From ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização

Manuscritos: Princípio da Indução Matemática

Material complementar

- **Exercícios**
- **Outros Exemplos?**
- **Notas de Aula**
- **Aplicações**
- **Aulas em Vídeo**

Suponha que nós queremos provar que, dado um número natural $k \geq 8$, é possível encontrar dois números naturais a e b tais que o número k pode ser decomposto na forma $k = 3a + 5b$. Claramente, uma abordagem para a demonstração seria verificar cada caso. Primeiro, mostramos como decompor $k = 8$, em seguida como decompor $k = 9$, depois $k = 10$, e assim sucessivamente. Como há um número infinito de valores a verificar, essa abordagem é inviável. Vamos então pensar em outra maneira de provar o que queremos. Uma idéia seria verificar se é possível obter a decomposição de um número $k + 1$, uma vez tendo uma decomposição $k = 3a + 5b$ para o valor $k \geq 8$. Há dois casos a examinar:

$b > 0$
: Observe que ao subtrair 5 e somar 6 a k, obtemos $k + 1$. Então, $3(a + 2) + 5(b - 1)$ é uma decomposição para $k + 1$;

$b = 0$
: Como $k \geq 8$, verifica-se que $a \geq 3$. Então, a decomposição de $k + 1$ é obtida com a subtração de 9 e a soma de 10 a k da seguinte forma: $3(a - 3) + 5(b + 2)$.

Uma vez que $8 = 3 \,.\, 1 + 5 \,.\, 1$, o mecanismo acima nos permite obter também a decomposição para 9: como $b > 0$ na decomposição do 8, temos que $3 \,.\, (1 + 2) + 5 \,.\, (1 - 1) = 3 \,.\, 3 + 5 \,.\, 0$ é uma decomposição do 9. Uma vez tendo a decomposição do 9, a decomposição do 10 é obtida usando o caso $b = 0$: $10 = 3 \,.\, (3 - 3) + 5 \,.\, (0 + 2) = 3 \,.\, 0 + 5 \,.\, 2$. A partir da decomposição de 10, obtemos a de 11, e assim sucessivamente. Desta forma, mostramos que a afirmação inicial é válida para todo $k \geq 8$ sem precisar verificar todos os casos explicitamente.

Vejamos outra demonstração baseada no mesmo princípio.

Lema $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Suponha que a igualdade valha para algum $n \geq 0$. Vamos mostrar que a mesma igualdade também valerá para $n + 1$. Para isso, observe que

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + n + 1$$

Ora, como sabemos que a igualdade vale para n, podemos escrever

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = n(n+1)/2 + n + 1 = (n+1)(n+2)/2,$$

que corresponde exatamente à igualdade do lema aplicada a $n+1$. Observando que a igualdade é claramente válida para $n = 0$, pelo raciocínio acima sabemos que também vale para $n = 1$, que por sua vez implica que vale para $n = 2$, e assim por diante. □

Esses dois exemplos ilustram a aplicação de uma técnica poderosa conhecida como *Princípio da Indução Matemática*. Veremos algumas versões desse princípio, sendo a primeira delas enunciada a seguir:

> ***Princípio*** *(Indução Matemática (primeira versão)) Seja $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que*
> 1. *$0 \in A$, e*
> 2. *se $n \in A$, então $n^+ \in A$.*
>
> *Então, $A = \mathbb{N}$.*

Em termos menos formais, o Princípio da Indução Matemática diz que qualquer subconjunto de números naturais contendo 0, e com a propriedade de conter $n+1$ sempre que contém n, é o conjunto de *todos* os números naturais. A justificativa deste princípio deve ser intuitivamente clara. Todo número natural deve pertencer a A, uma vez que ele pode ser alcançado a partir de 0 em uma sucessão finita de passos, onde a cada passo uma unidade é adicionada.

