From ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização

Manuscritos: Conjunto dos Números Naturais

A definição mais intuitiva do conjunto dos números é a seguinte.

Material complementar

- **Exercícios**
- **Outros Exemplos?**
- **Notas de Aula?**
- **Bibliografia?**

Definição (Conjunto dos números naturais) *O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é tal que:*

1. *$\mathbb{N}$ contém o conjunto $\emptyset$;*
2. *Se o conjunto n é um elemento de $\mathbb{N}$, então n^+ também o é; e*
3. *$\mathbb{N}$ não contém outros conjuntos que não sejam os que podem ser construídos a partir do $\emptyset$ pela regra anterior.*

Essa definição nos leva a refletir sobre o significado de cada número natural. Daí, podemos levantar a pergunta: o que é, por exemplo, o número 3? Para chegar ao número 3, devemos formar uma sequência começando do $\emptyset$. O sucessor do $\emptyset$ é $\{\emptyset\}$, cujo sucessor é $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, e cujo sucessor por sua vez é $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Vamos então dar nomes a esses sucessores:

$$0 = \emptyset$$
$$1 = 0^+ = \{\emptyset\}$$
$$2 = 1^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$
$$3 = 2^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$
$$4 = 3^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

De uma forma geral, se n é um número natural, então podemos obtê-lo a partir do zero pela aplicação sucessiva do operador sucessor. Assim, o conjunto n, caso não seja o conjunto vazio, pode ser escrito na forma $n = \{0, 1, 2, \cdots, n^-\}$, onde n^- é o número natural cujo sucessor é n. Ou seja,

$$0 = \emptyset$$
$$1 = 0^+ = \{0\}$$
$$2 = 1^+ = \{0, 1\}$$
$$3 = 2^+ = \{0, 1, 2\}$$
$$4 = 3^+ = \{0, 1, 2, 3\}$$

Dessa forma, se n é um número natural, então $n \in n^+$ e $n \subset n^+$. Observe, por exemplo, que

$3 \in 4$ e que $3 \subset 4$.

Veremos a seguir que esta definição do número 3 corresponde exatamente à idéia de número de elementos em um conjunto. Assim sendo, falar de cardinalidade de conjuntos corresponde a falar dos números naturais.

Definição Dados dois conjuntos A e B, dizemos que A é *idempotente a* B se existe uma função bijetora $f : A \to B$.

Em outras palavras, os dois conjuntos A e B são idempotentes quando existe uma correspondência de um para um entre os elementos de A e os elementos de B, o que significa que podemos "casar" os elementos de A e B de tal forma que para cada elemento de A associamos um elemento distinto de B e vice-e-versa. Por exemplo, dados os conjuntos $A = \{a, b\}$ e $B = \{x, y\}$, temos a função bijetora $F : A \to B$ tal que $F(a) = x$ e $F(b) = y$, significando que A e B são idempotentes. Um exemplo mais sofisticado consiste dos conjuntos $\mathbb{N}$ dos números naturais e $\mathbb{P}$ dos números pares (fica aqui como exercício definir o conjunto $\mathbb{P}$). A função $F : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ tal que $F(0) = 0$ e $F(n) = F(n^-)^{++}$, se $n \neq 0$, é bijetora (é a função cujo valor é 2n). Portanto $\mathbb{N}$ é idempotente a $\mathbb{P}$.

Assim, as seguintes propriedades são válidas.

Teorema *Se A, B e C são conjuntos, então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *A é idempotente a A;*
2. *Se A é idempotente a B, então B é idempotente a A;*
3. *Se A é idempotente a B e B é idempotente a C, então A é idempotente a C.*

Demonstração:

1. Basta verificar que a função $F = \{(a, a') : a, a' \in A, a = a'\}$ é bijetora (essa verificação é deixada ao leitor).
2. Seja $F : A \to B$ uma função bijetora. Basta mostrar que F^{-1} é uma função bijetora de B para A.
3. Considere duas funções bijetoras $F : A \to B$ e $G : B \to C$. A propriedade que desejamos é válida se pudermos mostrar que $G \circ F$ é uma função bijetora de A para C. Pelo **Teorema 11**, sabemos que $G \circ F$ é injetora. Deixamos ao leitor a demonstração de que $ContraDom_{G \circ F} = C$. $\square$

O conceito de idempotência está ligado à idéia de número de elementos de um conjunto, conforme formalizada na definição a seguir.

Definição (Cardinalidade) Um conjunto A possui *cardinalidade* n, denotado por $|A| = n$, se A é idempotente a n.

A ligação entre cardinalidade de um conjunto e um número natural pode ser melhor visualizada com um exemplo. Considere o seguinte conjunto de conjuntos:

$S = \{\emptyset, \{a, b\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{a, b, c\}\}$

Usando o **Teorema**, podemos verificar que a relação

$R = \{(A, A') : A \in S, A' \in S, A \text{ é idempotente a } A'\}$

é uma relação de equivalência. Mais ainda, as classes de equivalência de R são

$[0]_R = \{\emptyset\}$
$[1]_R = \emptyset$
$[2]_R = \{\{a, b\}\}$
$[3]_R = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{a, b, c\}\}$

o que corresponde aos conjuntos de S que possuem o mesmo número de elementos. Em particular, vemos que $[3]_R$ possui os conjuntos de S que possuem 3 elementos. Esse fato nos sugere dizer que *um conjunto possui cardinalidade 3 se ele é idempotente ao conjunto 3*. Então, por exemplo, as cardinalidades dos conjuntos $\{a, b, c\}$, $\{a, \emptyset, d\}$ e $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ são todas iguais a 3.

