From ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização

Manuscritos: Princípio da Casa dos Pombos

Material complementar

- **Exercícios?**
- **Outros Exemplos?**
- **Notas de Aula?**
- **Aplicações**
- **Aulas em Vídeo?**

Começamos a seção estabelecendo alguns fatos que serão tomados como verdadeiros. No bojo da discussão sobre números naturais e cardinalidade, podemos identificar o significado da operação aritmética de soma de números naturais. Em particular, temos a definição de $n + 1$, quando n é um número natural (**como sendo o sucessor de** n). Com algum tratamento formal, podemos também definir as operações de adição (para quaisquer números naturais), subtração, multiplicação e divisão e, consequentemente, dos conjuntos de números envolvidos nessas operações (inteiros, racionais e outros). Neste texto, não daremos esse tratamento formal, nos permitindo, a partir deste ponto, usar os conhecimentos intuitivos sobre esses conceitos. Ao leitor interessado, sugerimos livros especializados em Teoria dos Conjuntos.

Feito esse esclarecimento, seguimos com a discussão sobre cardinalidade de conjuntos. Iniciamos com a definição que nos permite expressar o fato de um conjunto possuir um número limitado de elementos:

Definição (Conjuntos finitos) Um conjunto A é *finito* se A é idempotente a algum $n \in \mathbb{N}$.

Partimos imediatamente para uma reflexão sobre a manipulação do conceito de cardinalidade em conjuntos finitos. Uma conhecida técnica de prova matemática é chamada de *Princípio da Casa dos Pombos*. De uma maneira informal, esse princípio diz que se há mais pombos do que casas de pombos, então haverá pelo menos uma casa ocupada com dois ou mais pombos. Observe que essa sentença possui um sentido claro se sabemos contar o número de pombos e o número de casas. Em outras palavras, sabemos identificar o número natural **idempotente** ao conjunto de pombos, e o mesmo para o conjunto de casas. Portanto, estamos tratando de conjuntos finitos. Formalmente, temos o seguinte.

Definição (Princípio da Casa dos Pombos - Primeira Versão) Sejam A e B dois conjuntos finitos. Se $|A| > |B|$, então, para qualquer função $f: A \to B$, existem elementos $a \in A$ e $a' \in A$ tais que $f(a) = f(a')$.

Algumas aplicações triviais do Princípio da Casa dos Pombos são: em um grupo de 13 pessoas, há pelo menos duas delas que nasceram no mesmo mês; ou se onze sapatos são selecionados entre 10 pares de sapatos, há pelo menos um par completo entre os sapatos selecionados.

A validade do Princípio da Casa dos Pombos pode ser argumentada por indução na cardinalidade de A, o maior dos dois conjuntos. Antes de fazer essa análise, alguns comentários se fazem necessários. O primeiro é que $A \neq \emptyset$, visto que não existiria um conjunto B de cardinalidade inferior à de A caso $A = \emptyset$. Também pode-se observar, como segundo comentário, que $B \neq \emptyset$, mas desta vez porque, como $A \neq \emptyset$, existe $a \in A$ e, portanto, deve existir $f(a) \in B$ (f, conforme o **enunciado**, é uma função $f : A \to B$). Finalmente, o terceiro comentário decorre deste último: se $B \neq \emptyset$, então $|B| \geq 1$. Logo, como $|A| > |B|$, temos que $|A| \geq 2$.

Com esses comentários, estamos prontos para iniciar a argumentação por indução. A base da indução é $|A| = 2$, o que fixa $|B| = 1$. Neste caso, só há uma função do tipo $f : A \to B$, o que, naturalmente, tem a propriedade $f(a) = b$, para todo $a \in A$ e b sendo o único elemento de B. Portanto, o **princípio** é satisfeito. Então, supomos que o **princípio** seja satisfeito para $|A| = n$, sendo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Tomemos, para o passo de indução, A e B tais que $|A| = n + 1$ e $|B| < |A|$. Tomemos ainda uma função $f : A \to B$ supondo, por contradição, que f seja **injetora**. Visto que $|A| > 2$, sejam $a \in A$, $A' = A - \{a\}$ e $f' : A' \to B$ a função f restrita aos elementos de A', ou seja $f' = f[A', B]$. Há dois casos a analisar:

1. $|B| \leq n - 1$: como $|A'| > |B|$ é $f' : A' \to B$, podemos usar a hipótese de indução para concluir que existem $a' \in A'$ e $a'' \in A'$ tais que $f'(a') = f'(a'')$. Disto decorre que $f'(a') = f(a')$ e $f'(a'') = f(a'')$ contradizem a escolha de f como uma função injetora.