Uma outra forma de argumentação da mesma idéia é por contradição. Suponha que as condições (1) e (2) do Princípio da Indução sejam verdadeiras, mas $A \neq \mathbb{N}$. Então algum número de $\mathbb{N}$ foi omitido em A. Seja n o menor número em $\mathbb{N}$ que foi omitido em A. Sabemos que $n \neq 0$, pois a condição é verdadeira. Logo, pela escolha de n, temos que $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \subseteq A$. Então como (2) é verdade, temos que $n \in A$, contradizendo a escolha de n.

Na prática, a indução é usada da seguinte forma. Seja $P(x_0, x_1, \cdots, x_{k-1})$ uma fórmula que depende de $k \geq 1$ parâmetros $x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}$, sendo que o parâmetro x é um número natural. Defina

$$V = \{n \in \mathbb{N} : P(n, x_1, \cdots, x_{k-1}) = \mathbf{V},\ \text{para todos os valores de } x_1, \cdots, x_k\}$$

como sendo o conjunto dos números naturais que atribuídos a x tornam a fórmula válida para todos os valores de $x_1, \cdots, x_k$. Pelo Princípio da Indução Matemática, se

1. $0 \in V$, e
2. se $n \in V \Rightarrow n+1 \in V$,

então $V = \mathbb{N}$. Dessa forma, se V possui as propriedades acima, a fórmula é válida para todos os números naturais (quando atribuídos a x). Como ilustração, observe a demonstração do Lema **19**. Naquele caso, a fórmula em questão depende apenas de um número natural, e é dada por

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

A validade dessa fórmula para todos os números naturais foi feita verificando as propriedades mencionadas acima para o conjunto

$$V = \left\{n \in \mathbb{N}: \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

O método de demonstração baseado no Princípio da Indução Matemática segue três etapas, a saber:

1. *Base da indução*: devemos provar que $0 \in V$, ou seja que $P(0, x_1, \cdots, x_{k-1}) = \mathbf{V}$, para todos os valores de $x_1, \cdots, x_k$.
2. *Hipótese de indução*: é a suposição que para algum $n \geq 0$ arbitrário, $P(n, x_1, \cdots, x_{k-1}) = \mathbf{V}$, para todos os valores de $x_1, \cdots, x_k$.
3. *Passo de indução*: nós mostramos, usando a hipótese de indução, que P também é válida para $n+1$. Logo, a hipótese e o passo de indução garantem que se $n \in V \Rightarrow n+1 \in V$.

A demonstração na forma acima será chamada de demonstração *por indução em* x. Vejamos mais alguns exemplos de aplicação desse método.

Lema $0 \leq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Por indução em n. Se $n = 0$, temos o lema válido trivialmente. Suponha $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq k$. Para mostrar que $0 \leq k+1$, observamos que $k \subseteq k \cup \{k\}$, o que, com o auxílio da hipótese de indução, leva ao resultado desejado. $\square$

Lema $n < m \Rightarrow n \subseteq m$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja n um número natural qualquer. Devemos mostrar que

se $m \in \mathbb{N}$ tal que $n < m$, então $n \subseteq m$.

Como a escolha de n é arbitrária, temos o lema válido para qualquer $n \in \mathbb{N}$. A demonstração da **implicação** é por indução em m. Se $m = 0$, então a **implicação** vale **por vacuidade**. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que se $n < k$, então $n \subseteq k$. Tomando $m = k+1$, temos que se $n < k+1$, então $n \in k \cup \{k\}$. Há, portanto, duas possibilidades. A primeira delas é $n \in k$, o que nos remete `a hipótese de indução, com a qual concluímos que $n \subseteq k$. Como $k \subseteq k+1$, chegamos a $n \subseteq k+1$. A segunda possibilidade é $n = k$, o que nos leva novamente a $n \subseteq k+1$. $\square$

Lema $n \subseteq m, n \neq m \Rightarrow n < m$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja n um número natural qualquer. Devemos mostrar que

se $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \subseteq m, n \neq m$, então $n < m$.

