From ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização

Manuscritos: Relações Binárias

O **exemplo acerca do relacionamento entre professores e turmas** nos incita à seguinte definição:

Material complementar

- **Ilustração Animada**?
- **Exercícios**
- **Outros Exemplos**?
- **Notas de Aula**?
- **Bibliografia**?

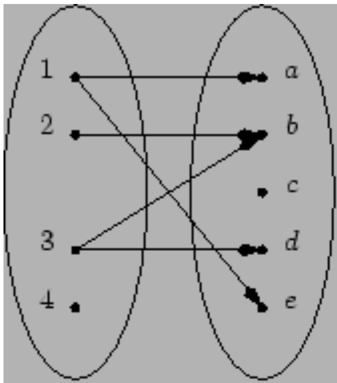
Definição *(Relação binária) Uma relação binária R entre dois conjuntos A e B (ou sobre A e B) é um subconjunto de $A \times B$ ($R \subseteq A \times B$). Em geral, dizemos que um conjunto R é uma relação binária quando existem dois conjuntos A e B tais que R é uma relação binária entre A e B.*

Observe que todos os elementos de uma relação binária R são pares ordenados. Em termos matemáticos, se R é uma relação binária entre dois conjuntos A e B, então, para todo $z \in R$, existem $x \in A$ e $y \in B$ tais que $z = (x, y)$. A título de ilustração, o conjunto

$$R = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{N}, m \text{ divide } n\}$$

é uma relação binária entre números naturais.

Uma relação binária $R \subseteq A \times B$ pode ser representada de forma *gráfica* ou *tabular*. No primeiro caso, na forma gráfica, representamos cada elemento de A e cada elemento de B como um ponto no plano. Em seguida, colocamos uma seta com origem no ponto do elemento de A e destino no ponto do elemento de B para todo par ordenado de R. No segundo caso, na forma tabular, definimos uma linha para cada elemento de A e uma coluna para cada elemento de B. Assinalamos um X na posição da tabela cujas coordenadas formam um par ordenado de R. Um exemplo dessas representações aparece na **Figura**.



	a	b	c	d	e
1	X				X
2		X			
3		X		X	
4					

Figura Representações de uma relação binária entre os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c, d, e\}$

Exemplo *(Relação binária) Como um exemplo concreto, suponha que os conjuntos A e B da* ***figura*** *sejam, respectivamente, um conjunto de estudantes e um conjunto de disciplinas do Curso de Ciência da Computação. Suponha ainda que R seja uma relação binária que associa cada estudante de A com as disciplinas de B que lhe interessam. Seja*

$S = \{(1, a), (2, b), (3, c), (3, d), (4, e)\}$

uma outra relação binária sobre A e B que indica a disciplina em que cada aluno está inscrito. O leitor é convidado a verificar que, em conseqüência do fato de uma relação ser um conjunto, as operações sobre conjuntos que já vimos podem ser aplicadas a elas, gerando novas relações. Por exemplo, temos que $R \cup S$ *conterá todo os pares* (x, y) *tais que* x *está inscrito ou está interessado na disciplina* y*. A relação* $R \cap S$ *conterá todos os pares* (x, y) *tais que* x *está interessado e está inscrito na disciplina* y*. A relação* $R - S$ *conterá todos os pares* (x, y) *tais que o aluno* x *está interessado, mas não está inscrito na disciplina* y*. Finalmente, a relação* $img196 . png$ *conterá todos os pares* (x, y) *tais que* x *está interessado na disciplina* y*, mas não está inscrito nela, e tais que* x *não está interessado na disciplina* y*, mas nela está inscrito.*

Em toda **relação binária**, é conveniente agrupar os elementos que participam de pares ordenados dessa relação.

Definição *(Conjuntos envolvidos em uma relação) Se A e B são conjuntos e* $R \subseteq A \times B$ *é uma relação binária, então definimos os seguintes conjuntos:*

Domínio de R

: *conjunto formado por todos os elementos* $x \in A$ *tais que existe pelo menos um elemento* $y \in B$ *e um par ordenado* $(x, y) \in R$*:* $Dom_R = \{x \in A \mid \exists y \in B, (x, y) \in R\}$ *(veja que, pelo* ***Axioma dos Subconjuntos****,* Dom_R *é um conjunto).*

Contra-domínio de R

: *conjunto formado por todos os elementos* $y \in B$ *tais que existe pelo menos um elemento* $x \in A$ *e um par ordenado* $(x, y) \in R$*:*

*$ContraDom_R = \{y \in B \mid \exists x \in A, (x, y) \in R\}$ (novamente, o **Axioma dos Subconjuntos** é invocado para afirmar que $ContraDom_R$ é um conjunto).*

***Campo de** R*

*conjunto formado pelo domínio e do contra-domínio de R: $Campo_R = Dom_R \cup ContraDom_R$ (usamos os axiomas associados à **operação de união** para mostrar a existência de $Campo_R$).*

As definições acima atribuem nomes aos conjuntos dos elementos que estão envolvidos em uma relação binária. Por exemplo, se R é a **relação indicada na figura**, então $Dom_R = \{1, 2, 3\}$ e $ContraDom_R = \{a, b, d, e\}$. Podemos também estabelecer algumas propriedades desses conjuntos.

