From ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização

Manuscritos: Ordens Parciais

As **relações de equivalência** definem subconjuntos de elementos equivalentes de um conjunto. Uma outra forma muito útil de relacionar elementos de um conjunto é estabelecer uma ordem entre eles.

> ***Definição*** *(Ordem parcial) A relação binária R em A é uma relação de ordem parcial se R é* ***reflexiva****,* ***anti-simétrica*** *e* ***transitiva****. Além disso, se $R \subseteq A \times A$ é uma relação de ordem parcial, então o par (A, R) é chamado de Conjunto Parcialmente Ordenado ou poset.*

Intuitivamente, em uma relação de ordem parcial, se dois objetos distintos estão relacionados, então eles são *comparáveis entre si*, sendo que um deles é *maior* ou *menor* que o outro com respeito a algum critério ou propriedade. Por exemplo, quando dizemos que o par $(a, b) \in R$, sendo R uma ordem parcial, visto que $(b, a) \notin R$, podemos considerar que a é menor que b ou que b é superior a a. De fato, o termo *ordem* quer dizer que os objetos no conjunto estão ordenados de acordo com esse critério ou propriedade. Entretanto, é possível que, em uma relação de ordem parcial, dois objetos do conjunto não estejam relacionados. Nesse caso, nós não podemos comparar esses dois objetos e dizer que um é menor ou maior que o outro. Essa é a razão pela qual o termo ordem *parcial* é usado.

Considere como exemplo a seguinte relação R sobre os inteiros: $(a, b) \in R$ se o resto da divisão de b por a é zero. Podemos observar que como para todo inteiro a, a divide a, então R é **reflexiva**. R é também **transitiva**, pois se a divide b e b divide c, então a também divide c. Finalmente, R é **anti-simétrica**, pois se $a \neq b$ e a divide b, então $a < b$ e certamente b não divide a.

Há ainda uma notação alternativa para especificar uma relação de ordem parcial: para cada par ordenado (a, b) em R, dizemos que $a \preccurlyeq b$ com o sentido de $(a, b) \in R$, onde $\preccurlyeq$ é um símbolo genérico que traduz a ordenação dos elementos do conjunto dada pela relação. De fato, um conjunto parcialmente ordenado é frequentemente denotado por $(A, \preccurlyeq)$. Para elementos a e b tais que $a \preccurlyeq b$, dizemos que a é menor ou igual a b. A notação $a\not \preccurlyeq b$ é usada para indicar que $(a, b) \notin \preccurlyeq$. Se $a\not \preccurlyeq b$ e $b\not \preccurlyeq a$, então os elementos a e b são *incomparáveis* ou *independentes* em $\preccurlyeq$.

> ***Lema*** *Se A é um conjunto e $\preccurlyeq$ uma ordem parcial em A, então a inversa de $\preccurlyeq$, denotada por $\succcurlyeq$, é uma ordem parcial em A.*

Demonstração: Precisamos mostrar que $\succcurlyeq$ é reflexiva, anti-simétrica e transitiva. No primeiro caso, observamos que $a \preccurlyeq a$, para todo $a \in A$, pois $\preccurlyeq$ é reflexiva. Portanto, pela definição de inversa, $a \succcurlyeq a$. Em seguida, considere dois elementos a e a' em A tais que $a \succcurlyeq a'$ e $a' \succcurlyeq a$. Novamente pela definição de inversa, concluimos que $a \preccurlyeq a'$ e $a' \preccurlyeq a$ e, como $\preccurlyeq$ é anti-simétrica, $a = a'$. Logo, $\succcurlyeq$ é anti-simétrica. Finalmente, para mostrar a transitividade, tomemos três elementos a, a' e a'' de A tais que $a \geqslant a'$ e $a' \geqslant a''$. Usamos mais uma vez a definição de inversa para argumentar que $a' \leqslant a$ e $a'' \leqslant a'$. Por transitividade, temos $a'' \leqslant a$ e, portanto, $a \geqslant a''$. $\square$