A demonstração da **implicação** é por indução em m para a escolha arbitrária de n, demonstrando o lema para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Se $m = 0$, então a **implicação** vale **por vacuidade**. Supomos $k \in \mathbb{N}$ tal que se $n \subseteq k, n \neq k$, então $n < k$. Devemos verificar o caso $m = k + 1$. Se $n \subseteq k + 1, n \neq k + 1$, então podemos escrever $n \subseteq k \cup \{k\}$ e $n \neq k + 1$. Caso $n \subseteq k$ e $n \neq k$, podemos usar a hipótese de indução para concluir que $n < k$. Como $k < k + 1$, usamos a **transitividade de $<$** para concluir que $n < k + 1$, tanto se $n = k$ quanto $n < k$. □

Lema $n \notin n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Por indução em n. Se $n = 0$, temos o lema válido trivialmente. Suponha que $k \notin k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Para mostrar que $k + 1 \notin k + 1$, usamos contradição. Se $k + 1 < k + 1$, então observamos que $k + 1 \in k \cup \{k\}$, o que significa que $k + 1 < k$ ou $k + 1 = k$. Como sabemos que $k < k + 1$ (visto que $k \in k \cup \{k\}$), usamos a **transitividade de $<$** para obter a contradição $k < k$ (ou seja, $k \in k$) com a hipótese de indução. □

Lema 20 $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, para todo $x \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Procedemos por indução em n para mostrar que o conjunto

$$V = \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \right\}$$

é exatamente o conjunto dos números naturais.

1. *Base da indução*: tomando $n = 0$, verificamos facilmente que $x = (x'^{1} \wedge - 1)/(x - 1)$.
2. *Hipótese de indução*: supomos que o lema é válido para algum $n > 0$.
3. *Passo de indução*: devemos verificar que o lema também vale para $n + 1$. Primeiro, observamos que
   $\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1}$
   Usando a hipótese de indução, podemos reescrever a igualdade acima na forma
   $\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + x^{n+1}$
   Desenvolvendo o lado direito da igualdade, chegamos a
   $\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{x^{n+2}-1}{x-1}$,
   provando o lema para $n + 1$. □

Lema Seja A um conjunto. Se $|A| = n$, então $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$
.

Demonstração: Por indução em $|A|$. É trivial verificar que o fato acima é válido quando $|A| = 0$, pois nesse caso, $A = \emptyset$ e $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$. Logo, $|\mathcal{P}(A)| = 1 = 2^0$. Como hipótese de indução, vamos supor que para qualquer conjunto A com cardinalidade k, para algum $k \in \mathbb{N}$, |\calP(A) | $= 2^k$. Vamos provar agora que esse fato também é válido para conjuntos de cardinalidade $n = k + 1$. Seja A um conjunto tal que $|A| = k + 1$. Seja ainda $f : k + 1 \to A$ uma função bijetora. Tome $a = f(k)$ e $Aa = A - \{a\}$. A cardinalidade de Aa é k pois f tomada em k é uma função bijetora de k em Aa. Além disso, como $Aa \subseteq A$, $\mathcal{P}(Aa) \subseteq \mathcal{P}(A)$. Podemos particionar $\mathcal{P}(A)$ em duas partes: uma parte com os subconjuntos que contêm a e a outra com os subconjuntos que não contêm a. Ora, a segunda parte é exatamente $\mathcal{P}(Aa)$ e, além disso, as duas partes são idempotentes pois podemos definir uma função bijetora que associa cada elemento $x \in \mathcal{P}(Aa)$ com o elemento $x \cup \{a\}$ da primeira parte. Portanto, pelo **Lema**, a primeira parte tem a mesma cardinalidade de $\mathcal{P}(Aa)$. Logo,
$\mathcal{P}(A) = 2^k + 2^k = 2^{k+1}$. $\square$

