From ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização

Manuscritos: Permutações

Permutação sem repetição - Número de funções injetoras

Considere o problema de guardar três bolas coloridas, uma preta, uma azul e uma verde, em 3 caixas, numeradas 1,2,3. Nós desejamos saber o número de maneiras diferentes em que as bolas podem ser guardadas nas caixas, dado que em cada caixa cabe apenas uma bola. Vamos pegar uma bola de cada vez. Começando pela bola preta, ela pode ser guardada em qualquer uma das 3 caixas. Para cada escolha possível referente à bola preta, percebe-se que a bola azul pode ser guardada em qualquer uma das 2 caixas desocupadas e por fim, ao se fazer também a escolha para a bola azul, a bola verde pode ser guardada na caixa restante. Logo, o número total de maneiras distintas de guardar as bolas é $3 \times 2 \times 1$.

O resultado numérico desse exemplo pode ser generalizado. Suponha que nós devemos guardar r bolas *distintas* (em cores, por exemplo) em n caixas *distintas* (rotuladas, por exemplo), com a condição de que apenas uma bola caiba em cada caixa. Uma vez que a primeira bola pode ser colocada em qualquer uma das n caixas; uma vez a primeira bola colocada em uma caixa, a segunda pode ser colocada em qualquer uma das $n-1$ caixas restantes. Esse raciocínio pode estender-se até que restem $n-r+1$ caixas livres como opções para a r-ésima bola. O total de maneiras distintas de guardar todas as caixas é, portanto:

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Um problema equivalmente a colocar bolas em caixas é o problema de permutar ou arrumar elementos de um conjunto. De fato, o problema de bolas e caixas é uma imagem que nos permite visualizar permutações, pois permutar r de n elementos significa arrumar r dos n elementos em alguma ordem (os elementos são as caixas, a ordem das escolhas são as bolas). Por exemplo, há seis maneiras de permutar dois dos três elementos do conjunto $\{a, b, c\}$. Elas são

$\langle a, b\rangle$, $\langle a, c\rangle$, $\langle b, c\rangle$, $\langle b, a\rangle$, $\langle c, a\rangle$ e $\langle c, b\rangle$.

Uma vez que permutar r dos n elementos significa preencher r posições com n elementos, temos n escolhas para a primeira posição, $n-1$ escolhas, entre os elementos restantes, para a segunda posição, até que, finalmente, haja $n-r+1$ escolhas para a r-ésima posição. Consequentemente, existem $n(n-1)\ldots(n-r+1)$ maneiras de permutar ou arrumar, em uma certa ordem, r dentre n elementos.

Usando os termos que costumamos adotar, obtemos a seguinte definição.

Definição *(Permutação) Dados dois conjuntos A e B, com $|A| = r$, $|B| = n$ e $n \geq r$, uma* *permutação de A em B é uma* ***função injetora?*** *do tipo $f : A \to B$. O número de permutações de A em B (também chamado de número de permutações de n em r, pois somente as cardinalidades dos conjuntos são relevantes neste caso) é dado por*

$$P_r^n = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Em particular, quando $n = r$, consideramos as permutações de A e temos

$$P_n^n = n!.$$

Observe que a definição acima corresponde exatamente ao exemplo das bolas e caixas, sendo A o conjunto de bolas e B, o conjunto de caixas. O valor de P_r^n pode também ser obtido através de **relações de recorrência**. Uma forma de construir uma relação de recorrência cosiste em retomar o raciocínio do parágrafo anterior a fim de observar que, uma vez feita a escolha do elemento para a primeira posição da ordem, nos defrontamos com o problema de formar uma seqüência com $r-1$ elementos de um conjunto de $n-1$ elementos. Assim, temos

$$P_r^n = \begin{cases} n, & \text{se } r = 1 \\ nP_{r-1}^{n-1}, & \text{senão} \end{cases}$$

Apesar de correta, essa recorrência traz algum incômodo pelo fato de incluir dois índices. Uma outra forma consiste em imaginar todas as permutações de $r-1$ dos n elementos do conjunto. A cada uma dessas permutações correspondem $n-r+1$ permutações de r elementos, cada uma delas sendo formada acrescentando-se um dos elementos do conjunto que não aparece na permutação dos $r-1$ elementos. Suponha, a título de ilustração, o conjunto $\{a, b, c, d\}$ e $r = 3$. Se imaginarmos a permutação $\langle c, a \rangle$, constatamos ser possível formar as permutações $\langle b, c, a \rangle$ e $\langle d, c, a \rangle$. Com esse procedimento, geramos permutações diferentes de r elementos. Acrescentando o fato já observado que toda permutação de r elementos pode ser obtida pela adição de um elemento precedendo uma permutação de $r-1$ elementos, chegamos a

$$P_r^n = \begin{cases} n, & \text{se } r = 1 \\ (n-r+1)P_{r-1}^{n}, & \text{senão} \end{cases}$$

