From ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização

Manuscritos: Relações de Equivalência

Uma relação que particiona os elementos de A de tal forma que, em cada parte, todos os elementos se relacionam entre si, e elementos de partes diferentes não se relacionam, recebe um nome especial.

Material complementar

- **Ilustração Animada?**
- **Exercícios**
- **Outros Exemplos?**
- **Notas de Aula?**
- **Bibliografia?**

Definição (Relação de equivalência) *A* ***relação binária?*** *R em A é uma relação de equivalência se R é* ***reflexiva?***, ***simétrica?*** *e* ***transitiva?***.

Pelas propriedades já observadas para H **e** $\overline{H}$**?**, verificamos que, entre essas duas relações, somente H é uma relação de equivalência. De uma forma geral, se R é uma relação de equivalência e $(a, a') \in R$, então dizemos que a é *equivalente a a' módulo R*. Reservamos uma notação especial aos elementos equivalentes a um dado elemento de A quando R é uma relação de equivalência.

Definição (Classe de equivalência) *Se R é uma* ***relação de equivalência*** *em um conjunto A e $a \in A$, então a classe de equivalência de a módulo R é o conjunto*

$$[a]_R = \{a' \in A \mid (a, a') \in R\}$$

O conjunto de todas as classes de equivalência de A módulo R é dado por

$$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$$

No exemplo da **relação** H**?**, vemos que a classe de equivalência de uma disciplina $a \in A$ é o conjunto de todas as disciplinas que são oferecidas no mesmo horário que a. Uma relação de equivalência estabelece que as classes de equivalência de dois elementos. se não forem iguais, devem ser disjuntas.

Lema *Sejam X um conjunto, x e x' dois elementos de X e E uma* ***relação de equivalência*** *em X. As duas afirmações a seguir são verdadeiras:*

1. *x é equivalente a x' módulo E se e somente se as suas classes de equivalência são* ***iguais?*** *(ou seja, $(x, x') \in E \Leftrightarrow [x]_E = [x']_E$).*
2. *x não é equivalente a x' módulo E se e somente se as suas classes de equivalência são* ***disjuntas?*** *(ou seja, $(x, x') \notin E \Leftrightarrow [x]_E \cap [x']_E = \emptyset$).*

Demonstração: A demonstração de cada item é feita separadamente abaixo:

1. Suponha inicialmente $(x, x') \in E$. Devemos mostrar que $[x]_E = [x']_E$. Tomemos inicialmente um elemento x'' em $[x]_E$, **o que corresponde a dizer que** $(x, x'') \in E$. Como E é **simétrica?**, $(x'', x) \in E$. Pela **transitividade?** de E, temos $(x'', x') \in E$. Usando novamente a **simetria?**, obtemos $(x', x'') \in E$ e, por conseguinte, $[x]_E \subseteq [x']_E$. Tomemos agora $x'' \in [x']_E$. Pelo fato de E ser **simétrica?** e **transitiva?**, sabemos que $(x', x'') \in E$, $(x'', x') \in E$, $(x', x) \in E$ e $(x'', x) \in E$. Portanto, $[x']_E \subseteq [x]_E$.
2. Suponha, por contradição, que $(x, x') \notin E$, mas que existe $x'' \in [x]_E \cap [x']_E$. Logo, $(x, x'') \in E$ e $(x', x'') \in E$. Por **simetria?**, $(x'', x') \in E$ e, por **transitividade?**, $(x, x') \in E$, contrariando a hipótese inicial. Por outro lado, suponha que $[x]_E \cap [x']_E = \emptyset$. Novamente por contradição, suponha que $(x, x') \in E$. Como $(x, x) \in E$ pelo fato de E ser **reflexiva?**, temos $x \in [x]_E \cap [x']_E$, contrariando a hipótese inicial. □

Attach:img285.png Δ | **[Figura** Exemplo em que R é uma relação de equivalência com duas classes de equivalência. Observe que $A/R = \{\{a, b\}, \{c, d, e\}\}$**]**

Este último fato implica que, se R é uma relação de equivalência, então as classes de equivalência de R definem um conjunto de subconjuntos dois a dois disjuntos de A cuja união é o próprio A, conforme ilustrado na **figura**. Posto de outra maneira, as classes de equivalência formam uma **partição de R?**.

Lema *Se R é uma* ***relação de equivalência*** *em A, então A/R (o conjunto das classes de equivalência de R) é uma* ***partição?*** *do conjunto A.*

Demonstração: A demonstração consite em supor que R seja uma relação de equivalência em A, e provar que A/R define uma partição de A. Para provar que $A = \bigcup A/R$?, observe que para todo $a \in A$, temos que $a \in [a]_R$ em decorrência de $(a, a) \in R$ (**R é reflexiva**). Para provar que $[a]_R \cap [a']_R = \emptyset$ para quaisquer dois elementos distintos [a]_R e [a']_R de A/R, observamos que o **Lema** implica que a e a' não são equivalentes módulo R pois, caso contrário, [a]_R e [a']_R não seriam diferentes. Logo, também pelo **Lema**, $[a]_R \cap [a']_R = \emptyset$. □

De maneira inversa ao **lema anterior**, uma **partição S de um conjunto?** define uma **relação de equivalência** cujas classes de equivalência são as partes de S.

Definição *(Relação das partes) Seja $S \subseteq$ 𝒫(X) uma partição de um conjunto X. A relação das partes de S é definida por:*

$$E_S = \{(x, x') \in X \times X \mid \exists T \in S, x \in T, x' \in T\}.$$

Lema *Se S é uma* ***partição?*** *de um conjunto A e $R = E_S$, então R é uma* ***relação de equivalência***.

Demonstração: Considere $a \in A$. Como a está na mesma parte de S que a, o par (a, a)

pertence a E_S, logo R é **reflexiva**?. Além disso, se a e b, $a \neq b$, estão na mesma parte, temos que (a, b) e (b, a) são pares de E_S, logo R é **simétrica**?. Por outro lado, se a e b estão em partes diferentes, nem (a, b), nem (b, a) pertence a E_S. Finalmente, tomemos dois pares (a, b) e (b, c) em E_S. Como a está na mesma parte que b e b está na mesma parte que c, então a está na mesma parte que c. Logo, $(a, c) \in E_S$ e R também é **transitiva**?. □

Para exemplificar a idéia acima, suponha que R seja a seguinte relação sobre os números inteiros: $(a, b) \in R$ se a e b têm resto igual quando divididos por n. Nesse caso, dizemos que $a = b(\backslash modn)$. Deixamos ao leitor o exercício de provar que R é de equivalência. Observamos porém que R define uma partição do conjunto dos números inteiros em n partes: a parte dos números cujo resto da divisão por n é 0, a parte dos números cujo resto da divisão por n é 1, a parte dos números cujo resto da divisão por n é 2, e assim sucessivamente.