Lema *Se A é um conjunto, $A' \subseteq A$ e $\leqslant$ uma ordem parcial em A, então $\leqslant' = \leqslant[A']$ é uma ordem parcial em A.*

Demonstração: Primeiro mostramos que $\leqslant'$ é **reflexiva**. Para isso, suponha $a \in A'$. Como $A' \subseteq A$, segue que $a \in A$ e, visto que $\leqslant$ é reflexiva, $a \leqslant a$. Finalmente, $(a, a) \in \leqslant$ implica que $(a, a) \in \leqslant'$ porque $a \in A'$. Para mostar que $\leqslant'$ é também **anti-simétrica**, considere ainda um elemento $a' \in A'$, $a \neq a'$, e suponha que $a \leqslant' a'$. Uma decorrência do fato $\leqslant' \subseteq \leqslant$ é que $a \leqslant a'$. Como $\leqslant$ é anti-simétrica, concluimos que $a' \backslash not \leqslant a$. Assim sendo, visto que $a \in A'$ e $a' \in A'$, temos $a' \backslash not \leqslant' a$. Por fim, supomos que a' é um elemento qualquer de A' (não necessariamente diferente de a), tomamos mais um elemento $a'' \in A'$ e supomos $a \leqslant' a'$ e $a' \leqslant' a''$ para mostrar que $\leqslant'$ é **transitiva**. Sabendo que $a \leqslant a'$ e $a' \leqslant a''$, e que $\leqslant$ é transitiva, concluimos que $a \leqslant' a''$. $\square$

As relações de ordem parcial admitem também representações tabular e gráfica, sendo esta última mais simples do que aquela apresentada antes. Vamos, em uma seqüência de passos, construir o que chamamos de *Diagrama de Hasse*, que representa graficamente uma relação de ordem parcial. A título de ilustração, considere a relação de ordem parcial $\leqslant \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada pelo **fecho transitivo** de

$\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (b = a) \vee (b = 2a) \vee (b = 2a + 1)\}$

É deixada ao leitor a demonstração que $\leqslant$ é uma ordem parcial. Na **figura**, podemos ver o processo de construção do Diagrama de Hasse a partir da representação gráfica convencional dessa relação.

Em um primeiro passo, sabendo tratar-se de uma relação reflexiva, podemos omitir as setas que indicam a reflexividade, ou seja, as setas de laços, que são aquelas que tem um único ponto como origem e destino. Após essa remoção, no nosso exemplo, obtemos a **segunda representação gráfica**. Em um segundo passo, como sabemos também que a relação de ordem parcial é transitiva, podemos omitir as setas unindo pontos que já estão ligados por uma seqüência sucessiva de setas. Após esse passo, já obtemos uma representação gráfica bem mais simples, conforme podemos verificar no **nosso exemplo**. Finalmente, se arrumamos os pontos de forma que todos as setas estejam apontando para cima, podemos omitir o sentido das setas e manter apenas as linhas ligando os pontos. Nesse último passo, obtemos uma **representação gráfica extremamente simples**.

