From ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização

Manuscritos: Relações Binárias em um Conjunto

Veremos agora algumas propriedades importantes das relações binárias em um único conjunto. Para as definições a seguir, considere $R \subseteq A \times A$ como sendo uma relação binária em um conjunto arbitrário A. Observe que o estudo dessas relações vale por sua generalidade, visto que toda relação pode ser escrita na forma de uma relação binária em um único conjunto (basta ver que $S \subseteq A \times B$, $A \neq B$, também é uma relação binária da forma $S \subseteq (A \cup B) \times (A \cup B)$). Além disso, considere, a título de ilustração:

Exemplos de relações binárias

D
: *conjunto de disciplinas sendo oferecidas em um dado período*

H
: *relação binária em D, formada pelos pares ordenados (a, a') tais que a e a' são disciplinas e ocorrem no mesmo horário*

$\overline{H}$
: *relação binária em D contendo exatamente os pares ordenados de disciplinas que ocorrem em horários distintos.*

***Definição** (Relação reflexiva) A **relação binária** R em A é reflexiva se $a \in A \Rightarrow (a, a) \in R$.*

Como toda disciplina d certamente ocorre no mesmo horário da disciplina d, o par (d, d), para todo $d \in D$, pertence a H. Portanto, H é reflexiva, e $\overline{H}$, não.

***Definição** (Relação simétrica) A **relação binária** R em A é simétrica se $(a, a') \in R \Rightarrow (a', a) \in R$.*

A definição acima nos permite utilizar relações simétricas para identificar conjuntos de pares não-ordenados de elementos. Em outras palavras, o fato de $(a', a) \in R$ sempre que $(a, a') \in R$, faz com que os elementos de R fiquem completamente identificados por pares não-ordenados. Usamos, então, a notação aa' para indicar o par não-ordenado formado pelos elementos a e a'. Com essa notação (que só pode ser usada para relações simétricas), $aa' \in R$ significa $(a, a') \in R \wedge (a', a) \in R$. Uma aplicação clássica de pares não-ordenados de elementos é a seguinte estrutura:

Definição (Grafo) Um *grafo*, denotado por $G = (V, E)$, é um par ordenado de conjuntos. A primeira coordenada desse par, V, é o conjunto dos *vértices* de G, enquanto a segunda coordenada, $E \subseteq V \times V$, é uma relação simétrica, cujos elementos são pares não-ordenados chamados de *arestas*.

Uma noção semelhante é usada para classificar relações que não apresentam simetria entre pares de elementos distintos.

Definição (Relação anti-simétrica) *A **relação binária** R em A é anti-simétrica se* $(a, a') \in R \wedge (a', a) \in R \Rightarrow a = a'$.

Ambas as relações H e $\overline{H}$ são simétricas, porém nenhuma delas é anti-simétrica. Observe que uma relação pode ser, simultaneamente, simétrica e anti-simétrica, ou pode não ter nenhuma dessas propriedades. Por exemplo, considere o conjunto x, y, w e as relações $\{(x, x), (y, y)\}$ e $\{(x, y), (x, w), (w, x)\}$. Temos que a primeira relação é simétrica e anti-simétrica, porém a segunda S não é simétrica nem anti-simétrica.

Definição (Relação transitiva) *A **relação binária** R em A é transitiva se* $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$.

Observamos que H é transitiva, mas $\overline{H}$, não. Uma outra relação que *não* é transitiva é o do jogo pedra, papel e tesoura (por quê?). A *extensão transitiva de R* é uma relação que contém R, acrescida dos pares (a, c), sempre que $(a, b), (b, c) \in R$.

Definição (Fecho transitivo) *Sejam R_1 a extensão transitiva de R, R_2 a extensão transitiva de R_1 e assim sucessivamente. Define-se o fecho transitivo R^* de R como sendo a união de $R_1, R_2, \ldots$, ou seja, a união de todas as extensões transitivas sucessivas obtidas a partir de R.*

Por essa definição, temos que R^* é uma relação transitiva. Em geral, uma relação binária pode ter qualquer uma ou várias das propriedades definidas acima. A seguir, veremos duas classes importantes de relações binárias definidas por diferentes combinações dessas propriedades.