A verificação de que a solução dessa relação de recorrência corresponde **ao esperado** pode ser feita por **indução em r?**. A base da indução é o caso $r = 1$, que leva a $n!/(n-1)! = n$. Para realizar o passo da indução, suponha um certo valor de r tal que P_{r-1}^n é dado pela **relação de recorrência**. Assim,

$$P_r^n = (n-r+1)\frac{n!}{(n-r+1)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Exemplo *De quantas maneiras distintas três provas podem ser distribuídas entre os cinco dias úteis da semana de tal forma que duas provas não sejam marcadas para o mesmo dia? Considere as três provas formando o conjunto A da* ***Definição****, e os dias da semana como o conjunto B. O resultado é* $P_3^5 = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

Exemplo *Vamos determinar a quantidade de números decimais com quatro dígitos distintos. Uma vez que esse é o problema de permutar 4 dígitos entre os dígitos* $0, 1, \ldots, 9$. *Logo, a resposta é* $P_4^{10} = 5040$. *Entre esses números,* $9 \times 8 \times 7 = 504$ *deles têm um zero à esquerda. Consequentemente,* $5040 - 504 = 4536$ *deles não têm zero à esquerda. O mesmo resultado também pode ser calculado como*

$$9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$$

usando o argumento que o primeiro dígito deve ser escolhido entre os nove dígitos $1, 2, \ldots, 9$ *e o segundo entre os nove restantes, e assim sucessivamente.*

Exemplo *O número de maneiras distintas de fazer cadeias com três letras distintas seguidas de quatro algarismos distintos é:*

$$P_3^{26} \times P_4^{10} = 78.624.000$$

Permutação com repetição - Número de funções

Considere agora a seguinte variação do problema de colocar 3 bolas coloridas distintas em 10 caixas numeradas. Suponha que uma caixa possa guardar uma quantidade qualquer de bolas. Uma vez que a bola preta pode ser guardada em qualquer uma das caixas, e o mesmo ocorre com as bolas azuis e verdes, o número total de maneiras diferentes de guardá-las é

$$10 \times 10 \times 10 = 1000.$$

De maneira análoga, em termos de permutação de objetos, nós dizemos que, se existem n diferentes tipos de objetos, com um número ilimitado de objetos de cada tipo, então existem n^r maneiras permutar r desses n tipos de objetos, uma vez que há n escolhas para a primeira posição, n escolhas para a segunda posição, e assim por diante até a r-ésima posição. Aliás, seguindo esse raciocínio, percebemos que r não precisa ser limitado por r.

Definição *(Permutação com repetição) Dados dois conjuntos A e B, com* $|A| = r$ *e* $|B| = n$, *o número de funções do tipo* $f : A \to B$ *é dado por*

$$R_r^n = n^r$$

Observe que, conforme já antecipado, a definição acima permite que o conjunto A tenha mais elementos que o conjunto B. Quando isso acontece, haverá repetições em todas as permutações. Observe ainda que podemos escrever a seguinte **relação de recorrência**:

$$R_r^n = \begin{cases} n, & \text{se } r = 1 \\ nR_{r-1}^n, & \text{senão} \end{cases}$$

É deixado como exercício ao leitor mostrar que a solução dessa relação de recorrência é a função indicada na **Definição**.

> ***Exemplo*** *Se nós desejamos* ***marcar três provas nos cinco dias*** *úteis da semana, mas agora* ***sem restrições*** *quanto ao número de provas por dia, o número total de maneiras de fazê-lo é* $5^3 = 125$.

> ***Exemplo*** *Vamos determinar o* ***número de subconjuntos de um conjunto*** A ***cujo tamanho é*** n**?**. *Considere o problema de colocar os* n *elementos de* A *em duas caixas. Para cada uma das maneiras de fazê-lo, vamos escolher os elementos da caixa 1 como um subconjunto a ser contado, ignorando os elementos da caixa 2. Como há* 2^n *maneiras de arrumar* n *elementos em 2 caixas, há* 2^n *subconjuntos em* (A).

