Resumo de Artigo em Teoria dos Grafos

Rudini Sampaio

Yury Makarychev, A short proof of Kuratowski's graph planarity criterion, *Journal of Graph Theory*, Vol. 25, 129-131 (1997).

RESUMO

Nós apresentaremos uma nova e curta prova combinatória da parte de suficiência do bem conhecido critério de planaridade de grafos de Kuratowski. Os principais passos são provar que para um grafo não-planar minimal G e qualquer aresta xy:

(1) G-x-y não contém um θ-*subgrafo;*
(2) G-x-y é homeomorfo ao círculo;
(3) G é ou um K_5 ou um $K_{3,3}$

Palavras chaves: planaridade de grafos, θ-*subgrafo, grafo menor, teorema de Kuratowski*

Em 1930, K. Kuratowski publicou seu bem conhecido critério de planaridade de grafos: um grafo é planar se e só se não contém um subgrafo homeomorfo ao K_5 ou ao $K_{3,3}$. Desde então, muitas provas novas e mais curtas desse critério apareceram. Nesse artigo, nós apresentamos uma prova combinatória curta da parte "*se*". Ela é baseada na contração de uma aresta, mas evita a redução para grafos 3-conexos. Um θ-subgrafo é um subgrafo homeomorfo ao $K_{3,2}$.

Lema 1: Se $xy \in E(G)$, então G-x-y não contém um θ-subgrafo.

Prova:

Por contradição, suponha que G-x-y contém um θ-subgrafo. Como G é minimal, G/xy é planar. Considere uma representação planar de G/xy. Seja $G' = G\text{-}x\text{-}y = (G/xy)\text{-}xy$. Como G é minimal, podemos considerar uma representação planar de G/xy na qual xy não está na face externa. Seja F o subgrafo de G' que limita a face de G' que contém o vértice xy na representação planar de G/xy. Temos que F é exo-planar e, por isso, não contém um θ-subgrafo (lista.3 ex.2). Mas, como G'contém, temos que existe uma aresta $e \in E(G')\text{-}E(F)$. Como toda floresta T é planar e toda representação planar de T não gera regiões fechadas, temos que F não é uma floresta, já que contém xy em seu interior na representação planar de G/xy. Logo, F contém um circuito C. Além disso, o θ-subgrafo de G' não pode estar todo no interior de F, pela definição de F, e assim, podemos assumir que C contém xy em seu interior e contém e em seu exterior, na representação planar de G/xy.

Seja $extC$ o conjunto dos vértices no exterior de C na representação planar de G/xy. Também pela definição de F, nenhum par de vértices em C é ligado por um caminho no interior de C, ou seja, em $G'\text{-}E(C)\text{-}E(extC)$. Isso significa que existe representação planar de $G\text{-}E(extC)$, que é planar pela minimalidade de G, na qual C é a face externa. Essa representação pode ser combinada com a de G', acrescentando $extC$, gerando uma representação planar de G, contradizendo a sua não-planaridade.

Lema 2: Se $xy \in E(G)$, então G-x-y não contém dois vértices de grau um.

Prova:

Por contradição, sejam u e v vértices de grau 1 em G-x-y. Pela minimalidade de G, seus vértices tem grau maior que 2, senão contraindo uma de suas arestas, teríamos um grafo planar para o qual toda representação planar poderia ser extendida para uma representação planar de G.

Como u e v têm grau 1 em G-x-y, então eles devem ser adjacentes a x e y, e devem ter grau 3 em G. Como $\{x,y,u,v\}$ induz um K_4-e, e $K_{2,3}$ é uma subdivisão do K_4-e, temos um θ-subgrafo em $\{x,y,u,v\}$. Assim, pelo Lema 1, toda aresta de G tem uma de suas extremidades em $\{x,y,u,v\}$, senão sua remoção manteria o θ-subgrafo. Como $\forall z \in V(G) \setminus \{x,y,u,v\}$, z também tem grau maior que 2 em G, z é ligado a pelo menos 3 vértices de $\{x,y,u,v\}$.

Como u e v têm grau 3 em G, e são ligados a x e y, devem existir no máximo 2 vértices em G além de $\{x,y,u,v\}$, um adjacente a u e outro a v. Portanto, G é um dos grafos da Figura 1. Os grafos representam os casos em que u e v são adjacentes, possui um vizinho em comum ou possuem vizinhos distintos. Todos eles são planares, contradizendo a não-planaridade de G.

