From ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização

Manuscritos: Combinações

Combinação - Número de subconjuntos

Voltamos a usar **a imagem de caixas e bolas** para visualizar o problema que passamos a tratar. Desta vez, estamos diante do problema de guardar três bolas, todas elas de cor vermelha, em dez caixas numeradas $1, 2, \cdots, 10$. A questão que se pode levantar é quanto ao número de maneiras que as bolas podem ser guardadas, quando em cada caixa só cabe uma bola. Suponha que possamos pintar as três bolas vermelhas com tonalidades diferentes: vermelho-claro, vermelho-vivo e vermelho-escuro, de forma que elas se tornem distintas a um observador mais atento. Então, esse observador diria que o número de maneiras de colocar essas bolas em 10 caixas é P_3^{10}, o que corresponde **ao número de funções injetoras do conjunto de bolas no conjunto de caixas**. No entanto, algumas dessas funções correspondem, na verdade, a uma mesma relação aos olhos de um observador que não esteja atento o suficiente para fazer a distinção das tonalidades. Para este segundo observador, as opções

1. a bola vermelho-claro na primeira caixa, a bola vermelho-vivo na segunda caixa e a vermelho-escuro na terceira caixa; e
2. a bola vermelho-escuro na primeira caixa, a bola vermelho-vivo na segunda caixa e a vermelho-claro na terceira caixa

pareceriam iguais. De fato, todas as formas de permutar as bolas, podem ser "casadas" em grupos de seis quando não diferenciamos os tipos de vermelho (cada grupo de seis corresponde às possíveis permutações entre as tonalidades de vermelho). Logo, o número de maneiras de guardar três bolas vermelhas em dez caixas numeradas é

$$\frac{10 \times 9 \times 8}{3!},$$

porque há $3!$ maneiras diferentes de guardar três bolas com diferentes tonalidades de vermelho, que devem contar como apenas uma maneira, se não queremos diferenciá-las.

> ***Definição*** *(Combinação) Dados dois conjuntos A e B, com $|A| = 1$ e $|B| = n$, e um número natural $q > 0$, o número de relações do tipo $R \subseteq A \times B$ possuindo exatamente q pares ordenados é dado por*
>
> $$C_q^n = \frac{P_q^n}{q!} = \frac{n!}{(n-q)!q!}.$$

Algumas observações podem ser feitas com relação à definição acima. A primeira delas é que C_r^n corresponde exatamente ao número de maneiras de escolher r dentre n objetos diferentes. Em outras palavras, há C^n_r subconjuntos de cardinalidade r de um conjunto com n elementos.

> ***Exemplo*** *Suponha que um nutricionista deseja fazer o planejamento semanal do cardápio de um restaurante, incluindo peixe três vezes por semana. O número de maneiras de fazê-lo é*
>
> $C^7_3 = \frac{7!}{3!4!} = 35$

> ***Exemplo*** *Quantas são as sequências binárias de tamanho 32 com exatamente sete 0's? A resposta é* C^{32}_7*, pois o problema pode ser visto com colocar sete 0's em 32 caixas numeradas, colocando-se 1's nas caixas vazias restantes.*

> ***Exemplo*** *Repetir o caso anterior para sequências contendo os algarismos 0, 1 ou 2. Como para cada escolha das posições dos sete 0's, podemos completar as demais 25 posições restantes usando dois algarismos (o 1 e o 2), temos*
>
> $2^{25}C^{32}_7$

A segunda observação com respeito à **definição de combinação** é que $C^n_r = C^n_{n-r}$, o que pode ser derivado diretamente da fórmula apresentada na referia definição. Existe porém um argumento combinatorial simples que nos ajuda a interpretar o número de combinações como o número de subconjuntos de um conjunto: escolher r dentre n elementos de um conjunto pode ser feito retirando $n - r$ elementos do mesmo.

