From ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização

Manuscritos: Funções

As relações binárias tal que cada elemento do domínio é associado a exatamente um elemento do contra-domínio merece um tratamento especial em virtude das aplicações que possuem.

Material complementar

- **Exercícios**
- **Outros Exemplos?**
- **Notas de Aula?**
- **Bibliografia?**

Definição (Função) Uma relação binária F entre A e B é uma *função* se a seguinte propriedade é verdadeira, para qualquer que seja $a \in A$: se existem dois pares $(a, b_1) \in F$ e $(a, b_2) \in F$, então $b_1 = b_2$.

Na definição acima, se $(a, b) \in F$, então dizemos que b é o *valor da função F em a*, também denotado $F(a)$. O valor $F(a)$ não é definido quando $a \notin Dom_F$. Usaremos a notação $F: A \to B$, onde A e B são dois conjuntos, para indicar que F é tal que $Dom_F = A$ e $ContraDom_f \subseteq B$.

Uma função pode ser representada na forma gráfica ou na forma tabular, como o fizemos para as outras relações. Entretanto, a forma tabular com duas colunas onde na primeira listamos todos os elementos do domínio e na segunda os valores correspondentes é mais econômica do que aquela vista anteriormente. A tabela abaixo ilustra duas funções $F_1: V_1 \to V_2$ e $F_2: V_1 \to V_2$ entre os conjuntos $V_1 = \{a, b, c, d, e\}$ e $V_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

V_1	F_1	F_2
a	5	1
b	4	3
c	3	5
d	4	2
e	5	4

Nessa tabela, observamos que as duas funções indicadas são diferentes, pois $F_1(a) = 5$ e $F_1(e) = 5$, mas $F_2(a) = 1$ e $F_2(e) = 4$. O teorema a seguir descreve as condições para que duas funções sejam iguais.

Teorema Se F e H são funções, então $F = H \iff Dom_F = Dom_H$ e, para todo $x \in Dom_F$, $H(x) = F(x)$.

Demonstração: Para provar a primeira implicação, supomos $F = H$, o que corresponde a $(x, y) \in F \Leftrightarrow (x, y) \in H$, para todo par ordenado (x, y). Portanto, se $a \in Dom_F$, então um par qualquer $(a, b) \in F$ também é um par de H. Logo, $a \in Dom_H$. Usando um argumento análogo, mostramos que $a \in Dom_H \Rightarrow a \in Dom_F$. Portanto, $Dom_F = Dom_H$. Além disso, se $a \in Dom_F$, há o par ordenado $(a, F(a))$ em F. Como sabemos que $a \in Dom_H$ e $(a, F(a)) \in H$ é o único par ordenado em H contendo a na primeira coordenada, temos que $F(a) = H(a)$.

A segunda implicação decorre dos seguintes argumentos. Suponha $Dom_F = Dom_H$ e, para todo $x \in Dom_F$, $H(x) = F(x)$. Se tomarmos $a \in Dom_F$, sabemos da existência de um único par ordenado em F tendo a como primeira coordenada. Esse par é $(a, F(a))$, que também deve estar em H porque $a \in Dom_H$ já que $Dom_F = Dom_H$, porque H é uma função e, por isso, deve conter exatamente um par ordenado em que a é a primeira coordenada, e porque $F(a) = H(a)$. De forma análoga, concluimos que $a \in Dom_H \Rightarrow H \subseteq F$. Portanto, $F = H$. $\square$

Uma questão que ocorre frequentemente é a de saber se uma dada relação é ou não uma função. No caso de a relação em questão ser a composição de duas funções, a resposta é afirmativa.

Teorema Se F e H são duas funções, então $H \circ F$ é a função $(H \circ F)(x) = H(F(x))$, para todo $x \in Dom_{H \circ F} = Imag_{F^{-1}}(Dom_H)$.

Demonstração: Primeiro mostraremos que $H \circ F$ é uma função. Suponha, por contradição, a existência de (a, b_1) e (a, b_2) em $H \circ F$, com $b_1 \neq b_2$. Pela definição de composição, $(F(a), b_1) \in H$ e $(F(a), b_2) \in H$. No entanto, o fato $b_1 \neq b_2$ contraria a hipótese de H ser uma função. Portanto, $b_1 = b_2 = (H \circ F)(a) = H(F(a))$.

