From ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização

Manuscritos: Relações de Recorrência

O **Princípio da Indução Matemática** está intimamente ligado ao uso de *recorrência* para expressar os elementos de uma *sequência*.

Material complementar

- **Exercícios?**
- **Outros Exemplos?**
- **Notas de Aula?**
- **Aplicações**
- **Aulas em Vídeo?**

Sequências finita e infinita *Seja A um conjunto. Uma sequência finita de A é uma função sobrejetora $f : n \to A$, para algum $n \in \mathbb{N}$, enquanto uma sequência infinita de A é uma função sobrejetora $g : \mathbb{N} \to A$.*

Algumas observações podem ser feitas sobre a definição acima. Primeiro, uma sequência finita somente existe se o conjunto A for finito. Segundo, uma sequência infinita somente existe se A for um conjunto infinito enumerável. Por fim, se $A = \{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}\}$, então uma sequência finita de A é uma função da forma

$$f = \{(0, a_0), (1, a_1), \cdots, (n-1, a_{n-1})\}$$

a qual será descrita usando a seguinte notação:

$$f = \langle a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \rangle$$

Essa notação indica que a_0 é o primeiro elemento da sequência, que a_1 é o segundo, a_2 o terceiro, e assim por diante até a_{n-1}, que é o n-ésimo elemento de f. A título de ilustração, considere $n = 5$, $A = \{3, 81, 9, 27, 1\}$ e a função $f(k) = 3^k$, para todo $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. A sequência correspondente é dada por

$$f = \langle 1, 3, 9, 27, 81 \rangle$$

Uma forma de descrever uma sequência f consiste em escrever o k-ésimo elemento, $f(k)$, dessa sequência usando a própria função f aplicada a valores menores do que k. Denotaremos por *relação de recorrência* esse tipo de relação. Considere novamente o exemplo anterior. Observando que para cada k, $f(k)$ é 3 vezes o valor de $f(k-1)$, podemos reescrever a função como a seguinte relação de recorrência:

$$f(0) = 1$$
$$f(k) = 3f(k-1), 0 < k < n$$

Observe que é necessário determinar o primeiro elemento da sequência (no caso do exemplo,

$f(0) = 1$) para que a função fique completamente definida.

Uma outra sequência que é facilmente descrita por uma relação de recorrência é

$f = \langle 1, 1, 2, 6, 24, \cdots \rangle$

Essa sequência é a função $f(k) = k!$, e pode ser escrita como

$f(0) = 1$
$f(k) = k\,.\,f(k-1), k > 0.$

Um outro exemplo de relação de recorrência é a *Sequência de Fibonacci*, que é a sequência infinita F dada por

$F = \langle 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots \rangle$

Podemos observar que qualquer elemento dessa sequência, com exceção dos dois primeiros, é obtido pela soma dos dois elementos imediatamente anteriores. Logo, a Sequência de Fibonacci pode ser descrita pela seguinte relação de recorrência:

$F(0) = 1$
$F(1) = 1$
$F(k) = F(k-1) + F(k-2), k > 1$

Mais um exemplo é a conhecida *Função fusc de Dijkstra*, dada por

$fusc(0) = 0$
$fusc(1) = 1$
$fusc(2k) = fusc(k), k \geq 1$
$fusc(2k+1) = fusc(k) + fusc(k+1), k \geq 1$

Dentre outras propriedades dessa sequência, tem-se que $fusc(k)$ é par exatamente quando k é um múltiplo de 3 (o leitor é instigado a tentar demonstrar essa afirmação).

Em muitos casos, a descrição de uma sequência por uma relação de recorrência é simples de ser obtida, como no caso da Sequência de Fibonacci. Porém, tal descrição possui um incoveniente: para obter o k-ésimo elemento da sequência, precisamos calcular todos os elementos anteriores a ele na sequência. Em situações como essa, é mais interessante reescrever a sequência através de uma função de k diretamente. Em outras palavras, precisamos *resolver* a relação de recorrência, e é nesse momento que aparecerá o Princípio da Indução Matemática. Para tornar essa observação mais concreta, considere novamente **essa relação**. Podemos verificar que $f(k) = 3^k$ primeiro observando que quando $k = 0$, temos efetivamente $f(k) = 1$. Em seguida, tomando $k \geq 0$, temos $f(k) = 3f(k-1) = 3\,.\,3^{k-1} = 3^k$.