***Lema** Se R é uma relação binária, então $Dom_R \subseteq \bigcup(\bigcup R)$ e $ContraDom_R \subseteq \bigcup(\bigcup R)$.*

Demonstração: Seja $a \in Dom_R$. Pela definição, existe b tal que $(a, b) \in R$, o que corresponde a dizer que $\{\{a\}, \{a, b\}\} \in R$. Portanto, $\{a\} \in \bigcup R$, o que significa que $a \in \bigcup(\bigcup R)$.

Para demonstrar a continência no contra-domínio, começamos supondo $b \in ContraDom_R$. De forma análoga ao caso anterior, verificamos que existe a tal que $(a, b) \in R$, o que corresponde a dizer que $\{\{a\}, \{a, b\}\} \in R$. Como anteriormente, concluimos que $b \in \bigcup(\bigcup R)$. $\square$

Muitas vezes, também é útil identificar o subconjunto de elementos associados aos elementos de um dado conjunto em uma relação.

***Definição** (Conjuntos definidos em uma relação binária por um outro conjunto) Se A e B são conjuntos, $R \subseteq A \times B$ é uma relação binária, e X e Y são dois conjuntos quaisquer (não necessariamente os conjuntos que definem a relação R), então definimos os seguintes conjuntos:*

***Sub-relação induzida por** X **e** Y **em** R*

relação formada por todos os pares ordenados $(x, y) \in R$ tais que $x \in X$ e $y \in Y$, $R[X, Y] = \{(x, y) \in R \mid x \in X, y \in Y\}$.

Quando $X = Y$, escrevemos simplesmente $R[X]$ (ou $R[Y]$) para indicar $R[X, Y]$.

***Imagem de** X **sobre** R*

conjunto formado por todos os elementos $y \in B$ tais que existe um elemento $x \in X$ e $(x, y) \in R$, $Imag_R(X) = \{y \in B \mid \exists x \in X, (x, y) \in R\}$.

***Imagem Inversa de** Y **sobre** R*

conjunto formado por todos os elementos $x \in A$ tais que existe um elemento $y \in Y$ e $(x, y) \in R$, $ImagInv_R(X) = \{x \in A \mid \exists y \in Y, (x, y) \in R\}$.

A verificação da existência de cada um desses conjuntos é deixada ao leitor.

A diferença entre os conceitos dos **conjuntos envolvidos em uma relação binária** dos

conjuntos definidos em uma relação binária por um outro conjunto pode ser melhor compreendida com um exemplo. Usamos novamente a **relação S entre alunos e disciplinas**. Supondo que todo aluno deve estar inscrito em alguma disciplina, e que toda disciplina possui pelo menos um aluno, então Dom_S é o conjunto A de alunos e $ContraDom_S$, o conjunto B de disciplinas. Por outro lado, se tomarmos X como sendo o conjunto dos alunos de sexo masculino, a imagem de X sobre S é o conjunto de disciplinas que possuem pelo menos um aluno de sexo masculino inscrito. Pode-se observar que este é o contra-domínio da sub-relação induzida pelos alunos de sexo masculino e pelo conjunto das disciplinas em S. O leitor poderá verificar que tal propriedade é comum a todas as relações.

Mesmo com essas diferenças, podemos estabelecer algumas propriedades que ligam esses conjuntos.

Lema *Se A e B são conjuntos, $R \subseteq A \times B$ é uma relação binária e X é um conjunto, então $Imag_R(X) = ContraDom_{R[X,B]}$.*

Apesar de as noções de imagem e contra-domínio serem distintas, há casos em que elas coincidem.

Lema *Se A e B são conjuntos e $R \subseteq A \times B$, então $Imag_R(A) = ContraDom_R$.*

Demonstração: Seja $b \in Imag_R(A)$. Como existe $a \in A$ tal que $(a, b) \in R$, então $b \in ContraDom_R$. Portanto, $Imag_R(A) \subseteq ContraDom_R$. Por outro lado, seja $b \in ContraDom_R$. Neste caso, existe a tal que $(a, b) \in R$, o que significa que $a \in A$ e $b \in B$. Como $a \in A$ e $(a, b) \in R$, então $b \in Imag_R(A)$, provando $ContraDom_R \subseteq Imag_R(A)$. $\square$

A imagem da união e da intersção de dois conjuntos se correspondem de maneira diferente com a união e a interseção das imagens, como visto a seguir.

Lema *Se R é uma relação binária e X e Y são conjuntos, então $Imag_R(X \cup Y) = Imag_R(X) \cup Imag_R(Y)$.*

Demonstração: A primeira etapa é mostrar que $Imag_R(X \cup Y) \subseteq Imag_R(X) \cup Imag_R(Y)$. Seja $y \in Imag_R(X \cup Y)$. Pela definição de imagem, existe $x \in X \cup Y$ tal que $(x, y) \in R$. Há dois casos a analisar, já que $x \in X \cup Y$. O primeiro é $x \in X$. Neste caso, o fato $(x, y) \in R$ implica $y \in Imag_R(X)$. No outro caso, supomos $x \in Y$. Novamente, usamos o fato $(x, y) \in R$, mas desta vez para concluir que $y \in Imag_R(Y)$. Portanto, y está em $Imag_R(X)$ ou $Imag_R(Y)$, ou seja, $y \in Imag_R(X) \cup Imag_R(Y)$.