Além disso, devemos mostrar que $Dom_{H \circ F} = Dom_F \cap Imag_{F^{-1}}(Dom_H)$. Sabemos que

$$\begin{aligned} a \in Dom_{H \circ F} & \Longleftrightarrow \exists b : (a, b) \in H \circ F \\ & \Longleftrightarrow \exists b : (F(x), b) \in H \end{aligned}$$

Portanto, $a \in Dom_(H \circ F)$ se e somente se $F(x)$ e $H(F(x))$ existem. Em outras palavras, $x \in Dom_F$ e $F(x) \in Dom_H$, respectivamente. O resultado esperado segue do **lema?** pois $F(x) \in Dom_H \Leftrightarrow x \in Imag_{F^{-1}}(Dom_H)$ e $Dom_F \subseteq Imag_{F^{-1}}(Dom_H)$. $\square$

Duas propriedades relevantes que uma função $F : A \rightarrow B$ pode apresentar estão ligadas à forma como o seu contra-domínio associa-se a A e B. Uma das propriedades diz que todo elemento de B é imagem de algum elemento de A, enquanto a segunda impõe que não haja dois elementos distintos de A com a mesma imagem. Essas propriedades são suficientemente relevantes para receberem nomes especiais. De uma maneira formal, temos a seguinte definição:

> ***Definição*** *Uma função $F\colon A \to B$ é chamada de:*
> ***Sobrejetora***
> *se $ContraDom_F = B$.*
> ***Injetora***
> *se $a_1 \in Dom_F$, $a_2 \in Dom_F$ e $F(a_1) = F(a_2)$, então $a_1 = a_2$.*
> ***Bijetora***
> *se F é simultaneamente injetora e sobrejetora.*

Como exemplo de uso de uma função, considere as **duas relações de ordem parcial** representadas por seus **Diagramas de Hasse**. Os pares nas relações $R \subseteq A \times A$, onde $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $S \subseteq B \times B$, onde $B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, podem ser associados pela função $F\colon A \to B$ dada pela seguinte tabela:

A	F
1	c
2	a
3	f
4	d
5	e
6	b
7	g

É possível observar que a função F tem as seguintes propriedades: F é bijetora e $(x, y) \in R$ se e somente se $(F(x), F(y)) \in S$. Ordens parciais que admitem uma função com essas propriedades são chamadas de *isomorfas*. Essa é uma definição que expressa a informação que as relações possuem "a mesma estrutura", noção essa que é definida também para outros objetos matemáticos. Chama-se a atenção para a particularidade do papel desempenhado pela propriedade de F ser bijetora: seu objetivo é garantir que ambos os conjuntos possuem o mesmo número de elementos. Retornaremos a essa importante utilidade de funções bijetoras mais adiante.

Attach:ManuscritosMatematicaDiscreta/ordensIsomorfasRS.png Δ | **Figura:** Ordens parciais isomorfas.

Funções injetoras possuem outras particularidades interessantes.

> ***Teorema*** Se F e H são funções injetoras, então $H \circ F$ é injetora e $(H \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ H^{-1}$.

Demonstração: Sejam (a_1, c) e (a_2, c) dois pares ordenados em $H \circ F$. Logo, existem b_1 e b_2 tais que $(a_1, b_1) \in F$ e $(b_1, c) \in H$, e $(a_2, b_2) \in F$ e $(b_2, c) \in H$, respectivamente. Sendo H e F funções injetoras, $b_1 = b_2$ e $a_1 = a_2$, respectivamente. Portanto, $H \circ F$ é injetora.

Para a igualdade envolvendo a inversa de $H \circ F$, observamos a seguinte sequência de equivalências:

$$(c, a) \in (H \circ F)^{-1} \iff (a, c) \in H \circ F \iff \exists b, (a, b) \in F \wedge (b, c) \in H \iff$$

$$\exists b, (b, a) \in F^{-1} \wedge (c, b) \in H^{-1} \iff (c, a) \in F^{-1} \circ H^{-1}$$

□

A importância da **classificação** está intimamente ligada ao papel desempenhado pelas inversas de funções. Claramente, nem sempre a inversa de uma função é também uma função. Por isso, fazemos a definição a seguir.

Definição Uma função F é inversível se F^{-1} é uma função.

Uma condição necessária e suficiente para que uma função seja inversível é dada a seguir.

Teorema Uma função F é inversível se e somente se F é injetora.

Demonstração: Seja F uma função inversível, o que significa que F^{-1} é uma função. Para mostrar que F é injetora, considere dois elementos a_1 e a_2 em Dom_F, com $F(a_1) = F(a_2)$. Como $(a_1, F(a_1)) \in F$ e $(a_2, F(a_2)) \in F$, temos que $(F(a_1), a_1) \in F^{-1}$ e $(F(a_2) = F(a_1), a_2) \in F^{-1}$. Então, como F^{-1} é uma função, $a_1 = a_2$.

Inversamente, supondo que F seja injetora, desejamos mostrar que F^{-1} é uma função. Considere $b \in Dom_{F^{-1}}$, $(b, a_1) \in F^{-1}$ e $(b, a_2) \in F^{-1}$. Pela , temos que $(a_1, b) \in F$ e $(a_2, b) \in F$. Portanto, como F é injetora, $a_1 = a_2$. □

Observe que uma consequência desse teorema é que se $F: A \to B$, para dois conjuntos A e B, então F é inversível, com $F^{-1}: B \to A$, se e somente se F é bijetora. Essa observação decorre da necessidade de F ser sobrejetora para que $Dom_{F^{-1}} = B$. Outra consequência envolve a composição de inversas.

Corolário Se F e G são funções inversíveis, então $G \circ F$ é inversível.

Pagina modificada em 24/05/2011 10:23