From ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização

Manuscritos: ConjuntosInfinitos

Alguns **conjuntos infinitos** possuem uma propriedade especial e que merece o destaque dado pela seguinte definição:

> ***Definição*** (Conjuntos infinitos enumeráveis) Um conjunto A é *infinito enumerável* se A é idempotente a $\mathbb{N}$.

Uma vez que a função que associa cada elemento de $\mathbb{N}$ a si mesmo ser uma função bijetora, temos a seguinte propriedade (além de $\mathbb{N}$ **ser infinito**).

> ***Teorema*** $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito enumerável.

A ideia capturada na definição acima é que um conjunto é infinito enumerável se, a partir um certo elemento, podemos seqüencialmente enumerar todos os elementos do conjunto, um após o outro. A lista produzida através dessa enumeração é uma correspondência de um para um entre os elementos do conjunto e o conjunto dos números naturais. Nesse sentido, há subconjuntos de $\mathbb{N}$ que também são infinitos enumeráveis. Considere, por exemplo, o conjunto de todos os números pares não negativos $\mathbb{P} = \{0, 2, 4, 6, \cdots\}$ e função bijetora $f : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ dada por $f(n) = 2n$, para todo $n = 0, 1, 2, \cdots$. Usando o mesmo tipo de argumentação, podemos provar que o conjunto dos inteiros múltiplos de 7 ([illegible] $= \{0, 7, 14, 21, \ldots\}$) também é infinito enumerável. Esses exemplos sugerem que a união de conjuntos infinitos enumeráveis é também um conjunto infinito enumerável ($\mathbb{P} \cup$ [illegible] $\subseteq \mathbb{N}$ é um forte indício...). De fato, o é. Na verdade, a união de um número finito de conjuntos infinitos enumeráveis é um conjunto infinito enumerável. Não apenas isso, mas a união de um número infinito, mas enumerável, de conjuntos infinitos enumeráveis é também infinito enumerável. Vejamos, a seguir, um argumento para essa afirmação.

Sejam $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$, $B = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$ e $C = \{c_0, c_1, c_2, \ldots\}$ três conjuntos infinitos enumeráveis (observe que, em cada um desses conjuntos, os índices nos elementos já indicam uma função bijetora com $\mathbb{N}$ e, também, a posição em uma seqüencia dos respectivos elementos). A seguinte seqüência infinita

$$\langle a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, \ldots\rangle$$

é claramente uma seqüência de $A \cup B \cup C$, obtida intercalando as seqüencias de A, B e C. Logo, $A \cup B \cup C$ é um conjunto infinito enumerável.

A mesma ideia pode ser generalizada partindo-se de um conjunto infinito enumerável de seqüências. Sejam

$A_0 = \{a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{03} \ldots\}$

$A_1 = \{a_{10}, a_{11}, a_{12}, \ldots\}$

$A_2 = \{a_{20}, a_{21}, , \ldots\}$

$\vdots$

$A_k = \{a_{k0}, \ldots\}$

$\vdots$

conjuntos infinitos enumeráveis. Considere a seguinte sequência do conjunto $\bigcup\{A_0, A_1, \ldots\}$:

$a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{02}, a_{11}, a_{20}, a_{03}, a_{12}, a_{21}, \ldots, a_{0k}, a_{1,k-1}, \ldots, a_{k,1}, \ldots$

Em outras palavras, a sequência é produzida segundo o seguinte método: na i-ésima iteração, liste o i-ésimo elemento do conjunto A, o $i-1$-ésimo elemento do conjunto A_1 etc, e finalmente o primeiro elemento do conjunto A_i. É possível ver que a sequência assim produzida inclui todos os elementos de todas as sequências. Logo, o conjunto $\bigcup\{A_0, A_1, \ldots\}$ é infinito enumerável.

Podemos nos perguntar se todos os conjuntos infinitos não seriam enumeráveis. Como um exemplo de conjunto infinito não enumerável, vamos examinar o conjunto A de todos os números reais entre 0 e 1 (o conjunto dos número reais não está formalmente definido aqui. Por isso, é preciso acreditar que tal conjunto existe...). Nosso procedimento de prova é supor que o conjunto A é infinito enumerável e chegar a uma contradição. Se a cardinalidade de A é infinita enumerável, então existe uma função bijetora entre os elementos de A e os elementos de $\mathbb{N}$. Logo, é possível produzir uma lista com os elementos de A, em forma decimal, com o seguinte formato:

$0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \ldots$

$0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \ldots$

$0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \ldots$

$\vdots$

$0, a_{i1}a_{i2}a_{i3}a_{i4} \ldots$

$\vdots$

onde a_{ij} denota j-ésimo digito do i-ésimo número na lista. Considere agora o seguinte número:

$0, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots$

onde

$b_i = 1$, se $a_{ii} = 0$, e $b_i = 0$, se $a_{ii} \neq 0$.

Ora, o número acima é diferente de cada um dos números na lista acima, visto que ele difere do primeiro no primeiro dígito, do segundo no segundo dígito, do i-ésimo no i-ésimo dígito e assim sucessivamente. Conseqüentemente, podemos concluir que a lista acima não é uma lista exaustiva de A. Logo, ou A não é infinito enumerável ou A não é o conjunto dos reais entre 0 e 1. Ambos os casos contradizem as hipóteses iniciais.

Um fato curioso é que a argumentação acima *não* é válida para $\mathbb{N}$. Um leitor desavisado poderia pensar: se tomássemos os números reais de A, e retirássemos o zero de cada um deles, obteríamos números naturais, provando que $\mathbb{N}$ é infinito enumerável! Felizmente, esse argumento é falso simplesmente porque um número natural não pode ser formado por uma sequência *infinita* de número naturais.
