From ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização

Manuscritos: Princípio da Inclusão e Exclusão

Começamos nossa discussão examinando uma forma de contar o número de elementos de conjuntos obtidos através de operações sobre conjuntos conhecidos. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo *Suponha que entre um conjunto de 12 livros, 6 sejam romances, 7 foram publicados em 2003 e 3 so romances publicados em 2003. Seja* A_1 *o conjunto dos romances e* A_2 *o conjunto dos livros publicados em 2003. Temos*

$|A_1| = 6$, $|A_2| = 7$ *e* $|A_1 \cap A_2| = 3$.

Com ajuda da ***ilustração****, observamos que a simples contagem de elementos nessa figura nos permite verificar que 3 livros são romances, mas não foram publicados em 2003, já que*

$|A_1 - A_2| = 3$.

Além disso, 7 livros ou são romances ou foram publicados em 2003 (mas não ambos), o que pode ser escrito na forma

$|A_1 \oplus A_2| = 7$.

Finalmente,

$|A_1 \cup A_2| = 10$,

ou seja, 10 livros são romances ou foram publicados em 2003. Como são 12 livros no total, temos que 2 livros nem são romances, nem foram publicados em 2003.

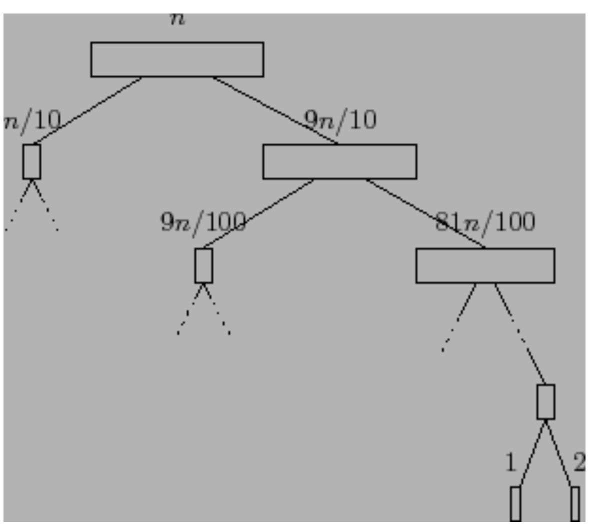

Ilustração dos conjuntos do **exemplo**.

Antes de passar ao exemplo seguinte, cabem algumas observações sobre o exemplo anterior. A primeira observações diz respeito às operações realizadas: diferença, diferença simétrica e união. A segunda observação é quanto ao método utilizado para determinar a cardinalidade dos conjuntos obtidos com essas operações. Esse método consiste em representar os conjuntos e a interseção entre eles graficamente e, sem seguida, determinar as cardinalidades desejadas através de contagem simples. Porém, esse método revela-se limitado quando a cardinalidade dos conjuntos envolvidos torna-se muito grande. Para esses casos, necessitamos de um método que não dependa da representação gráfica. No caso da diferença $|A_1 - A_2|$ temos, diretamente pela definição de diferença, que

$$|A_1 - A_2| = |A_1| - |A_1 \cap A_2|.$$

Já a diferença simétrica $|A_1 \oplus A_2|$ depende da união $|A_1 \cup A_2|$. Para esta, observamos que os conjuntos A_1 e A_2 podem ter alguns elementos comuns. Mais precisamente, o número de elementos comuns a A_1 e A_2 é $|A_1 \cap A_2|$. Cada um desses elementos é contado duas vezes em $|A_1| + |A_2|$ (uma vez em $|A_1|$ e outra vez em $|A_2|$), embora ele conte como apenas um elemento em $|A_1 \cup A_2|$. Portanto,

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

Com isso, obtemos

$$|A_1 \oplus A_2| = |A_1 \cup A_2| - |A_1 \cap A_2| = |A_1| + |A_2| - 2|A_1 \cap A_2|.$$

Vejamos agora outro exemplo, no qual usaremos a igualdade para a cardinalidade da união.