2. $|B| = n$: como $n \geq 2$, podemos tomar $b \in B$ e, assim, definir $B' = B - \{b\}$ e $f'' = f'[A', B']$. Temos novamente $|A'| > |B'|$, com $B' \neq \emptyset$, e por argumentação similar à anterior, obtemos um contradição com a escolha de f.

Vejamos outras aplicações através de exemplos.

Exemplo Um tenista deseja treinar 77 dias, pelo menos um jogo por dia, totalizando 132 jogos. Desejamos demonstrar que qualquer que seja o seu planejamento, haverá um período de dias consecutivos onde o total de jogos daqueles dias será 21. A idéia é gerar uma seqüência acumulativa $a_1 \ldots a_{77}$, na qual a_i indica o total de jogos realizados até o dia i, inclusive, segundo o planejamento escolhido. Dessa forma, a_1 nos diz a quantidade de jogos realizados no primeiro dia; a_2, a quantidade acumulada nos dois primeiros dias; e assim sucessivamente. Como há pelo menos um jogo por dia, todos esses 77 números são diferentes entre si. Mais precisamente, $a_1 \geq 1$, $a_2 \geq a_1 + 1$, $a_3 \geq a_2 + 1$ etc. Uma vez construída essa seqüência, podemos concatená-la com uma outra seqüência $a_1 + 21, a_2 + 21, \ldots, a_{77} + 21$, em que também todos os elementos são distintos entre si. Temos então uma grande seqüência de 154 números e cada um deles tem um valor entre os números 1 e 153 (de a_1 a a_{77}, os valores estão entre 1 e 132; e de $a_1 + 21$ até $a_{77} + 21$ os valores estão entre 22 e 153). Logo, pelo **Princípio da Casa dos Pombos**, há dois elementos a_j e $a_i + 21$ que têm o mesmo valor (como não há dois valores iguais nos primeiros 77 elementos da seqüência e nem nos 77 últimos, temos que cada um deles pertence a uma metade da seqüência). Nesse caso, temos que $a_i = a_j - 21$ e logo, entre o dia i e o dia j foram realizados 21 jogos.

Exemplo *Neste caso, usamos o seguinte jogo envolvendo dois jogadores, e definido para um certo* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. *Os dois jogadores participantes devem escrever uma sequência de 0's e 1's. Partindo da sequência vazia, os jogadores escrevem, alternadamente, um novo dígito (0 ou 1) ao final da sequência já formada pelas jogadas anteriores. A cada jogada que realiza, o jogador pode escolher se escreve um 0 ou um 1 (desde que seja no final da sequência). Dessa forma, após i jogadas,* $i \geq 0$, *há i dígitos na sequência, denominados* $d_1 d_2 \ldots d_i$ *(se* $i = 0$ *a sequência é vazia). O jogo termina após a i-ésima jogada, para* $i > n$, *e o jogador que a joga perde, se* $d_{i-n+1} d_{i-n+2} \ldots d_i$ *é a segunda ocorrência dessa subsequência (formalmente, existe k,* $0 < k < i$, *tal que* $d_k = d_{i-n+1}$, $d_{k+1} = d_{i-n+2}$, $\ldots$, $d_{k+n-1} = d_i$*). Caso contrário, o jogo prossegue com a jogada seguinte. Por exemplo, se* $n = 4$ *e uma jogada produz a sequência*

0010000110101111 0011

então o jogo termina porque é atingida a segunda ocorrência de 0011. Podemos mostrar que o jogo sempre termina, qualquer que seja $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. *Nessa demonstração, definimos dois conjuntos:* A_i, *como sendo o conjunto das i primeiras jogadas, e B, o conjunto de todas as possíveis sequências de n dígitos. A cada jogada, construímos a função* $f_i : A_i \to B$ *que associa a* $i \in A$ *a subsequência formada pelos n últimos dígitos da sequência obtida pela i -ésima jogada. Conforme pode ser demonstrado,* $\mathbf{|B| = 2^{n}}$**?**. *Para cada valor de n, só nos interessa observar as jogadas a partir de* $i = n$. *Observamos um jogo. Se o jogo observado termina antes da* $|B|$*-ésima jogada (inclusive), então não há o que provar. Caso contrário, verificamos que, para* $i = |B| + 1$, $|A_i| > |B|$. *Logo,* ***Princípio da Casa dos Pombos****,* $f_{|B|+1}(|B| + 1)$ *também é o valor de algum outro elemento de* $A_{|B|+1}$*, e o jogo termina.*

Uma outra aplicação da **primeira versão** é a demonstração do teorema que segue a seguinte definição sobre cardinalidade de conjuntos.

Definição (Conjuntos infinitos) Um conjunto A é *infinito* se A não é **finito**.

Teorema $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito.

