$  cópias, obtemos um subconjunto que não induz um  $l$ -grafo simples, pois tem duas arestas apenas, as quais tem em comum  $l-1$  vértices.

Logo,  $\alpha_S(\mathcal{G}_i) \leq \max\{l, (l-1)\alpha_S(\mathcal{G}_{i-1})\}$ . Ou seja, ou toma um vértice apenas de cada cópia, ou ignora uma cópia inteira e toma conjuntos máximos das demais cópias.

Logo, por indução,  $\alpha_S(\mathcal{G}_i) \leq (l-1)[l(l-1)^{i-2}] = l(l-1)^{i-1}$ .  $\square$

**Lema 88.**

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \rho(\mathcal{G}_i) = 1$$

*Prova.* Seja  $k+1 = \chi_S(\mathcal{A}_n)$ . Fixe  $\varepsilon > 0$  e seja  $\mathcal{A}_n$  um  $l$ -grafo *simples* com  $n$  vértices e  $\alpha(\mathcal{A}_n) \leq \varepsilon n$ . Aqui  $\alpha(\mathcal{A}_n)$  é o tamanho do conjunto independente máximo. Tal  $l$ -grafo existe para  $n$  grande por uma aplicação simples do método probabilístico de remoção. Assumimos que  $n \geq l/\varepsilon$ . Além disso, esta escolha de  $\mathcal{A}_n$  é feita, pois  $\rho$  trata de grafos com conjuntos independentes pequenos  $o(n)$ .

Seja  $\mathcal{H}_n$  um  $l$ -grafo com  $nk$  vértices consistindo de  $k$  cópias disjuntas de  $\mathcal{A}_n$ , adicionando como arestas todos os  $l$ -conjuntos com pelo menos 2 vértices de cópias distintas. Pela definição, temos que  $\alpha(\mathcal{H}_n) \leq \max\{l, \varepsilon n\} \leq \varepsilon n$ . Isso porque podemos tomar um conjunto independente máximo de cada cópia de  $\mathcal{H}_n$ .

Além disso,  $\chi_S(\mathcal{H}_n) \leq k$ , por causa das  $k$  cópias de  $\mathcal{A}_n$ , que é um  $l$ -grafo *simples*. Como  $k+1 = \chi_S(\mathcal{G}_i)$ , temos que  $\mathcal{H}_n \not\subseteq \mathcal{G}_i$ .

Além disso,  $\mathcal{H}_n$  tem densidade maior ou igual a

$$\frac{\binom{nk}{l} - k\binom{n}{l}}{\binom{nk}{l}} \geq 1 - k^{1-l}$$

Pelo Lema 87,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \chi_S(\mathcal{G}_i) = \infty$ . Logo,  $\rho(\mathcal{G}_i) \geq 1 - k^{1-l} \rightarrow 1$ , já que  $k+1 = \chi_S(\mathcal{G}_i)$ .  $\square$

**Lema 89.** Para todo  $i \geq 0$ , existe um  $l$ -grafo  $\mathcal{G}'$  obtido por multiplicações de vértices a partir de um único vértice tal que  $\mathcal{G}_i \subset \mathcal{G}'$

*Prova.* Por indução em  $i$ , com caso base  $i = 0$  trivial, já que  $\mathcal{G}_0$  é um vértice. Suponha que funciona para  $i - 1$ . Iniciando em um vértice  $v_1$ , forme por multiplicação a aresta  $\{v_1, \dots, v_i\}$ . Para cada  $v_i$ , realize multiplicações para produzir um  $l$ -grafo contendo  $\mathcal{G}_{i-1}$ . Esse grafo total contém  $\mathcal{G}_i$ .  $\square$

Finalmente, podemos terminar a prova do Lema 85.

*Prova do Lema 85.* Fixe  $\varepsilon > 0$ ,  $l \geq 3$  e um  $l$ -grafo  $\mathcal{G}$ . Pelo Lema 88, escolha  $t$  tal que  $\rho(\mathcal{G}_t) > 1 - \varepsilon$ . Escolha um vértice  $v$  de  $\mathcal{G}$  e, pelo Lema 89, realize multiplicações de vértices para transformar  $v$  em um  $l$ -grafo  $\mathcal{G}'$  contendo  $\mathcal{G}_t$ .

Considere o  $l$ -grafo  $\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{G}' \cup (\mathcal{G} - v)$ . Pelo Lema 86,  $\bar{\rho}(\hat{\mathcal{G}}) = \bar{\rho}(\mathcal{G})$ .