> ***Exemplo*** *Uma simples aplicação da* ***Definição*** *nos leva a concluir que há* 2^r *r-uplas ordenadas em* $\{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \{0,1\}$, *com* r *termos nesse produto. Chamaremos cada uma dessas r-uplas de ''sequência binária de r dígitos''. Nós desejamos saber quantas delas têm um número par de 1's. Nós podemos ``casar'' pares de sequências que diferem apenas no r-ésimo dígito. Claramente, exatamente uma sequência em cada par possui um número par de dígitos. Logo, existem* $\frac{1}{2} \cdot 2^r$ *sequências binárias de r dígitos com um número par de 1's. Uma maneira ligeiramente diferente de obter o mesmo resultado é adicionar um 1 (respectivamente 0) ao final de cada uma das sequências binárias de* $r-1$ *contendo um número ímpar (respectivamente par) de 1's. Como temos* 2^{r-1} *sequências de* $r-1$ *dígitos, obteremos* 2^{r-1} *sequências de r dígitos com um número par de 1's.*

O resultado do exemplo anterior pode também ser obtido como a solução de uma relação de recorrência. Seja $S(r)$ o conjunto das seqüências de r algarismos tendo uma quantidade par de 1's. Sejam $S_0(r)$ e $S_1(r)$ o subconjunto de $S(r)$ contendo as seqüências terminando com 0 e 1, respectivamente. Em qualquer seqüência de $S_0(r)$, há uma quantidade par de 1's dentre os $r-1$ primeiros algarismos. Por outro lado, a quantidade de 1's nos primeiros $r-1$ algarismos de qualquer seqüência em $S_1(r)$ é ímpar. Observando que $|S_0(r)| = |S(r-1)|$ e $|S_0(r)| + |S_1(r)| = 2^{r-1}$, obtemos

$$|S(r)| = |S_0(r)| + |S_1(r)| = |S(r-1)| + 2^{r-1} - |S(r-1)| = 2^{r-1},$$

com $|S(1)| = 1$.

> ***Exemplo*** *Nós podemos também perguntar pelo número de sequências quintárias de r*

dígitos com um número par de 1's. Tratamos, neste caso, com r-uplas do produto de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ *por si mesmo r vezes. Temos no total,* 5^r *sequências, das quais algumas têm apenas 2,3 e 4 (ou seja têm um número par de 1's, que é zero). Logo, temos* $5^r - 3^r$ *sequências que possuem 0's e 1's. Dividiremos essas sequências restantes em grupos de acordo com os seus padrões (por exemplo, um padrão possível é 2xx344xxx4xx. Então, em um grupo ficarão todas as sequências que podem ser obtidas desse padrão trocando cada* x *por 0 ou 1). Usando o mesmo tipo de argumento usado nas sequências binárias, é fácil ver que metade das sequências em cada grupo têm um número par de 1's. Logo,*

$$3^r + \frac{1}{2}(5^r - 3^r)$$

é o número de sequências de r dígitos contendo um número par de 1's.

Exemplo *Suponha que nós desejamos imprimir todos os números com 5 dígitos em pedaços de papel, com um número em cada pedaço. Entretanto, como os dígitos 0, 1, 6, 8 e 9 tornam-se 0, 1, 9, 8 e 6, quando são lidos de cabeça para baixo, existem números que podem compartilhar o mesmo pedaço de papel, ou seja, qualquer que seja o modo de leitura, lê-se o mesmo número. A questão é então quantos pedaços de papel são de fato necessários para imprimir todos os números ? Observemos primeiro que há* 10^5 *números de 5 dígitos diferentes. Desses* 5^5 *contém dígitos que permitem os dois tipos de leitura. Precisamos determinar em quantos desses as duas leituras levam ao mesmo número. Esse tipo especial de número deve ter ou 0 ou 1 ou 8 no centro. Além disso, uma vez determinado os dois primeiros dígitos, não há escolha para os dois últimos (por exemplo, se os dois primeiros sao 16, os dois últimos devem ser 91). Como podemos contruir* 5^2 *números de dois dígitos com 0,1,6,8 e 9, temos* 3×5^2*, pela regra do produto, números com duas leituras. Logo, para eles são necessários* $\frac{5^5 - 3(5^2)}{2}$ *papeis para esses números. Logo, são necessários apenas* $10^5 - \frac{5^5 - 3(5^2)}{2}$ *pedaços de papel.*

Originário de http://www.lia.ufc.br/~pargo/index.php/Manuscritos/Permutacoes
Pagina modificada em 10/03/2011 14:04