***Exemplo** Suponha que desejamos formar comitês de um conjunto de 11 senadores. Podemos formar $C_5^{11} = 462$ comitês com 5 membros. Se desejamos que um senador A seja um membro fixo dos comitês, podemos formar $C_4^{10} = 210$ comitês com 5 membros. Se, ao contrário, desejamos excluir um senador A de todos os comitês, podemos formar $C_5^{10} = 252$ comitês com 5 membros. Se fixamos dois senadores A e B para participarem de todos os comitês, podemos formar $C_3^9 = 84$ comitês com 5 membros. Se fixamos o senador A para participar de todos comitês e o senador B para ser excluído de todos eles, podemos formar $C_4^9 = 126$ comitês com 5 membros. Logo, se desejamos comitês com a participação de pelo menos um dos senadores A ou B, podemos formar*

$$84 + 126 + 126 = 336$$

comitês com 5 membros. Uma outra forma de obter esse número é subtraindo, do número total de comitês, o número de comitês que excluem dois senadores A e B. Ou seja,

$$C_5^{11} - C_5^9 = 462 - 126 = 336\,.$$

A terceira observação é

$$C_r^n + C_{r+1}^n = C_{r+1}^{n+1}$$

conhecida como *Relação de Stifel*. Novamente, essa relação pode ser derivada diretamente da **definição de combinação**. Porém, ela pode também ser interpretada da seguinte maneira. Suponha um conjunto A com $n+1$ elementos. Como sabemos, há C_{r+1}^{n+1} subconjuntos de A com $r+1$ elementos. Esses subconjuntos podem ser separados em dois grupos. O primeiro formado pelos subconjuntos que possuem um determinado elemento $a \in A$, e o segundo pelos subconjuntos que não possuem a. No primeiro caso, há C_r^n possibilidades, pois são as possibilidades de escolher r elementos em $A - \{a\}$. No segundo caso, o número de possibilidades é C_{r+1}^n, correspondendo às maneiras de escolher $r+1$ elementos em $A - \{a\}$.

Uma aplicação da noção de combinação, e da Relação de Stifel, ocorre na determinação dos coeficientes dos termos de $(x+y)^n$, onde x, y e n são **números naturais**. Considerando que $(x+y)^n$ é a multiplicação de n termos na forma

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y),$$

temos que cada termo do somatório resultante é obtido escolhendo-se o x ou o y em cada termo dessa multiplicação, e multiplicando-se os elementos escolhidos. Assim sendo, para todo r entre 0 e n, se escolhermos x em r termos da multiplicação, escolheremos y em $n-r$ termos. Em outras palavras,

$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} c_r x^r y^{n-r}$.

A questão é determinar os coeficientes desses termos. Ora, cada c_r corresponde à quantidade de maneiras diferentes de escolher r **vezes o** x, que é exatamente C_r^n. Esse fato também pode ser provado por indução em n.

> ***Teorema*** *(Binômio de Newton) Se x, y e n são* ***números naturais****\footnote{Em realidade, esse resultado é válido quando x e y são números reais.}, então*
>
> $$(x+y)^n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ \sum_{r=0}^{n} C^n\_x^r y^{n-r}, & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Demonstração: Por **indução** em n. A igualdade vale trivialmente para $n = 0$. Tomando um valor $n > 0$, podemos escrever

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)^{n-1}$$

Pela hipótese de indução, chegamos a

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= (x+y)\sum_{r=0}^{n-1} C_r^{n-1} x^r y^{n-r-1} \\
&= x\sum_{r=0}^{n-1} C_r^{n-1} x^r y^{n-r-1} + y\sum_{r=0}^{n-1} C_r^{n-1} x^r y^{n-r-1} \\
&= \sum_{r=0}^{n-1} C_r^{n-1} x^{r+1} y^{n-r-1} + \sum_{r=0}^{n-1} C_r^{n-1} x^r y^{n-r} \\
&= C_0^{n-1} x^0 y^n + \sum_{r=1}^{n-1} (C_{r-1}^{n-1} + C_r^{n-1}) x^r y^{n-r} + C_{n-1}^{n-1} x^n y^0 \\
&= \sum_{r=0}^{n} C_r^n x^r y^{n-r}
\end{aligned}$$

Observe que no penúltimo passo identificamos os coeficientes correspondendo aos termos de mesmo expoente em x, e que a **Relação de Stifel** foi usada no último passo. □

O teorema acima nos permite facilmente concluir que

$$C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n = 2^n$$

e

$$C_0^n - C_1^n + C_2^n - \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$$

O primeiro significa o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos, e o segundo indica que a soma do número de subconjuntos de cardinalidade par é igual ao número de subconjuntos de cardinalidade ímpar.