Mostramos agora que $Imag_R(X) \cup Imag_R(Y) \subseteq Imag_R(X \cup Y)$. Seja

$y \in Imag_R(X) \cup Imag_R(Y)$. Como na etapa anterior, há dois casos a analisar. No primeiro, supomos $y \in Imag_R(X)$, o que significa que existe um $x \in X$ tal que $(x, y) \in R$. Este mesmo elemento x está em $X \cup Y$ (pois ele está em X), portanto $y \in Imag_R(X \cup Y)$. No caso de $y \in Imag_R(Y)$, seguimos argumentação idêntica para concluir que $y \in Imag_R(X \cup Y)$. □

Lema *Se R é uma relação binária e X e Y são conjuntos, então $Imag_R(X \cap Y) \subseteq Imag_R(X) \cap Imag_R(Y)$.*

Demonstração: Para qualquer elemento y de $Imag_R(X \cap Y)$, existe $x \in X \cap Y$ tal que $(x, y) \in R$, por definição. Então, $x \in X$ e $x \in Y$, e cada uma dessas propriedades implica uma propriedade para y. No primeiro caso, $x \in X$ e $(x, y) \in R$ implica $y \in Imag_R(X)$, enquanto no segundo, $x \in Y$ e $(x, y) \in R$ implica $y \in Imag_R(Y)$. Portanto, $y \in Imag_R(X) \cap Imag_R(Y)$. □

A existência de uma relação binária implica na existência da relação inversa.

Definição *(Inversa) A inversa R^{-1} de uma relação binária R é a relação $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$.*

Uma relação e sua inversa possuem fortes ligações, como as mostradas abaixo.

Lema *Se R é uma relação binária, então $(R^{-1})^{-1} = R$.*

Demonstração: Pela definição de inversa, $(a, b) \in (R^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (b, a) \in R^{-1} \Leftrightarrow (a, b) \in R$. Portanto, $(a, b) \in (R^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (a, b) \in R$. □

Lema *Se $R \subseteq A \times B$ é uma relação binária, então $Imag_{R^{-1}}(B) = Dom_R$.*

Demonstração: Se $a \in Imag_{R^{-1}}(B)$, então existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$. Logo, $a \in A$, $a \in Dom_R$ e, portanto, $Imag_{R^{-1}}(B) \subseteq Dom_R$. Inversamente, se $a \in Dom_R$, então existe b e $(a, b) \in R$. Com isso, $b \in B$ e, como $(a, b) \in R$, temos $a \in Imag_{R^{-1}}(B)$. Conseqüentemente, $Imag_{R^{-1}}(B) \subseteq Dom_R$. □

Dois outros fatos decorrentes da definição de relação inversa são $Dom_R = ContraDom_{R^{-1}}$ e, para qualquer conjunto Y, a imagem inversa de Y sobre R é igual à imagem de Y sobre R^{-1}. Observe que este último fato implica que $ImagInv_R(Y)$ pode ser alternativamente visto tanto como a imagem inversa de Y sobre R, como a imagem de Y sobre R^{-1}. É deixado ao leitor verificar essas afirmações.

Uma última definição sobre relações binárias trata da obtenção de uma relação binária a partir de duas outras relações binárias previamente conhecidas. Aplicações dessa definição aparecerão nas próximas seções.

Definição *(Composição) Sejam R e S duas relações binárias. A composição de R e S é a relação* $S \circ R = \{(r, s) \mid \exists x$ *tal que* $(r, x) \in R \wedge (x, s) \in S\}$.

Dada uma relação R entre os conjuntos A e B e uma relação S entre os conjuntos B e C, observe que a composição $S \circ R$ é uma relação entre A e C.

Lema *Se R e S são duas relações tais que $ContraDom_R \subseteq Dom_S$, então $Dom_{S \circ R} = Dom_R$*
.

Demonstração: Para mostrar que $ContraDom_R \subseteq Dom_S$, sejam $a \in Dom_{S \circ R}$ e $(a, c) \in S \circ R$. Caso este último par não exista, então $S \circ R = \emptyset$ e o resultado em questão é válido. Caso contrário, existe b tal que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in S$. Portanto, $x \in Dom_R$.

Inversamente, suponha $a \in Dom_R$ e $(a, b) \in R$. Nessa situação, como $ContraDom_R$ e, por hipótese, $ContraDom_R \subseteq Dom_S$, concluimos que Dom_S. Logo, existe c tal que $(b, c) \in S$ e, conseqüentemente, $(a, c) \in S \circ R$. Portanto, $a \in Dom_{S \circ R}$. $\square$

Nas seções seguintes, discutiremos algumas relações binárias especiais. Ao final deste capítulo, discutiremos algumas generalizações dos conceitos envolvidos em relações binárias.