Como  $\mathcal{G}_t \subset \hat{\mathcal{G}}$ , temos que  $\rho(\hat{\mathcal{G}}) = \rho(\mathcal{G}_t)$ . Logo,  $\rho(\hat{\mathcal{G}}) \geq 1 - \varepsilon$ .  $\square$

# Bibliografia

- [1] N. Alon, R. Duke, H. Leffman, V. Rödl, R. Yuster. *The algorithmic aspects of the regularity lemma*, Journal of Algorithms **16** (1994), 80–109.
- [2] N. Alon, J. Spencer, *The probabilistic method*, WILEY, 2o Edition, (2000).
- [3] N. Alon, M. Krivelevich, *Testing  $k$ -colorability*, SIAM Journal Discrete Math **15** (2002), n.2, 211–227.
- [4] T. M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer-Verlag, New York (1976).
- [5] B. Bollobás, *Modern Graph Theory*, Springer-Verlag, New York (1998).
- [6] B. Bollobás, A. Thomason, *Threshold functions*, Combinatorica **7** (1987), 35–38.
- [7] F. Chung, *Regularity lemma for hypergraphs and quasi-randomness*, Random Structures and Algorithms **2** (1991), 241–252.
- [8] F. Chung, R. Graham, R. Wilson, *Quasi-random graphs*, Combinatorica **9** (1989), 345–362.
- [9] F. Chung, R. Graham, *Quasi-random classes of hypergraphs*, Random Structures and Algorithms **1** (1990), 105–124.
- [10] F. Chung, R. Graham, *Quasi-random set systems*, Journal Am. Math. Soc. **4** (1991), 151–196.
- [11] F. Chung, R. Graham, *Quasi-random subsets of  $\mathbb{Z}_n$* , Journal of Combinatorial Theory A **61** (1992), 64–86.

- [12] A. Czygrinow, B. Nagle, *On small subsystems of uniformly distributed 3-graphs*, manuscript (2007).
- [13] W. Deuber, *On van der Waerden's theorem on arithmetic progressions*, Journal of Combinatorial Theory A **32** (1982), 115–118.
- [14] R. Duke, V. Rödl, *On graphs with small subgraphs of large chromatic number*, Graphs and Combinatorics **1** (1985), n.1, 91–96.
- [15] R. Duke, H. Lefmann, V. Rödl, *A fast algorithm for computing the frequencies of subgraphs in a given graph*, SIAM J. Comp. **24** (1995), 598–620.
- [16] P. Erdős, *Some remarks on the theory of graphs*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 292–294.
- [17] P. Erdős, *Graph theory and probability*, Canad. J. Math. **11** (1959), 34–38.
- [18] P. Erdős, *Graph theory and probability II*, Canad. J. Math. **13** (1961), 346–352.
- [19] P. Erdős, A. Rényi, *On the Evolution of Random Graphs*, Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. **5** (1960), 17–61.
- [20] P. Erdős, M. Simonovits, *A limit theorem in graph theory*, Studia Sci. Math. Hungar. **1** (1966), 51–57.
- [21] P. Erdős, A. H. Stone, *On the structure of linear graphs*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 1089–1091.
- [22] P. Erdős, P. Turán, *On some sequences of integers*, J. London Math. Soc. **11** (1936), 261–264.
- [23] P. Frankl, V. Rödl, *Large triangle-free subgraphs in graphs without  $K^4$* , Graphs and Combinatorics **2** (1986), 135–244.
- [24] P. Frankl, V. Rödl, *The uniformity lemma for hypergraphs*, Graphs and Combinatorics **8** (1992), n.4, 309–312.
- [25] P. Frankl, V. Rödl, *Extremal problems on set systems*, Random Structures and Algorithms **20** (2002), n.2, 131–164.
- [26] E. Friedgut, *Sharp thresholds of graph properties, and the  $k$ -sat problem*, Journal of the American Math. Soc. **12** (1999), n.4, 1017–1054.



- [27] E. Friedgut, V. Rödl, A. Ruciński, P. Tetali, *A sharp threshold for random graphs with a monochromatic triangle in every edge coloring*, Memoires of the AMS **179** n.845 (2006).
- [28] H. Furstenberg, *Ergodic behaviour of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions*, J. Anal. Math. **31** (1977), 204–256.
- [29] S. Gerke, Y. Kohayakawa, V. Rödl, A. Steger, *Small subsets inherit sparse  $\varepsilon$ -regularity*, Journal of Combinatorial Theory Series B (2006) (aceito para publicação).
- [30] S. Gerke, T. Schickinger, A. Steger,  *$K^5$ -free subgraphs of random graphs*, Random Structures and Algorithms **24** (2004), 194–232.
- [31] O. Goldreich, S. Goldwasser, D. Ron, *Property testing and its connection to learning and approximation*, Journal ACM **45** (1998), n.4, 653–750.
- [32] R. L. Graham, V. Rödl, A. Ruciński, *On Schur properties of random subsets of integers*, J. Number Theory **61** (1996), 388–408.
- [33] R. L. Graham, B. L. Rothschild, *Ramsey’s theorem for  $n$ -parameter sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **159** (1971), 257–292.
- [34] R. L. Graham, B. L. Rothschild, *A short proof of van der Waerden’s theorem on arithmetic progressions*, Proc. Amer. Math. Soc. **42** (1974), 356–386.
- [35] P. E. Haxell, Y. Kohayakawa, T. Łuczak, *Turán’s extremal problem in random graphs: forbidding even cycles*, Journal of Combinatorial Theory B **64** (1995), 273–287.
- [36] P. E. Haxell, Y. Kohayakawa, T. Łuczak, *Turán’s extremal problem in random graphs: forbidding odd cycles*, Combinatorica **16** (1996), n.1, 107–122.
- [37] P. E. Haxell, B. Nagle, V. Rödl, *An algorithmic version of hypergraph regularity*, manuscript (2007).
- [38] D. R. Heath-Brown, *Integer sets containing no arithmetic progressions*, J. London Math. Soc. **35** (1987), 385–394.
- [39] L. K. Hua, *Additive theory of prime numbers*, American Mathematical Society (1965).