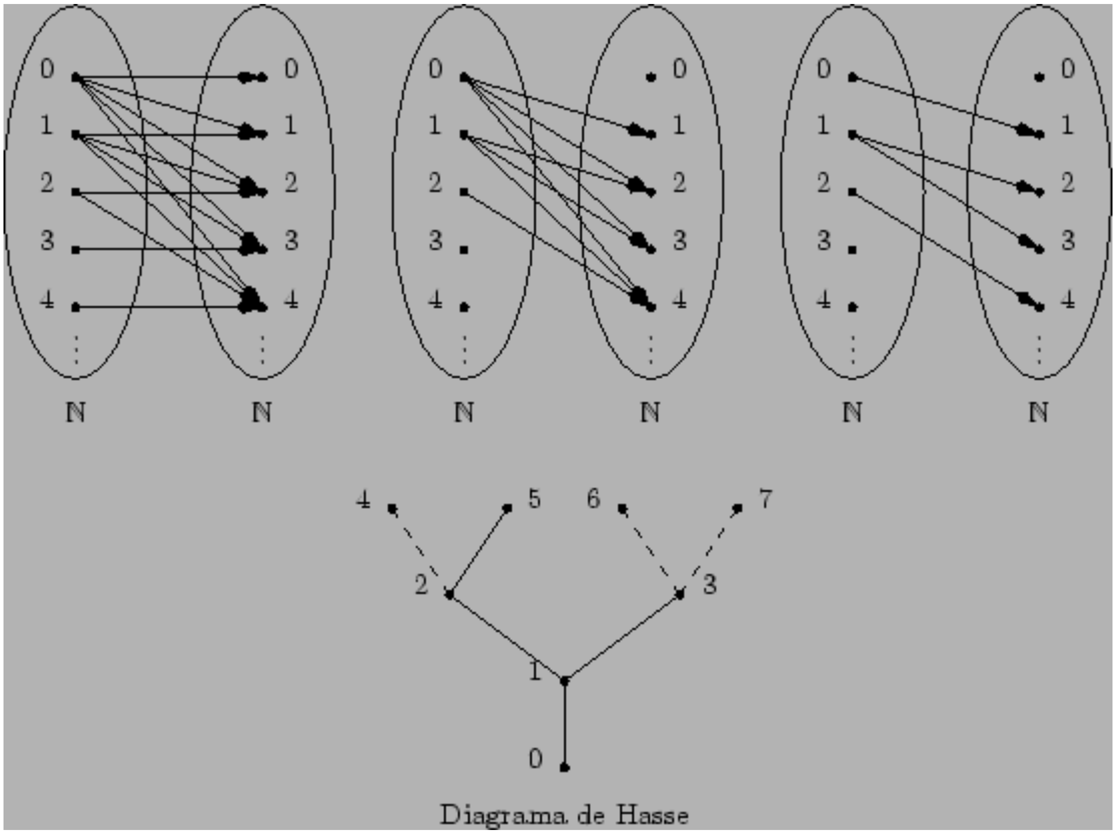

Figura Obtendo o Diagrama de Hasse da **relação** $\preccurlyeq\ \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Apenas alguns pares dessa relação são apresentados na figura. As linhas tracejadas no Diagrama de Hasse indicam pares que não estão mostrados na representação gráfica convencional.

Em um conjunto parcialmente ordenado, classificamos os subconjuntos de elementos em que todos estão relacionados ou não estão relacionados pela ordem parcial. Mais precisamente, temos a seguinte definição.

Definição *(Cadeia e anti-cadeia) Seja* $(A, \preccurlyeq)$ *um conjunto parcialmente ordenado e* $C \subseteq A$. *Então,* C *é chamada de uma*

cadeia

se todos os seus elementos estão relacionados, isto é

$$(a \in C) \wedge (a' \in C) \Rightarrow (a \preccurlyeq a') \vee (a' \preccurlyeq a),$$

ou de uma

anti-cadeia

se todos os seus elementos são independentes,

$$(a \in C) \wedge (a' \in C) \wedge (a \neq a') \Rightarrow (a \backslash not \preccurlyeq a') \wedge (a' \backslash not \preccurlyeq a).$$

Nesses casos, o número de elementos em C *é chamado de tamanho da cadeia ou da anti-cadeia, respectivamente.*

Definição *(Ordem total) Um conjunto parcialmente ordenado* $(A, \preccurlyeq)$ *é chamado de* *conjunto totalmente ordenado se A é uma cadeia. Nesse caso, a relação $\preccurlyeq$ é uma relação de ordem total.*

