From ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização

Manuscritos: Pares Ordenados

Material complementar

- **Ilustração Animada**
- **Exercícios**
- **Outros Exemplos?**
- **Notas de Aula?**
- **Bibliografia?**

O conceito formal de *relações* entre conjuntos, em particular de *relações binárias*, depende do conceito de *conjuntos ordenados*. Em particular, um *par ordenado*, que é um conjunto ordenado com dois elementos, é um par de elementos arrumados em uma ordem fixa. Esse conceito contrapõe-se ao fato de que se a e b são dois elementos, então $\{a, b\} = \{b, a\}$, o que pode ser visto como um *par não-ordenado*. Por outro lado, usamos a notação (a, b) para indicar o par ordenado cujo o primeiro elemento, ou *coordenada*, é a e o segundo elemento é b. Como a ordem é importante, o par (a, b) é diferente do par (b, a), embora a repetição seja permitida. Logo, o par (a, a) é também um par ordenado. Formalmente, podemos escrever

Definição *(Par ordenado) Se a e b são conjuntos, então o par ordenado cujo primeiro elemento é a e o segundo é b é* $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

A definição formal dada acima nos permite fazer algumas observações. Primeiro, observa-se que, com exceção dos pares ordenados do tipo (a, b), com $a = b$, podemos associar à primeira coordenada o elemento do conjunto (a, b) que possui ele mesmo somente um elemento ($\{a\}$), e à segunda coordenada o que possui dois elementos ($\{a, b\}$). Com isso, é possível também observar que, de fato, $(a, b) \neq (b, a)$, pois $\{\{a\}, \{a, b\}\} \neq \{\{b\}, \{a, b\}\}$. Mas, ainda resta a questão: (a, b) é um conjunto?

Lema *Se a e b são conjuntos, então* (a, b) *é um conjunto.*

Demonstração: O **Axioma dos Pares** nos permite construir $\{a\}$ (a partir de a e a) e $\{a, b\}$ (a partir de a e b). Tomando esses dois conjunto e usando novamente o **Axioma dos Pares**, concluimos o lema. $\square$

Finalmente, observa-se ainda que dois pares ordenados são iguais se e somente se eles coincidem nas duas coordenadas.

Teorema *Se a e b são conjuntos, então* $(a = a') \wedge (b = b') \Leftrightarrow (a, b) = (a', b')$.

Demonstração: Para a primeira implicação, começamos supondo $a = a'$ e $b = b'$. Então, $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\} = (a', b')$. Portanto, $(a, b) = (a', b')$. Por outro lado, suponha $(a, b) = (a', b')$, o que pode ser escrito na forma $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$. Devemos analisar dois casos, a saber:

1. Se $a = b$, então $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}\}$. Logo, $\{\{a\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$, o que leva a

$\{a\} = \{a'\}$, de onde podemos concluir que $a = a'$, e $\{a\} = \{a', b'\} = \{a, b'\}$, com a que concluimos que $b' = a = b$.

2. Se $a \neq b$, então a primeira coordenada de (a, b) está associada a um conjunto de somente um elemento, mas o conjunto ao qual está associada a segunda coordenada possui dois elementos. Assim sendo, temos que a igualdade entre os pares ordenados nos leva a concluir que $\{a, b\} = \{a', b'\}$, pois $\{a', b'\}$ é o único elemento de (a', b') que pode ter, ele mesmo, dois elementos. Consequentemente, a única coordenada de (a', b') associada a um conjunto de somente um elemento é $\{a'\}$, o que implica $\{a\} = \{a'\}$, ou seja, $a = a'$. Além disso, a igualdade entre as segundas coordenadas garante que $b = b'$, provando a implicação para este segundo caso. $\square$

Uma conseqüência imediata do **teorema acima** é que se $(a, b) = (b, a)$, então $a = b$. É possível ainda relacionar um par ordenado com conjunto das partes.

> ***Teorema*** *Se $\{a\}$ e $\{b\}$ são dois conjuntos, então $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a, b\}))$.*

Demonstração: O **Axioma dos Pares** nos permite afirmar que o conjunto $\{a, b\}$ existe. Com isso, usamos o **Axioma das Partes** e afirmamos que se x é um conjunto, então $x \in \mathcal{P}(\{a, b\}) \;\Leftrightarrow\; x \subseteq \{a, b\}$. Em particular, tomando os casos $x = \{a\}$ e $x = \{a, b\}$, concluimos que $\{a\} \in \mathcal{P}(\{a, b\})$ e $\{a, b\} \in \mathcal{P}(\{a, b\})$. Então, se ambos $\{a\}$ e $\{a, b\}$ estão em $\mathcal{P}(\{a, b\})$, podemos concluir que $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ é um subconjunto de $\mathcal{P}(\{a, b\})$. Observe que a existência de $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ é assegurada pelo **Axioma dos Pares**. Portanto, pelo **Axioma das Partes**, $\{\{a\}, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a, b\}))$. $\square$

Os pares ordenados que podem ser formados tomando-se os elementos de dois conjuntos podem ser agrupados em um conjunto.

> ***Definição*** *(Produto cartesiano) Se A e B são conjuntos, então o produto cartesiano de A por B é*
>
> $A \times B = \{(a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}$.

Uma outra forma de expressar os pares ordenados do produto cartesiano de A por B é através da propriedade

$(a, b) \in A \times B \;\Leftrightarrow\; (a \in A) \wedge (b \in B)$.

A existência de um conjunto com tais propriedades é assegurada da seguinte forma.

> ***Teorema*** *Se A e B são dois conjuntos, então $A \times B$ é um conjunto.*

Demonstração: Tomemos dois conjuntos A e B. Usaremos uma generalização do **Teorema** que diz que se $a \in A$ e $a' \in A$, então $(a, a') \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ (a demonstração desse fato é deixada ao leitor). Então, podemos escrever

$$A \times B = \{x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) : x = (a, b), \text{ para algum } a \in A \text{ e algum } b \in B\}$$

O **Axioma da União** e o **Axioma das Partes** garantem a existência de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. Assim sendo, podemos aplicar o **Axioma dos Subconjuntos** para concluir a existência de $A \times B$. $\square$

Este último fato nos diz que, tomando dois conjuntos, conseguimos formar pares ordenados. O inverso também ocorre, ou seja:

Lema *Se (a, b) é um conjunto, então existe um conjunto A tal que $a \in A$, e um conjunto B tal que $b \in B$.*

Demonstração: A partir de $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, usamos o **Axioma da União** para concluir que $\{a, b\}$ é um conjunto. Basta, então, tomar $A = \{a, b\}$ e $B = \{a, b\}$. $\square$

Exemplo *(Produto cartesiano) Voltando ao nosso* ***primeiro exemplo****, se A é o conjunto de professores e B o conjunto de turmas e desejamos relacionar os professores às turmas nas quais ele leciona, um par ordenado (a, b), onde a é um professor e b é uma turma, pode traduzir muito bem essa relação. Entretanto, o produto cartesiano $A \times B$ é o conjunto de todos os pares do tipo (a, b) onde a é um professor e b é uma turma. A menos que todos os professores lecionem em todas as turmas, alguns elementos do produto cartesiano ferem o relacionamento que desejamos expressar entre esses conjuntos. O relacionamento entre esses conjuntos é, certamente, um subconjunto do produto cartesiano entre eles.*