Exemplo *Quantos termos possui o somatório do Princípio da Inclusão e Exclusão? Para cada* j*, há* C_j^r *termos com* j *conjuntos. A soma de todos os termos é* $(1+1)^r - C_0^r = 2^r - 1$*. Esse fato é uma má notícia: significa que o número de termos cresce exponencialmente com o número de conjuntos. Por essa razão, torna-se inviável calcular a cardinalidade da união usando o Princípio da Inclusão e Exclusão para uma quantidade de conjuntos que nem precisa ser muito grande. Fato semelhante parece se repetir em uma série de outros problemas, assunto para as nossas discussões sobre complexidade de problemas e algoritmos.*

Combinação com permutação

Nosso **primeiro exemplo de combinação** pode ser ligeiramente modificado, dizendo que devemos colocar cinco bolas, duas vermelhas, uma preta e duas verdes, em dez caixas numeradas. Vamos novamente usar tonalidades de vermelho, vermelho-claro e vermelho-escuro, para diferenciar as duas bolas vermelhas. Usamos também as tonalidades verde-claro e verde-escuro para as bolas verdes. Desta vez, se observarmos as permutações

1. a bola vermelho-claro na primeira caixa, a bola preta na segunda caixa, a vermelho-escuro na terceira caixa, a verde-claro na quinta caixa e a verde-escuro na sétima caixa; e
2. a bola vermelho-escuro na primeira caixa, a bola preta na segunda caixa, a vermelho-claro na terceira caixa, a verde-escuro na quinta caixa e a verde-claro na quarta caixa,

constatamos, a partir dos comentários anteriores, que elas são iguais quando não distinguimos as tonalidades de vermelho e verde. Logo, há $\frac{P_5^{10}}{2!2!}$ maneiras diferentes de guardar duas bolas vermelhas, uma bola preta e duas bolas verdes em 10 caixas numeradas. De uma maneira geral, temos a seguinte definição.

Definição *(Combinação com permutação) Dados dois conjuntos* A *e* B*, com* $|A| = r$ *e* $|B| = n$*, e números naturais* $q_a > 0$*, para todo* $a \in A$*, o número de relações do tipo* $R \subseteq A \times B$ *tal que* R *possui exatamente*

1. q_a *pares ordenados envolvendo o elemento* a *na primeira coordenada, para todo* $a \in A$*; e*
2. *no máximo 1 par ordenado envolvendo o elemento b na segunda coordenada, para todo* $b \in B$

é dado por

$$\frac{P_q^n}{q_1!q_2!\ldots q_r!},$$

onde $q = \sum_{a \in A} q_a$*.*

Nós podemos derivar uma fórmula geral acima usando o exemplo de guardar bolas em caixas. Neste caso, desejamos determinar o número de maneiras de guardar r bolas coloridas em n caixas numeradas, onde q_1 bolas são de uma cor, q_2 bolas são de uma segunda cor etc. O primeiro passo seria considerar que todas as cores são distintas, e contar as diferentes maneiras de arrumá-las nas caixas (sempre com no máximo 1 bola em cada caixa). O número obtido é exatamente o número de arrumações das bolas nas caixas, ou seja, P_r^n. Tomemos uma dessas arrumações das bolas. Podemos observar que essa arrumação não é afetada quando permutamos as q_1 bolas da primeira cor nas caixas em que elas foram colocadas, ou quando permutamos as q_2 bolas da segunda cor nas caixas em que elas foram colocadas, e assim por diante até as q_r bolas da r-ésima cor nas caixas em que elas foram colocadas. Por outro lado, se todas as r bolas foram coloridas diferentemente, qualquer permutação descrita acima é considerada como uma nova arrumação das r bolas. Como consequência, cada maneira de arrumar r bolas coloridas não necessariamente distintas corresponde a $q_1!q_2!\ldots q_r!$ maneiras de arrumar r bolas coloridas distintas.