Para ilustrar as definições acima, podemos observar que, no **exemplo**, o conjunto $\{1, 2, 5\}$ constitui uma cadeia, enquanto o conjunto $\{3, 4, 5\}$ é uma anti-cadeia. Observe que podem existir subconjuntos de A que não são nem cadeias nem anti-cadeias (isso acontece no **exemplo** ?). Observe ainda que em qualquer cadeia $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, em virtude da anti-simetria e da transitividade, existe um elemento, digamos a_1, que é menor do que qualquer outro elemento na cadeia; existe um elemento, digamos a_2, que é menor do que qualquer outro elemento na cadeia com exceção de a_1; existe um elemento, digamos a_3, que é menor do que qualquer outro elemento da cadeia com exceção de a_1 e a_2, e assim sucessivamente. Usamos a notação $a_1 \preccurlyeq a_2 \preccurlyeq a_3 \cdots \preccurlyeq a_k$, como uma abreviação da lista de pares ordenados $a_1 \preccurlyeq a_2, a_1 \preccurlyeq a_3, \ldots, a_1 \preccurlyeq a_k, a_2 \preccurlyeq a_3, \cdots, a_{k-1} \preccurlyeq a_k$.

Dado um conjunto arbitrário $X \neq \emptyset$, pode-se definir um conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ e que é definido sobre o conjunto $\mathcal{P}(X)$ das partes de X, relacionando-se pares $x \subseteq X$ e $x' \subseteq X$ de subconjuntos de X tais que eles próprios se relacionam na forma $x \subseteq x'$. É simples verificar que esses pares formam uma relação de ordem parcial, podendo-se formar uma intuição com **Diagrama de Hasse do exemplo**. A reflexividade decorre diretamente do fato de todo conjunto ser subconjunto de si mesmo. Além disso, dois subconjuntos diferentes x e x' de X sempre satisfazem a $x - x' \neq \emptyset$ ou $x' - x \neq \emptyset$, o que leva à anti-simetria. Por fim, a transitividade pode ser verificada observando que se $x \subseteq x'$ e $x' \subseteq x''$, então todo elemento de x é também elemento de x' e, portanto, elemento de x''.

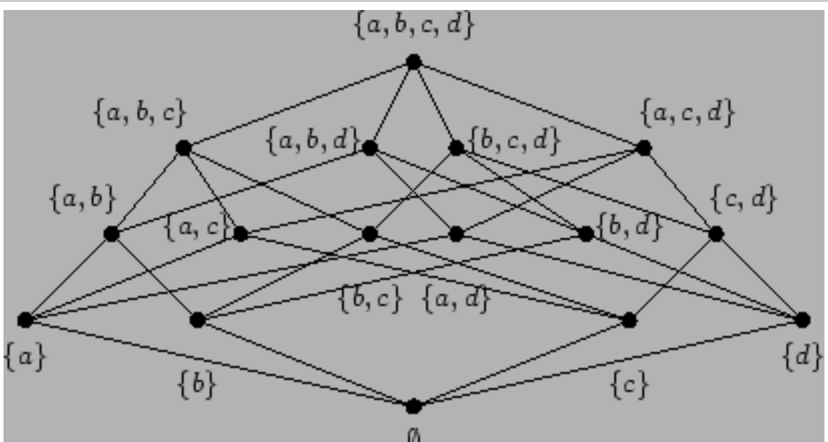

Figura Exemplo conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, no qual $X = a, b, c, d$.

***Definição** (Mínimos, minimais, máximos e maximais) Seja $(A, \preccurlyeq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Então, um elemento $a \in A$ é chamado de*

***menor** (ou **mínimo**)*

: *se $a' \in A \Rightarrow a \preccurlyeq a'$, ou de*

***maior** (ou **máximo**)*

: *se $a' \in A \Rightarrow a' \preccurlyeq a$, ou de*

minimal

: *se $a' \preccurlyeq a \Rightarrow a' = a$, ou de*

maximal

> *se* $a \preccurlyeq a' \Rightarrow a = a'$.