Exemplo *Usando a noção intuitiva de números naturais, considere um tabuleiro de xadrez de* $2^n \times 2^n$*, sendo n um número natural. Vamos chamar de L-triminó uma* ***figura com três quadrados arrumados em forma de L****. Será que é possível cobrir de forma exata todo o tabuleiro usando apenas L-triminós (cada quadrado do tabuleiro deve ser coberto com parte de um único triminó e os triminós usados não devem ultrapassar os limites do tabuleiro) de forma que reste exatamente um quadrado descoberto em qualquer um dos 4 cantos do tabuleiro ? A resposta a essa pergunta é sim,* ***quando o tabuleiro possui dimensões*** $\mathbf{2 \times 2}$*. A pergunta natural é: dado um número natural n* ≥ 0*, é possível cobrir o tabuleiro de dimensões* $2^n \times 2^n$ *com L-triminós satisfazendo as condições anteriores? Para verificar essa possibilidade, procederemos por indução em n. Para a base da indução, escolhemos* $n = 0$*, e verificamos trivialmente que a afirmação é válida para o tabuleiro de dimensões* 1×1*. Vamos supor que qualquer tabuleiro com dimensões* $2^k \times 2^k$*, para algum* $k \geq 0$*, pode ser coberto com L-triminós e vamos considerar um tabuleiro T de dimensões* $2^{k+1} \times 2^{k+1}$*. Para o passo de indução, dividimos o tabuleiro T em* ***13quatro*** *tabuleiros* T_1*,* T_2*,* T_3 *e* T_4*, todos de dimensões* $2^k \times 2^k$*]]. Pela hipótese de indução, podemos cobrir cada um desses 4 tabuleiros, sendo que a posição do quadrado deixado descoberto para cada caso é indicado abaixo:*

$\mathbf{T_1}$
: *canto inferior direito*

$\mathbf{T_2}$
: *canto inferior esquerdo*

$\mathbf{T_3}$
: *canto superior direito*

$\mathbf{T_4}$
: *canto inferior direito*

Além disso, podemos colocar um L-triminó no centro do tabuleiro T, de maneira a cobrir os *quadrados descobertos de T_1, T_2 e T_3. Logo, a cobertura dos quatro tabuleiros junto ao L-triminó colocado no centro produz uma cobertura do tabuleiro T com L-triminós, deixando o canto inferior direito descoberto. Observe que é possível usar o mesmo procedimento para obter uma cobertura para T deixando o quadrado descoberto em qualquer um dos demais 3 cantos.*

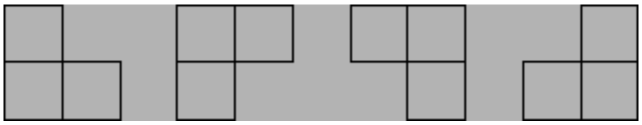

Figura: *L-triminós.*

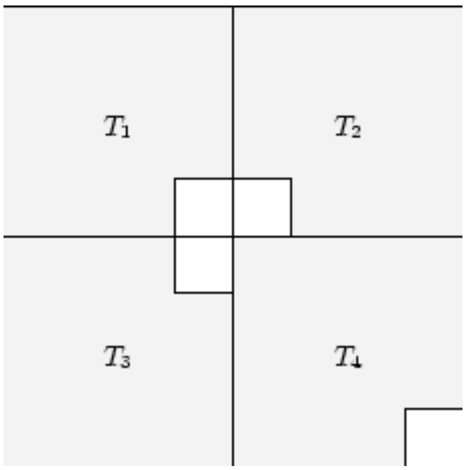

Figura: *Um Tabuleiro de Xadrez de dimensões $2^{k+1} \times 2^{k+1}$, dividido em quatro tabuleiros de dimensões $2^k \times 2^k$, cada um coberto com L-triminós.*

Retomemos o primeiro exemplo desta seção, no qual demonstramos que

$V = \{k \in \mathbb{N}\colon \text{ se } k > 8, \text{ então existem } a \in \mathbb{N} \text{ e } b \in \mathbb{N} \text{ tais que } k = 3a + 5b\}$

A demonstração feita naquela oportunidade pode ser vista como uma aplicação do Princípio da Indução Matemática tal como ele foi enunciado anteriormente? Embora de fato isso seja possível, é mais conveniente usar o enunciado a seguir.