Exemplo *Entre os 200 estudantes do curso de Informática, 50 estão inscritos em Matemática Discreta (A_1), 140 estão inscritos em Cálculo I (A_2) e 24 estão inscritos em ambos. Como as provas de de ambas as disciplinas estão marcadas para sábado de manhã, somente os alunos que não estiverem em nenhuma delas podem participar da calourada na sexta à noite. Quantos eles são ? Ora,*

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 50 + 140 - 24 = 166.$$

Ou seja, 166 estudantes cursam Matemática Discreta ou Cálculo I, ou ainda ambos. Logo, o número de estudantes que podem participar da calourada é

$$200 - 166 = 34.$$

Exemplo *Suponha agora que 60 dos 200 estudantes são veteranos. Entre os veteranos 20 cursam Matemática Discreta, 45 cursam Cálculo I e 16 cursam ambos. Quantos calouros poderão ir à calourada ? Ora, sendo A_3 o conjunto dos veteranos, temos:*

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |(A_1 \cup A_2) \cup A_3| && \text{associatividade}\\
&= |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |(A_1 \cup A_2) \cap A_3| && \text{cardinalidade da união}\\
&= 226 - |(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)| && \text{distributividade}\\
&= 226 - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| && \text{cardinalidade da união}\\
&= 226 - 20 - 45 + 16\\
&= 177\,.
\end{aligned}$$

Portanto, o número de calouros que podem sair na sexta-feira é:

$200 - 177 = 23.$

Neste último exemplo, nos deparamos com a cardinalidade da união de 3 conjuntos, que é obtida com

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Vejamos ainda outro exemplo.

Exemplo *Trinta carros estão disponíveis em uma revendedora. Os opcionais dos carros são rádios, ar-condicionados e alarmes. Sabe-se que 15 dos carros têm rádio, 8 têm ar-condicionado e 6 têm alarme. Além disso, 3 têm todos os opcionais. Nós desejamos saber pelo menos quantos carros não tem nenhum opcional. Seja R o conjunto dos carros com rádio, AR o conjunto dos carros com ar-condicionado e A o conjunto dos carros com alarme. Sabemos que* $|R| = 15$, $|AR| = 8$, $|A| = 6$ *e* $|AR \cup R \cup A| = 3$. *Logo, de acordo com* ***a expressão para a cardinalidade da união****,*

$$\begin{aligned}
|R \cup AR \cup A| &= 15 + 8 + 6 -\\
&\quad |R \cap AR| - |R \cap A| - |AR \cap A| + 3\\
&= 32 - |R \cap AR| - |R \cap A| - |AR \cap A|
\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}
|R \cap AR| &\geq |R \cap AR \cap A|,\\
|R \cap A| &\geq |R \cap AR \cap A| \text{ e}\\
|AR \cap A| &\geq |R \cap AR \cap A|,
\end{aligned}$$

temos que

$$|R \cup AR \cup A| \leq 32 - 3 - 3 - 3 = 23.$$

Logo, há no máximo 23 carros com pelo menos um dos opcionais. Como consequência, há pelo menos 7 carros sem opcional algum.

E no caso geral da união de $r \geq 2$ conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_r$, qual é a cardinalidade do conjunto resultante? O raciocínio que usamos acima para derivar a cardinalidade da união de 3 conjuntos a partir da cardinalidade da união de 2 conjuntos nos sugere que

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r| \quad = \quad & \textstyle\sum_i |A_i| \\ & -\textstyle\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq r} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| \\ & +\textstyle\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq r} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \\ & \ \vdots \\ & +(-1)^{r+1}(|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r|) \end{aligned}$$

Assim, chegamos ao seguinte princípio.

Princípio *(Princípio da Inclusão e Exclusão) Se $A_1, A_2, \cdots, A_r$, $r \geq 2$, são conjuntos e $\square = \{A_1, A_2, \cdots, A_r\}$, então*

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r| \quad &= \quad \sum_{1 \leq j \leq r} \left((-1)^{j+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq r} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}| \right) \\ &= \quad \sum_{A \in \square, A \neq \emptyset} (-1)^{|A|+1} |\cap A| \end{aligned}$$

Esse resultado pode ser verificado por indução em r, o número de conjuntos dos quais desejamos determinar a cardinalidade da união. Por conveniência, podemos mostrar o valor indicado pelo **Princípio da Inclusão e Exclusão** para

