From ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização

Manuscritos: Operações com Conjuntos

Várias operações são usualmente definidas sobre conjuntos. Os resultados da seção anterior nos permitem formular algumas operações sobre conjuntos. Consideramos, entre outras coisas, que todos os elementos de conjuntos são também conjuntos.

Definição *Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer. Cada uma das seguintes operações constrói um novo conjunto a partir de A e B:*

União $A \cup B = \bigcup\{A, B\}$

*conjunto cujos elementos são aqueles pertencendo a A ou a B (ou a ambos). A união decorre diretamente da aplicação do **Axioma dos Pares** e do **Axioma da União**. Observe que se $A = \{x \in C \mid P(x)\}$ e $B = \{y \in C \mid Q(y)\}$, onde P e Q são fórmulas conforme o **Axioma dos Subconjuntos**, então a união $A \cup B$ é dada por $\{w \in C \mid P(w) \vee Q(w)\}$.*

Interseção $A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\} = \{x \in B \mid x \in A\}$

*conjunto cujos elementos são aqueles pertencendo a A e a B. Pelo **Lema**, $A \cap B$ existe e é único. De forma análoga à observação feita na união, observamos que se $A = \{x \in C \mid P(x)\}$ e $B = \{y \in C \mid Q(y)\}$, onde P e Q são fórmulas, então a interseção $A \cap B$ é dada por $\{w \in C \mid P(w) \wedge Q(w)\}$.*

Diferença $A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$

*conjunto cujos elementos são aqueles pertencendo a A, mas não a B. A existência de $A - B$ decorre diretamente do **Axioma dos Subconjuntos**, enquanto a unicidade é garantida pelo **Axioma da Igualdade**. Tomando novamente A e B como subconjuntos de C relativos às fórmulas P e Q, respectivamente, temos que $A - B = \{x \in C \mid P(x) \wedge \neg Q(x)\}$.*

Diferença simétrica $A \ominus B = \cup\{\{x \in A \mid x \notin B\}, \{x \in B \mid x \notin A\}\}$

conjunto cujos elementos são aqueles pertencendo a A, mas não a B, e aqueles que pertencem a B, mas não a A. Mais formalmente, podemos definir os conjuntos $D = \{x \in A \mid x \notin B\}$ e $E = \{x \in B \mid x \notin A\}$.

*Além disso, com a ajuda do **Axioma dos Pares**, formamos o conjunto dos pares $F = \{D, E\}$. Finalmente, aplicamos o **Axioma da União** para obter o conjunto $A \ominus B = \bigcup F$. Mais uma vez, $A \ominus B$ é único como decorrência do **Axioma da Igualdade**.*

Os exemplos a seguir ilustram as operações acima definidas:

- Se $B \in A$, então $B \subseteq \bigcup A$
- Se $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in A$, então $\{x, y\} \in \bigcup A$, $x \in \bigcup\bigcup A$ e $y \in \bigcup\bigcup A$

- $\{a, b\} - \{a, c\} = \{b\}$
- $\{a, b\} - \emptyset = \{a, b\}$
- $\{a, b\} \ominus \{a, c\} = \{b, c\}$
- $\{a, b\} \ominus \emptyset = \{a, b\}$
- $\{a, b\} \ominus \{a, b\} = \emptyset$

Definição (Conjuntos disjuntos) *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Diremos que A e B são disjuntos se $A \cap B = \emptyset$.*

Definição (Partição de um conjunto) *Seja A um conjunto qualquer. Uma partição de A é um subconjunto $P \subseteq \mathcal{P}(A)$ tal que duas propriedades são satisfeitas:*

- $\bigcup P = A$
- *Se $P_1, P_2 \in P$, $P_1 \neq P_2$, então P_1 e P_2 são* ***disjuntos****.*

Se P é uma partição de A, então os seus elementos são denominados partes de A segundo P.

Seria natural que desejássemos uma gereralização da operação de interseção nos moldes do **Axioma da União**. Para isso, definiríamos para todo conjunto A, a interseção $\bigcap A$ de A através da condição

$x \in \bigcap A \;\Leftrightarrow\; x$ pertence a todo membro de A.

Essa definição pode também ser escrita usando o **Axioma dos Subconjuntos**, o que nos leva a

$\bigcap A = \{x \in B \mid \forall y \in A, x \in y\}$,

onde B é um conjunto de todos os elementos x tais que $\forall y \in A, x \in y$. Assim sendo, a existência do conjunto $\bigcap A$ seria uma decorrência da existência de B. Existe, porém, um caso extremo a ser examinado: o que acontece quando $A = \emptyset$? Para qualquer x, é verdade por vacuidade que x pertence a todo membro de $\emptyset$ (não há nenhum membro de $\emptyset$ ao qual x não pertence). Então, podemos pensar que B, além do próprio $\bigcap\emptyset$, poderiam ser a classe de todos os conjuntos. Pelo **Teorema**, essa classe não é um conjunto. Logo, como definir $\bigcap\emptyset$? A situação é análoga à divisão por zero em aritmética e nós não vamos utilizar a operação $\bigcap A$, uma vez que nós não temos nenhuma maneira satisfatória de definí-la.