Lema Sejam A e B dois conjuntos. Se A é idempotente a B, então $|A| = |B|$.

Demonstração: Suponha a existência da função bijetora $f : A \to B$, e suponha também que $|B| = n$, onde $n \in \mathbb{N}$. Por definição, existe uma função bijetora $h : B \to n$. Logo, a função composta $h \circ f : A \to n$ é uma função bijetora que mostra que $|A| = n$. $\square$

Embora a **definição intuitiva** dos números naturais nos permita obter o significado que esperamos, há dificuldades quando tentamos usá-la para responder à questão essencial: $\mathbb{N}$ é um conjunto à luz dos axiomas? Quando consideramos essa questão, torna-se conveniente uma outra definição para $\mathbb{N}$, que é a seguinte.

Definição *(Conjunto dos números naturais) O conjunto dos números naturais é*

$\mathbb{N} = \{n \mid n \textit{ pertence a todo conjunto indutivo}\}$

Qual a ajuda que essa nova definição nos traz? A resposta é: nos permite usar o **Axioma da Indução**. Com esse axioma, sabemos que podemos tomar um conjunto indutivo I e escrever

$\mathbb{N} = \{n \in I \mid n \text{ pertence a todo conjunto indutivo}\}$,

o qual é um conjunto pelo **Axioma dos Subconjuntos**. Embora possa parecer, à primeira vista, difícil estabelecer a equivalência entre as duas definições, ambas nos permitem expressar as propriedades que nos interessam. Vejamos, por exemplo, a ordenação que esperamos obter dos naturais segundo a **definição formal**.

Definição *(Relação de menor ou igual) Se $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}$, então*

1. $n < m$ *se* $n \in m$
2. $n \leq m$ *se* $n < m$ *ou* $n = m$.

Lema Sejam ℓ, n e m três números naturais. Se $\ell < n$ e $n < m$, então $\ell < m$.

Demonstração: Sejam ℓ, n e m três números naturais tais que $\ell < n$ e $n < m$. Como n **<** m **implica** $n \subseteq m$, temos $\ell \in m$ já que $\ell \in n$. $\square$

Teorema $(\mathbb{N}, \leq)$ é um conjunto totalmente ordenado.

Demonstração: Para demonstrar o teorema, devemos mostrar inicialmente que a relação $\leq$ é transitiva, o que decorre diretamente do **lema anterior** (suponha que ℓ, n e m sejam todos diferentes pois, se assim não for, a transitividade vale trivialmente). É simples verificar que a relação $\leq$ é também reflexiva e anti-simétrica, de onde concluimos que $(\mathbb{N}, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado.

Para concluir a demonstração, devemos ainda mostrar que se n e m são dois números naturais, então $n \leq m$ ou $m \leq n$. Para isso, seja $\{0, 1, 2, \cdots, k\}$ o conjunto $n \cap m$. Temos que o número natural k pertence a n e a m, mas o seu sucessor k^+ não pertence a n ou não pertence a m. Pela **definição de sucessor**, sabemos que $n \leq n^+ = n \cup \{n\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. O número natural que pertence a n, mas cujo sucessor não pertence a n é o n^- (pela transitividade de $\leq$ e por $n \notin n$). Da mesma forma, $m^- \in m$ mas $m \notin m$. Portanto, $k = n^-$ ou $k = m^-$. Supondo $n \neq m$ (novamente, o caso em que $n = m$ é trivial), temos $(k = n^-) \wedge (k^+ \in m)$ ou $(k = m^-) \wedge (k^+ \in n)$. No primeiro caso, temos $n \in m$, enquanto no segundo, $m \in n$. $\square$

Retomaremos esse teorema posteriormente, apresentando a demonstração de $m \notin m$.

Definição *(Relação de maior ou igual) Se $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}$, então*

1. $n > m$ *se* $(n, m) \notin \leq$
2. $n \geq m$ *se* $n > m$ *ou* $n = m$.

As definições acima de sucessor e números naturais nos levam à noção que temos das operações de soma, subtração, multiplicação e divisão de números naturais. Por exemplo, na soma de dois números naturais $a + b$, o seu resultado é obtido aplicando b sucessivas vezes a operação de encontrar o sucessor a partir de a. Usaremos a notação $n + 1$ para indicar n^+ sempre que conveniente. Usamos uma notação especial para indicar a soma dos valores dos elementos de um determinado conjunto segundo uma certa função. Mais concretamente, seja A um conjunto e $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ uma função. A soma dos valores de A

segundo f é indicada por

$\sum_{a \in A} f(a)$