Exemplo *Quantas são as sequências ternárias (contendo os algarismos 0, 1 ou 2) de tamanho 32 com exatamente sete 0's e quatro 1's? A resposta é*

$$\frac{P_{11}^{32}}{7!4!}$$

Exemplo *O número de mensagem diferentes que podem ser formadas por sequências de três barras e dois pontos é*

$$\frac{5!}{3!2!} = 10.$$

Exemplo *Suponha que desejamos determinar o número de maneiras de sentar 5 garotos em 12 cadeiras enfileiradas. Observando que cada garoto ocupa uma cadeira, o problema pode ser visto como o de contar as permutações de 12 objetos, dividos em cinco garotos (que tornam distintas 5 das 12 cadeiras) e 7 cadeiras vazias (tomadas como sendo sete objetos do mesmo tipo).* ***O número que procuramos é dado por****:*

$$\frac{12!}{7!}.$$

Combinação com repetição

Suponha que desejamos guardar r bolas de cor igual em n caixas numeradas, sem restrições quanto ao número de bolas em cada caixa. O número de maneiras de fazê-lo é dado na definição a seguir.

Definição *(Combinação com repetição) Dados dois conjuntos A e B, com* $|A| = 1$ *e* $|B| = n$*, e um número natural* $q > 0$*, é possível produzir uma sequência de r pares ordenados de*

$A \times B$, permitindo repetições de pares ordenados na sequência, de

$$\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = C_r^{n+r-1}$$

maneiras diferentes.

Isso pode ser visto como produzir sequências binárias com $n+1$ 1's e r 0's, com um 1 no início e 1 um no final da sequência. Nesse caso, deve-se usar a seguinte imagem: a sequência de $n+1$ 1's (sem zeros) produz n espaços entre os 1's. Esses espaços devem ser vistos como as caixas inicialmente vazias. Os r 0's (ou seja, as bolas) devem ser colocadas entre os 1's (ou seja, nas caixas). Vendo sob esse ângulo, o número de sequências binárias de $(n+1+r)-2$ (devido aos dois 1's fixos do início e fim da sequência) com r 0's é igual ao número de maneiras de guardar r bolas iguais em n caixas numeradas sem restrição de capacidade. Já vimos que **o número de tais sequências binárias** é

$$C_r^{n+r-1}.$$

Exemplo *Quantas são as peças de dominó ? São 7 os valores possíveis para cada um dos dois lados do dominó (0,1,2,3,4,5,6) e os dois lados podem ter o mesmo valor. Logo, desejamos guardar duas bolas (os dois lados do dominó) em 7 caixas (os valores permitidos), sem restrições quanto à capacidade de cada caixa. Esse número é*

$$C_2^{7+2-1} = C_2^8 = 28.$$

Exemplo *Quais são os resultados possíveis quando três dados são jogados ? Cada resultado pode ser visto com uma alocação de 3 bolas (um resultado para cada dado) a 6 caixas (os resultados possíveis), sem restrições quando à capacidade das caixas (pois os resultados dos dados não são necessariamente distintos). Esse número é*

$$C_3^{6+3-1} = C_3^8 = 56.$$

Exemplo *Existe uma maneira alternativa* ***à contagem de combinações com permutação*** *de se obter o número de maneiras de sentar 5 garotos em 12 cadeiras. Suponha que nós desejamos primeiro permutar os 5 garotos na fileira de cadeiras: há $5!$ maneiras de fazê-lo. Para cada uma dessas maneiras, podemos contar quantas maneiras há de inserir as 7 cadeiras vazias entre quaisquer dois garotos ou nas duas extremidades. Esse problema torna-se então o problema de guardar 7 bolas de cor igual em 6 caixas. Então o número de maneiras de fazê-lo é:*

$$5! \times C_7^{6+7-1} = 5! \times \frac{12!}{7!5!} = \frac{12!}{7!}$$

Suponha que nós desejamos sentar os garotos de tal forma que não haja dois garotos sentados cadeiras vizinhas. Logo há quatro cadeiras vazias cuja a posição é fixa. Logo, *sobram apenas três bolas de cor igual para colocar nas "caixas":*

$$5! \times C_3^{6+3-1} = 5! \times \frac{8!}{3!5!} = \frac{8!}{3!}$$

Originário de http://www.lia.ufc.br/~pargo/index.php/Manuscritos/Combinacoes
Pagina modificada em 27/04/2011 09:43