From ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização

Manuscritos: Propriedades das Operações

As seguintes identidades, válidas para quaisquer conjuntos, são algumas propriedades das operações:

- *Lei da Comutatividade*

$A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$

- *Lei da Associatividade*

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ e $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

- *Lei da Distributividade*

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

- *Leis de De Morgan*

$C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$ e $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$,

- *Identidades com o $\emptyset$*

$A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ e $A \cap (C - A) = \emptyset$.

Nós agora podemos dar uma idéia de como podem ser provados todos os fatos acima. Vamos considerar um dos casos da Lei da Distributividade:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$

Demonstração: Começamos definindo $Z = A \cup (B \cap C)$ e $W = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Em seguida, procederemos em duas etapas. Na primeira, mostramos que $Z \subseteq W$, ou, em outras palavras, mostramos que a implicação $\forall x, (x \in Z \Rightarrow x \in W)$ é válida. Temos, pela definição, que $x \in Z$ significa que $x \in A$ ou $x \in B \cap C$. Se $x \in A$, então $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$. Portanto, $x \in A \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, o que quer dizer que $x \in W$, provando a implicação que desejamos para quando $x \in A$. O outro caso ocorre quando $x \in B$ e $x \in C$. Neste caso, observamos que $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$. Logo, $x \in W$ e a implicação também é válida.

A segunda etapa corresponde a mostrar a implicação

$\forall x, (x \in W \Rightarrow x \in X)$

o que é o mesmo que mostrar que $W \subseteq Z$. Uma decorrência de $x \in W$ é $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$. Então, ($x \in A$ ou $x \in B$) e ($x \in A$ ou $x \in C$). Há dois casos a analisar. O primeiro é $x \in A$, o que claramente leva a $x \in A \cup (B \cap C)$. O segundo caso é $x \in B$ e $x \in C$, que equivale a dizer que $x \in B \cap C$ e, portanto, que $x \in A \cup (B \cap C)$. Portanto, a implicação vale em todos os casos. □

Esse mesmo método pode ser usado para demonstrar as Leis de De Morgan. Vejamos, por exemplo, uma demonstração para

$C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$

Demonstração: Primeiro mostramos que

$C - (A \cup B) \subseteq (C - A) \cap (C - B)$

Seja $x \in C - (A \cup B)$. Temos que $x \in C$ e $x \notin A \cup B$. Logo, $x \notin A$ e $x \notin B$. Como $x \in C$, temos que $x \in C - A$ e $x \in C - B$. Portanto, $x \in (C - A) \cap (C - B)$, validando a implicação que desejamos. No outro sentido, mostramos que $(C - A) \cap (C - B) \subseteq C - (A \cup B)$. Seja $x \in (C - A) \cap (C - B)$, o que implica que $x \in C - A$ e $x \in C - B$. Logo, $x \in C$, $x \notin A$ e $x \notin B$. Portanto, a implicação também vale porque $x \notin A \cup B$ e $x \in C$. □

Dados dois conjuntos A e B, podemos associar, segundo algum critério, os elementos desses conjuntos. Por exemplo, seja A o conjunto de professores e seja B o conjunto de turmas, podemos desejar relacionar cada professor com as turmas para os quais o professor leciona alguma disciplina. Outro exemplo da necessidade de associar conjuntos será o assunto do próximo capítulo, onde veremos como definir outros conjuntos a partir do $\emptyset$ e dos axiomas. Neste capítulo, veremos dois conceitos que nos permitem associar conjuntos: as *relações* e as *funções*.