Exemplo *Vamos provar por indução em n (segunda versão) que $T(n) = n \log n$ se*

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ 2T(\frac{n}{2}) + n, & n > 1\ . \end{cases}$$

Para $n = 1$*, temos* $T(1) = 1\lg 1 = 0$*, o que mostra a base da indução. Agora, aplicando a hipótese de indução, temos:*

$$T(\tfrac{n}{2}) = \tfrac{n}{2}\log\tfrac{n}{2}.$$

Substituindo em $T(n)$*, chegamos a*

$$T(n) = 2(\tfrac{n}{2}\log\tfrac{n}{2}) + n$$

$$= n\log n - n\log 2 + n$$

$$= n\log n - n + n$$

$$= n\log n$$

como desejamos demonstrar.

Nos exemplos anteriores, é possível usar o Princípio da Indução Matemática para demonstrar que uma dada relação de recorrência corresponde a uma certa função. Porém, nem sempre conhecemos essa função. Por exemplo, suponha a resolução da seguinte relação de recorrência:

$$T(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ T(k-1) + 5k, & k \geq 1\ . \end{cases}$$

Como desconhecemos a função correspondente, vamos tentar descobrí-la observando a dependência de $T(k)$, $k \geq 1$, com cada um dos outros elementos da sequência que são anteriores a ele. Por enquanto, **sabemos escrever $T(k)$ a partir de $T(k-1)$**. Escrevendo $T(k-1)$ a partir de $T(k-2)$, obtemos

$$T(k) = T(k-1) + 5k = (T(k-2) + 5(k-1)) + 5k,$$

ou seja, $T(k) = T(k-2) + 5(2k-1)$. Repetindo esse processo, obtemos

$$\begin{aligned} T(k) &= (T(k-3) + 5(k-2)) + 5(2k-1) &&= T(k-3) + 5(3k-2-1) \\ &= (T(k-4) + 5(k-3)) + 5(3k-2-1) &&= T(k-4) + 5(4k-3-2-1) \\ &= (T(k-5) + 5(k-4)) + 5(4k-3-2-1) &&= T(k-5) + 5(5k-4-3-2-1) \end{aligned}$$

o que nos sugere que $T(k)$ pode ser escrito a partir de $T(k-i)$, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$, da seguinte forma:

$T(k) = T(k-i) + 5\left(ik - \sum_{j=1}^{i-1} j\right).$

Vamos seguir esse palpite. Como sabemos quanto vale $T(0)$, quando $k - i = 0$ teremos

$T(k) = T(0) + 5\left(k^2 - \sum_{j=1}^{k-1} j\right) = 5k^2 - 5k(k-1)/2$

Observe que usamos o na última passagem. Portanto, temos como sugestão a função $T(k) = 5k(k+1)/2$. Agora sim podemos usar a indução em k para verificar se essa sugestão é correta. Para a base da indução, temos

$T(0) = \frac{5.0(0+1)}{2} = 0,$

logo o resultado é válido. Aplicando a hipótese de indução, temos que

$T(k-1) = \frac{5(k-1)k}{2}.$

Fazendo o passo da indução, chegamos a:

$T(k) = \frac{5k(k-1)}{2} + 5k = (5k^2 - 5k + 10k)/2 = 5k(k+1)/2.$

Exemplo *Retomando o **Exemplo anterior**, vejamos como obter o palpite* $T(n) = n\log n$. *Aplicando o método acima, obtemos:*

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2(T(\tfrac{n}{2})) + n \\
&= 2(2T(\tfrac{n}{2^2}) + \tfrac{n}{2}) + n \\
&= 2(2(2T(\tfrac{n}{2^3}) + \tfrac{n}{2^2}) + \tfrac{n}{2}) + n \\
&= 2^3T(\tfrac{n}{2^3}) + 2^2\,\tfrac{n}{2^2} + 2\,\tfrac{n}{2} + n \\
&= 2^3T(\tfrac{n}{2^3}) + 3n \\
&\vdots \\
&= 2^kT(\tfrac{n}{2^k}) + kn
\end{aligned}$$