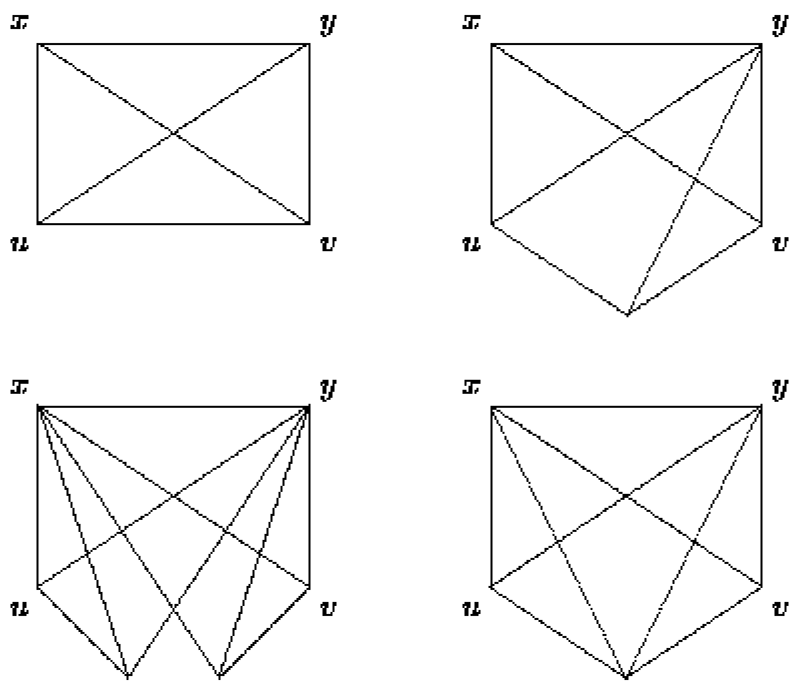

Figura 1: grafos do Lema 2

Lema 3: Se $xy \in E(G)$, então G-x-y é um circuito.
Prova:

Seja $G' = G\text{-}x\text{-}y$. Pelo Lema 1, G' não contém um θ-subgrafo. Se algum bloco (um subgrafo 2-conexo maximal ou uma aresta de corte) de G' não é uma aresta, então ele certamente contém um circuito. Se existe no bloco um caminho entre vértices do circuito e disjunto ao circuito, temos um subgrafo homeomorfo ao K_4-e e, portanto, homeomorfo ao $K_{2,3}$ (θ-subgrafo). Logo, todo bloco de G' é um circuito ou uma aresta.

Por contradição, suponha que G' não é um circuito. Como G' também não é uma aresta, a árvore de blocos de G' contém mais de um bloco e, portanto, pelo menos dois deles têm grau 1 na árvore. Pelo Lema 2, G' não tem dois vértices de grau 1. Logo, um dos blocos de grau 1 da árvore de blocos não é uma aresta, ou seja, é um circuito, denotado por C. Temos que C contém apenas um vértice de corte v de G', senão C não seria maximal nem teria grau 1 na árvore de blocos. Como mostrado na prova do Lema 2, os vértices de G têm grau maior que 2. Como os vértices de C-v têm grau menor ou igual a 2 em G', então todos eles são adjacentes a x ou y em G. Como C-v tem pelo menos 2 vértices a e b (vizinhos de v em C), temos 3 caminhos internamente disjuntos entre a e b em G, a saber: 2 em C e um por x e/ou y. Logo G contém uma subdivisão do K_4-e, ou seja, um θ-subgrafo.

Assim, pelo Lema 1, toda aresta de G tem uma de suas extremidades em $C \cup \{x,y\}$, senão sua remoção manteria o θ-subgrafo. Esse resultado, acrescido do fato de G' também não conter vértices isolados, já que os vértices de G têm grau maior que 2, implica que todos os outros blocos de G' (exclusive C) são arestas para v. Pelo Lema 2, existe apenas um deles, denotado por uv. Como u tem grau 1 em G', u deve ser adjacente a x e y em G.

Suponha que existe em C um vértice z além de v, a e b. Logo, pelo princípio da casa dos pombos, x ou y possui duas arestas para C-v; sem perda de generalidade, x. Além disso, x e y possuem pelo menos uma aresta para C-v, pois têm grau maior que 2. Logo, existem 3 caminhos internamente disjuntos de x para z em G', a saber: (1) se $xz \in E(G)$, um pela aresta xz, outro por a e outro por b; (2) se $xz \notin E(G)$, um pela aresta yz, outro por a e outro por b.

Logo, G' contém uma subdivisão do K_4-e, ou seja, um θ-subgrafo, o que contradiz o Lema 1.

Portanto, C contém apenas 3 elementos v, a e b. Logo G é o 3-prisma (Figura 2), que é planar, contradizendo a não-planaridade de G.

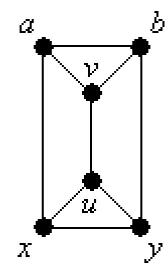

Figura 2: 3-prisma

Prova do critério de Kuratowski:

Sejam x_1 e x_2 vértices adjacentes de um grafo G não-planar minimal. Seja $G'=G\text{-}x_1\text{-}x_2$. Pelo Lema 2, temos que G' é um circuito.

Seja $u \in G$ um vértice adjacente a $x_{i,\ i=1,2}$, mas não adjacente a $x_{k,\ k=1,2,\ k\neq i}$. Seja v um vértice adjacente a u no circuito G'. Se v é adjacente a x_i, pela minimalidade de G, G-vx_i é planar. Podemos então obter uma representação planar de G, adicionando a aresta vx_i a uma representação planar de G-vx_i, o que contradiz a não-planaridade de G.

Portanto, ou todo vértice de G' é adjacente a x_1 e x_2, ou os vértices de G' adjacentes a x_1 e x_2 estão alternados no circuito G', pelo fato anterior e pela minimalidade de G.

No primeiro caso, $G \supseteq K_5$, e no segundo $G \supseteq K_{3,3}$.