Demonstração: Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $f : n \to \mathbb{N}$ uma função. Para demonstrar o teorema, devemos mostrar que f não é bijetora. Sabemos que $\mathbf{n \leq n + 1}$ e $n \neq n + 1$ (sugerimos ao leitor ter a curiosidade de verificar). Portanto, $\mathbf{n < n + 1}$. Além disso, $|n| = n$ e $|n + 1| = n + 1$. Logo, $|n| < |n + 1|$. Então, pelo Princípio da Casa dos Pombos, para qualquer função $h : n + 1 \to n$, existem dois elementos $x \leq n + 1$ e $y \leq n + 1$ tais que $h(x) = h(y)$. Em particular, suponha que $h(z) = f(z)$, para todo $z \leq n + 1$. Assim, $f(x) = f(y)$, indicando que f não é injetora e, portanto, não é bijetora. □

Em uma segunda versão do **Princípio da Casa dos Pombos**, podemos expressar com mais detalhes a ideia já capturada na primeira versão. Antes de enunciar a versão mais detalhada, vejamos a intuição que leva a ela. Suponha A e B conjuntos tais que $|A| = 2|B|$. Neste caso, podemos nos perguntar se A já é suficientemente grande para garantir a existência de um elemento de B como valor de pelo menos três elementos de A. A resposta seria não, pois podemos obter uma função na qual cada elemento de B é o valor de exatamente dois elementos de A (como?). Ora, esta é a única forma de evitar que um elemento de B seja o valor de três de A. Logo, se acrescentarmos um novo elemento a A, digamos a', formaremos um novo conjunto A' tal que $|A'| = 2|B| + 1$. Observamos que qualquer função $f' : A' \to B$ pode-se se construída partindo-se de uma função $f : A \to B$, fazendo-se $f'(a) = f(a)$, para todo $a \in A$, e escolhendo-se $f'(a') \in B$. Essa escolha se dá em um dos dois casos: se $f'(a')$ for o valor, segundo f, de (pelo menos) dois elementos de A, digamos a_1 e a_2, então temos a', a_1 e a_2 como três elementos distintos de A' com $f'(a') = f'(a_1) = f'(a_2)$; caso contrário, $f'(a')$ é o valor de no máximo 1 elemento de A. Então, f já atribui um mesmo valor a algum grupo de 3 elementos de A. De uma forma geral, podemos escrever o seguinte:

Definição (Princípio da Casa dos Pombos - Segunda Versão) Sejam A e B dois conjuntos finitos. Se $|A| > i|B|$, para algum $i \in$ n, então, para qualquer função $f : A \to B$, existem $i + 1$ elementos $a_1, a_2, \cdots, a_{i+1}$ tais que $f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_{i+1})$.

Exemplo Nós desejamos mostrar que, em um grupo de 6 pessoas, há três pessoas que não se conhecem mutuamente ou há três pessoas que se conhecem mutuamente. Para uma pessoa a do grupo de 6 pessoas, defina A como sendo o conjunto das 5 pessoas restantes e $B = \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$. Observe que $|A| > 2|B|$. Pelo Princípio da Casa dos Pombos, segunda versão, para qualquer função $f : A \to B$, existem 3 elementos a_1, a_2, a_3 de A tais que $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3)$. Suponha, então, a função f como sendo a função que retorna $\mathbf{V}$ para todo $a' \in A$ que a conhece, e $\mathbf{F}$ em caso contrário. Portanto, há 3 pessoas em A que a conhece ou há 3 pessoas em A que a não conhece. Considere o primeiro caso. Se houver duas entre aquelas que ela conhece que se conheçam, elas formam com A o grupo desejado. Caso contrário, as pessoas que A conhece formam um grupo de 3 pessoas que não se conhecem. Um raciocínio semelhante pode ser feito para o segundo caso.

Exemplo Suponha que em um hotel temos 90 quartos e 100 hóspedes. Desejamos distribuir chaves dos quartos para os hóspedes de tal forma que qualquer que seja o grupo de 90 hóspedes escolhidos, cada hóspede do grupo possui a chave de um dos quartos. Considere o esquema com 990 chaves onde damos a chave do quarto 1 para o hóspede 1, a chave do quarto 2 para o hóspede 2, e assim sucessivamente, e a chave do quarto 90 para o hóspede 90. Em seguida, damos copias das chaves dos 90 quartos para os hóspedes 91, 92, …, 100. Claramente, esse esquema funciona. Vamos provar que 990 chaves é o número mínimo de chaves que devem ser distribuídas para que a condição que impomos seja satisfeita. Suponha um esquema qualquer com 989 chaves. Vai existir um quarto J com no máximo 10 chaves distribuídas. Basta formar um grupo de 90 hóspedes que não tenha os possuidores das chaves do quarto J para o esquema estar inviabilizado.