Chegamos ao fundo da iteração quando $T(\frac{n}{2^k}) = T(1) = 0$. *Nesse caso, temos que* $\frac{n}{2^k} = 1$ *e* $n = 2^k$. *Portanto,* $k = \log n$. *Nesta última iteração, teremos o palpite esperado:*

$T(n) = n\,.\,0 + n\log n = n\log n$

Exemplo *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{N}$ um conjunto tal que $|A| = n$ e f uma sequência finita de A tal que $f(i) < f(i+1)$, para todo $i \in \{0, 1, 2, \cdots, n-2, n-1\}$. Seja ainda $x \in \mathbb{N}$. Considere o problema de determinar se $x \in A$ e, em caso afirmativo, determinar $i \in \mathbb{N}$ tal que $f(i) = x$. Uma primeira abordagem seria testar sucessivamente para $i = n-1, n-2, \cdots$ até encontrar $f(i) \geq x$ ou até percorrer todos os elementos de A sem encontrar x. No primeiro caso, se $f(i) = x$, então $x \in A$. Nos demais casos, $x \notin A$. Observe que, para cada valor de i, é preciso realizar uma comparação entre $f(i)$ e x. Uma questão que pode ser levantada é a seguinte: quanto vale o número máximo $T(n)$ de comparações realizadas? Esse número máximo ocorre quando $f(i) > x$, para todo $i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$. Nessa situação, observamos que há a primeira comparação de $f(n-1)$ com x, e o número de comparações realizadas a partir daí é exatamente o número máximo de comparações realizadas quando $|A| = n-1$. Portanto, podemos escrever*

$T(0) = 0$
$T(n) = 1 + T(n-1)$, $n > 0$

É fácil verificar que $T(n) = n$.

Em uma segunda abordagem, procedemos da seguinte maneira. Para simplificar a exposição, supomos que $n = 2^k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. A primeira comparação a realizar é entre $f(n/2-1)$ e x. Caso $f(n/2-1) = x$, concluimos que $x \in A$. Senão, há dois casos possíveis. Primeiro, $f(n/2-1) > x$. Esse fato implica que x não pode encontrar-se em uma posição posterior a $n/2-1$ em f. Então, podemos recomeçar o problema considerando apenas os $n/2$ primeiros elementos de f. No segundo caso, temos $f(n/2-1) < x$, e o novo problema a considerar restringe-se aos últimos $n/2$ elementos de f. Esse procedimento é repetido até que x seja encontrado em A ou até que se chegue a um problema sobre um conjunto de apenas um elemento, digamos $f(i) \neq x$. Neste caso, concluimos que $x \notin A$. Novamente, podemos perguntar: quanto vale $T(n)$? A resposta é a solução da seguinte relação de recorrência:

$T(1) = 1$
$T(n) = 1 + T(n/2)$, $n = 2^k$, $k > 0$

A resolução da relação de recorrência acima pode ser feita seguindo o método visto anteriormente. Para isso, começamos reescrevendo a relação de recorrência da seguinte forma:

$T(2^0) = 1$
$T(2^k) = T(2^{k-1}) + 1$, $k > 0$

Para $k > 0$, podemos ainda escrever

$$T(2^k) = T(2^{k-2}) + 2$$

$$= T(2^{k-3}) + 3$$

$= T(2^{k-4}) + 4$

O que nos sugere que $T(2^k) = T(2^{k-i}) + i$, para todo $i \in \{0, 1, \cdots, k\}$. Quando $2^{k-i} = 1$, o que significa $i = k$, nós sabemos que $T(2^{k-i}) = 1$. Nesse caso, chegamos a

$$T(2^k) = T(1) + k = k + 1 = \log n + 1$$

Podemos provar a igualdade acima por indução em k. Como base da indução, vamos provar para $k = 1$:

$$T(1) = 0 = \log 1$$

Para $k > 0$, pela a hipótese de indução, o nosso palpite é válido. Logo:

$$T(2^k) = \log n + 1$$

Para o passo de indução, temos:

$$T(2^{k+1}) = k + 2$$

Portanto, $T(n) = \log n + 1$.