No conjunto parcialmente ordenado ($(X), \subseteq$) da **figura**, o $\emptyset$ é menor (ou mínimo), enquanto o X é maior (ou máximo). Observe que um elemento de um conjunto parcialmente ordenado pode não se encaixar em nenhuma das condições da definição acima. Observe ainda que o conjunto A pode não possuir maior ou menor. Voltando ao **exemplo**, para o conjunto parcialmente ordenado formado por $(X) - \{\emptyset, X\}$ e a sub-ordem induzida por $(X) - \{\emptyset, X\}$ em $\subseteq$, temos:

- a, b, c e d são minimais
- a, b, c é maximal
- não há menor, nem máximo

> ***Teorema*** *Se* $(A, \preccurlyeq)$ *é um conjunto parcialmente ordenado,* $A' \subseteq A$ *e* $\preccurlyeq' = \preccurlyeq[A']$ *a relação induzida por* A' *em* $\preccurlyeq$ *. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*
> 1. $(A', \preccurlyeq')$ *não possui dois mínimos.*
> 2. *Se* $a \in A'$ *é mínimo de* $(A', \preccurlyeq')$*, então* a *também é minimal.*
> 3. *Se* A' *é uma cadeia, então todo elemento minimal de* $(A', \preccurlyeq')$ *é também mínimo.*

Demonstração:

1. Por contradição, suponha que existam dois mínimos a e a' de $(A', \preccurlyeq')$, com $a \neq a'$. Como a é mínimo e $a' \in A'$, temos $a \preccurlyeq a'$. Analogamente, $a' \preccurlyeq a$ pois a' é mínimo e $a \in A'$. Assim, chegamos a uma contradição com o fato de $\preccurlyeq$ ser anti-simétrica.
2. Suponha $a \in A'$, mínimo de $(A', \preccurlyeq')$, e $a' \in A'$, $a \neq a'$. Como a é mínimo, $a \preccurlyeq a\backslash lq$. Portanto, pela anti-simetria de $\preccurlyeq$, temos $a'\backslash not \preccurlyeq a'$. Logo, a é minimal.
3. Considere A' uma cadeia, a um elemento minimal de A' e a' um elemento qualquer de A' com $a \neq a'$. Como A' é uma cadeia, $a \preccurlyeq a'$ ou $a' \preccurlyeq a$. Pela definição de minimal, o segundo caso não pode ocorrer. Portanto, a é mínimo. $\square$

> ***Definição 21*** *(Limites inferior e superior, ínfimo e supremo) Seja* $(A, \preccurlyeq)$ *um conjunto parcialmente ordenado e* $A' \subseteq A$*. Então, um elemento* $a \in A$ *é chamado de*
>
> ***limite inferior de*** A'
>
> *se* $(a' \in A') \Rightarrow (a \preccurlyeq a')$*, ou de*
>
> ***limite superior de*** A'
>
> *se* $(a' \in A') \Rightarrow (a' \preccurlyeq a)$*, ou de*
>
> ***ínfimo de*** A'
>
> *se* a *é o máximo da sub-relação induzida pelo conjunto dos limites inferiores de* A'*, ou de*
>
> ***supremo de*** A'
>
> *se* a *é o mínimo da sub-relação induzida pelo conjunto dos limites superiores de* A'*.*

No conjunto parcialmente ordenado ($(X), \subseteq$) cujo Diagrama de Hasse está na **figura**, o elemento b, c é um limite superior de b, c, bem como o são a, b, c, b, c, d e a, b, c, d. Por outro lado, os elementos b e c são limites inferiores de b, c, d, a, b, c, cujo ínfimo é b, c. É deixado ao leitor mostrar que se $A' \subseteq A$, então $\bigcup A'$ é o supremo de A' em $(A, \subseteq)$ e, se

$A' \neq \emptyset$, então $\bigcap A'$ é o ínfimo de A' em $(A, \subseteq)$.