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r \cup \emptyset|.$$

Claramente, o caso de união de 1 conjunto serve como base da indução ($r = 1$). Em seguida, como hipótese de indução, podemos supor válida **a afirmação** para quaisquer $r - 1$ conjuntos, $r \geq 1$. Vamos provar então a validade para r conjuntos seguindo o raciocínio semelhante ao usado para 3 conjuntos. Primeiro, observemos que $A_1 \cup \cdots \cup A_{r-1} \cup A_r$, pela lei da associatividade, pode ser visto como $(A_1 \cup \cdots \cup A_{r-1}) \cup A_r$. Logo, pela igualdade da cardinalidade de dois conjuntos, obtemos:

$$|(A_1 \cup \cdots \cup A_{r-1}) \cup A_r| = |A_1 \cup \cdots \cup A_{r-1}| + |A_r| - |(A_1 \cup \cdots \cup A_{r-1}) \cap A_r|$$

Agora, pela lei de distributividade, temos que

$$|(A_1 \cup \cdots \cup A_{r-1}) \cap A_r| = |(A_1 \cap A_r) \cup (A_2 \cap A_r) \cdots \cup (A_{r-1} \cap A_r)|.$$

Aplicando a hipótese de indução para os $r - 1$ conjuntos $(A_1 \cap A_r), (A_2 \cap A_r), \ldots, (A_{r-1} \cap A_r)$, temos

$$|(A_1 \cap A_r) \cup \cdots \cup (A_{r-1} \cap A_r)| = \sum_{1 \leq j \leq r-1} \left((-1)^{j+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq r-1} |B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \cdots \cap B_{i_j}| \right)$$

onde $B_i = A_i \cap A_r$, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, r-1\}$. Portanto,

$$|(A_1 \cap A_r) \cup \cdots \cup (A_{r-1} \cap A_r)| = \sum_{1 \leq j \leq r-1} \left((-1)^{j+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq r-1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j} \cap A_r| \right)$$

Aplicando a hipótese de indução mais uma vez para os $r-1$ conjuntos $A_1, \cdots, A_{r-1}$, nós obtemos

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_{r-1}| = \sum_{1 \leq j \leq r-1} \left((-1)^{j+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq r-1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}| \right)$$

Substituindo **a penúltima** e **última** igualdades **na igualdade inicial**, chegamos a

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r| &= |A_r| + \sum_{1 \leq j \leq r-1} \left((-1)^{j+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq r-1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}| \right) \\ &\quad - \sum_{1 \leq j \leq r-1} \left((-1)^{j+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq r-1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j} \cap A_r| \right) \\ &= \sum_{1 \leq j \leq r-1} \left((-1)^{j+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq r-1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}| \right) \\ &\quad + \sum_{0 \leq j \leq r-1} \left((-1)^{j} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq r-1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j} \cap A_r| \right) \end{aligned}$$

Observando que o somatório do segundo termo corresponde exatamente aos **termos que envolvem** A_r, chegamos ao resultado desejado.

Consideremos agora o seguinte exemplo para aplicação do **Princípio da Inclusão e Exclusão**.

Exemplo *Vamos determinar o número de inteiros entre 1 e 250 que são divisíveis por 2,3,5 ou 7. Sejam A_2, A_3, A_5 e A_7 os conjuntos dos inteiros divisíveis por 2,3,5 e 7, respectivamente. Podemos calcular*

$$|A_2| = \left\lfloor \frac{250}{2} \right\rfloor = 125 \qquad |A_3| = \left\lfloor \frac{250}{3} \right\rfloor = 83$$

$$|A_5| = \left\lfloor \frac{250}{5} \right\rfloor = 50 \qquad |A_7| = \left\lfloor \frac{250}{7} \right\rfloor = 35$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{250}{2 \times 3} \right\rfloor = 41 \qquad |A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{250}{2 \times 5} \right\rfloor = 25$$

$$|A_2 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{250}{2 \times 7} \right\rfloor = 17 \qquad |A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{250}{3 \times 5} \right\rfloor = 16$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{250}{3 \times 7} \right\rfloor = 11 \qquad |A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{250}{5 \times 7} \right\rfloor = 7$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{250}{2 \times 3 \times 5} \right\rfloor = 8 \quad |A_2 \cap A_3 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{250}{2 \times 3 \times 7} \right\rfloor = 5$$

$$|A_2 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{250}{2 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 3 \quad |A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{250}{3 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 2$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{250}{2 \times 3 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 1.$$

*Logo, podemos aplicar o **Princípio da Inclusão e Exclusão** para obter o seguinte resultado:*

$$
\begin{aligned}
A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| &= 125 + 83 + 50 + 35 - 41 - 25 - 17 - 16 - 11 - 7 \\
&\quad + 8 + 5 + 3 + 2 - 1 = 193\,.
\end{aligned}
$$