- [40] L. K. Hua, *Introduction to number theory*, Springer-Verlag (1982).
- [41] S. Janson, T. Łuczak, A. Ruciński, *An exponential bound for the probability of nonexistence of a specified subgraph of a random graph*, Proceedings of Random Graphs **5** (1987), 73–87.
- [42] Y. Kohayakawa. *The regularity lemma of Szemerédi for sparse graphs*, manuscript, (1993).
- [43] Y. Kohayakawa, C. G. T. Moreira, *Tópicos em combinatória contemporânea*, 23<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 2001.
- [44] Y. Kohayakawa, T. Łuczak, V. Rödl. *Arithmetic progressions of length three in subsets of a random set*, Acta Arith. **75** (1996) 133–163.
- [45] Y. Kohayakawa, T. Łuczak, V. Rödl. *On  $K^4$ -free subgraphs of random graphs*, Combinatorica **17** (1997), 173–213.
- [46] Y. Kohayakawa, V. Rödl. *Szemerédi’s regularity lemma for sparse graphs*, Foundations of computational mathematics (Berlin, Springer) **16** (1997) 216–230.
- [47] Y. Kohayakawa, V. Rödl. *Szemerédi’s regularity lemma and quasi-randomness*, In: B.Reed; C.Linhares-Sales (Org.). Recent advances in algorithms and combinatorics, New York, Spriger Verlag, (2003) 289–351.
- [48] Y. Kohayakawa, V. Rödl, J. Skokan, *Hypergraphs, quasi-randomness, and conditions for regularity*, Journal Combin. Thory. Ser.A **97** (2002), 307–352.
- [49] Y. Kohayakawa, B. Leite, *MSc. Thesis*, IME-USP, São Paulo (2005).
- [50] J. Komlós, M. Simonovits. *Szemerédi’s regularity lemma and its applications in graph theory*, Combinatorics, Paul Erdős is eighty **2** (1993), 295–352.
- [51] D. Mubayi, V. Rödl, *Uniform edge distribution in hypergraphs is hereditary*, Electronic Journal of Combinatorics **11** (2004), no. 1, Research Paper R55, 32pp.
- [52] D. Mubayi, V. Rödl, *Supersaturation for Ramsey-Turán problems*, Combinatorica (2006) (aceito para publicação).

- [53] B. Nagle, V. Rödl, *Regularity properties for triple systems*, Random Structures and Algorithms **23** (2003), 264–332.
- [54] B. Nagle, V. Rödl, M. Schacht, *A short proof of the 3-graph counting lemma*, Discrete Mathematics (2006) (aceito para publicação).
- [55] H.J. Prömel, A. Steger, *Excluding induced subgraphs. III. A general asymptotic*, Random Structures and Algorithms **3** (1992), no. 1, 19–31.
- [56] V. Rödl, *On universality of graphs with uniformly distributed edges*, Discrete Mathematics **59** (1986), 125–134.
- [57] V. Rödl, A. Ruciński, *Random graphs with monochromatic triangles in every edge coloring*, Random Structures and Algorithms **5** (1994), 253–270.
- [58] V. Rödl, A. Ruciński, *Ramsey properties of random hypergraphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **81** (1998), no. 1, 1–33.
- [59] V. Rödl, J. Skokan, *Regularity lemma for uniform hypergraphs*, Random Structures and Algorithms **25** (2004), 1–42.
- [60] K. F. Roth. *On certain sets of integers*, J. London Math. Soc. **28** (1953), 104–109.
- [61] A. Sárközy, *On difference sets of sequences of integers*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. I **31** (1978), 125–149.
- [62] I. Schur, *Über die Kongruenz  $x^m + y^m = z^m \pmod{p}$* , Jahresb. Deutsche Math. Verein **25** (1916), 114–117.
- [63] E. Szemerédi, *On sets of integers containing no  $k$  elements in arithmetic progressions*, Acta Arith. **27** (1975), 299–345.
- [64] E. Szemerédi, *Regular partitions of graphs*, Proceedings, Colloque Inter. CNRS (J. C. Fournier, M. Las Vergnas, and D. Sotteau, Eds.) (1978), 399–401.
- [65] A. D. Taylor, *A note on van der Waerden's theorem*, Journal of Combinatorial Theory A **33** (1982), 215–219.
- [66] P. Turán, *On an extremal problem in graph theory*, Mat. Fiz. Lapok **48** (1941), 436–452, em húngaro.
- [67] B. L. van der Waerden, *Beweis einer Baudetschen Vermutung*, Nieuw Archief voor Wiskunde **15** (1927), 212–216.