Princípio 2 *(Princípio da Indução Matemática (segunda versão)) Seja $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que*

1. *$k \in A$, e*
2. *se $n \in A$, $n \geq k$, então$n^+ \in A$.*

Então, $\mathbb{N} - \{0, 1, \cdots, k-1\} \subseteq A$.

Trocando em miúdos, se tomarmos como base da indução um valor $k > 0$, então A conterá todos os naturais maiores ou iguais a k. Voltando ao **exemplo do inicial**, observamos que a demonstração envolvendo o **conjunto** V cumpre as seguintes 3 etapas:

1. Como base da indução, é trivial verificar que $8 \in V$ (na realidade, neste caso os valores

$0, 1, \ldots 7$ também pertencem a V por vacuidade);
2. Como hipótese de indução, supomos que seja possível decompor um certo $k \geq 8$; e, finalmente,
3. Usando a hipótese de indução, provamos que também é possível fazer uma decomposição de $k + 1$. Logo, pelo Princípio da Indução Matemática, $N - \{0, 1, \cdots, 8\} \subseteq V$, ou seja, a sentença é válida para todo inteiro $k \geq 8$.

Ainda uma terceira versão pode ser mais conveniente em algumas demonstrações por indução.

> ***Princípio*** *(Princípio da Indução Matemática (terceira versão)) Seja $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que*
> 1. *$k \in A$, e*
> 2. *se $n \geq k$ e $\{0, 1, 2, \ldots, n\} \subseteq A$, então $n^+ \in A$.*
>
> *Então, $\mathbb{N} - \{0, 1, \cdots, k-1\} \subseteq A$.*

Para o próximo exemplo, precisamos de uma definição sobre **grafos**. Um grafo $G = (V, E)$ é *conexo* se, para todo par u e v de vértices, existe uma sequência $\langle u = v_1, v_2, \ldots, v_\ell = v\rangle$ de vértices de G tal que $v_i v_{i+1} \in E$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, \ell - 1\}$. Por outro lado, esse grafo é *desconexo* se ele não é conexo.

> ***Teorema*** Se $G = (V, E)$ é um grafo conexo, então $|V| \leq |E| + 1$.

Demonstração: Para a demonstração por indução em $|V|$, considere o grafo com apenas um vértice. O teorema é trivialmente válido para esse grafo, mostrando assim a base da indução. Suponha agora, como hipótese de indução, que o teorema valha para todos os grafos com até n vértices, onde $n \geq 1$ é um número natural. Para o passo de indução, considere um grafo conexo $G = (V, E)$, com $|V| = n + 1$, e seja $v \in V$. Se retirarmos o vértice v de V, obtemos o grafo $G' = (V', E')$, onde $V' = V - \{v\}$ e $|V'| \geq 1$. Como G' pode ser um grafo desconexo, escolhemos uma partição $V' = V'_1 \cup V'_2 \ldots \cup V'_\ell$, $c \geq 1$, tal que $G'_1, G'_2, \cdots, G'_\ell$, com cada $G'_i = (V'_i, E[V'_i])$, sejam subgrafos conexos de G' e ℓ seja o menor possível. Para cada $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, denotamos $|V'_i| = n_i$ e $|E[V'_i]| = m_i$. Podemos observar que para contar o total de arestas em G, devemos contar as arestas em cada subgrafo conexo, mais as arestas com uma extremidade em v. Como G é conexo, deve haver uma aresta com uma extremidade em v e outra em um vértice de V_i', para cada subgrafo conexo G'_i. Portanto,

$$m \geq m_1 + m_2 + \ldots + m_\ell + \ell = (m_1 + 1) + (m_2 + 1) + \ldots + (m_\ell + 1).$$

Usando a hipótese de indução para cada subgrafo conexo, temos $n_i \leq m_i + 1$, para todo $i \in \{1, \ldots, \ell\}$. Substituindo na desigualdade acima, temos

$$m \geq n_1 + n_2 + \ldots + n_\ell = n.$$

Logo, $m + 2 \geq m + 1 \geq n + 1$. $\square$
