

---

## From ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização

# Manuscritos: Uma Teoria Axiomática dos Conjuntos

---

Não é completamente correto dizer que a Teoria dos Conjuntos criada por Cantor é inconsistente, isto é, leva a conclusões contraditórias. A partir da constatação de que definições excessivamente liberais de conjuntos levavam a contradições, distinguem-se as *coleções consistentes* das *inconsistentes*, apenas as do primeiro tipo sendo consideradas conjuntos de fato. Entretanto, como estabelecer critérios precisos com base nos quais essa distinção possa ser feita?

Em 1908, Ernst Zermelo apresentou uma *axiomatização para a Teoria dos Conjuntos*. Para entender a diferença com relação à abordagem da nossa Teoria dos Conjuntos Ingênuas, é preciso esclarecer o significado do termo "axiomatizar uma teoria": estabelecer a sua base por meio de axiomas e definições, a partir dos quais são deduzidos os lemas e teoremas. *Axiomas* são sentenças que servem de pressupostos com base nos quais as deduções podem ser feitas; geralmente, eles são afirmações consideradas verdadeiras em relação à realidade que desejamos modelar com a teoria. Tomemos, a título de exemplo, o Axioma I-1 da axiomatização apresentada por David Hilbert para a Geometria Euclidiana:

"Dois pontos distintos  $A$  e  $B$  sempre determinam completamente uma linha reta  $a$ ."

*Definições* são sentenças que caracterizam um conceito, geralmente em função de outros que, por assim dizer, já foram definidos anteriormente -- por exemplo:

"Uma *bipartição de um conjunto*  $C$  é um par  $(A, B)$  tal que (a)  $A, B \subseteq C$ , (b)  $A \cap B = \emptyset$  e (c)  $A \cup B = C$ ."

*Lemas e Teoremas* são sentenças que podem ser deduzidas a partir dos axiomas e definições de uma teoria, e geralmente consistem nas conclusões úteis a que uma teoria nos permite chegar. A diferença entre os dois termos está na sua abrangência. O primeiro termo é preferido para expressar resultados parciais, enquanto o segundo são resultados mais importantes e de maior impacto. A sentença abaixo, por exemplo, é um teorema dedutível a partir dos axiomas para a Geometria Euclidiana propostos por Hilbert:

"Duas linhas retas de um plano ou tem 1 ou nenhum ponto em comum."

Agora, um fato importante em relação ao método axiomático é que *os conceitos primitivos são deixados indefinidos, sendo caracterizados apenas pelas propriedades a eles impostas através dos axiomas*, os quais, sendo as únicas estipulações feitas a respeito desses conceitos, servem-lhes de definição. Assim, por exemplo, na Geometria Euclidiana, os conceitos *ponto*, *reta* e *plano* não são definidos em termos de conceitos "mais simples", mas apenas caracterizados pelos axiomas da teoria (como o Axioma I-1 acima mencionado), os

quais discriminam todos os pressupostos a que se pode recorrer nas deduções dos teoremas. Dessa forma, quando Zermelo apresentou uma axiomatização para a Teoria dos Conjuntos, ele deixou indefinido o conceito primitivo "conjunto", apenas listando por meio dos axiomas os pressupostos da teoria a respeito desse conceito. Assim, um objeto só pode ser chamado de conjunto à luz da Teoria Axiomática se a sua existência for uma decorrência dos axiomas. O enfoque proposto por Zermelo resolveu portanto de forma objetiva o problema de como se definir o conceito de conjunto: ele simplesmente deixava de lado essa tarefa, se restringindo a especificar *quais conjuntos existem e que propriedades eles possuem*.

A axiomatização proposta por Zermelo foi posteriormente melhorada e aumentada, resultando na teoria que hoje é conhecida como ZFC (o "Z" abrevia "Zermelo") e que é a mais difundida axiomatização da Teoria dos Conjuntos, embora existam outras, também importantes e com vantagens particulares. A Teoria dos Conjuntos, por sua vez, além de ser estudada em si mesma, passou a servir de alicerce para a maior parte da Matemática, fornecendo conceitos para o desenvolvimento de outras teorias.

(Não foi provado ainda que ZFC é uma teoria consistente, e, na verdade, já foi provado inclusive que, mesmo que ela o seja, isso não pode ser demonstrado utilizando-se apenas os recursos dessa teoria. Entretanto, nenhuma contradição foi até hoje encontrada na teoria, e a continuidade dessa situação aponta crescentemente, pelo menos do ponto de vista empírico, para a sua consistência.)

## Alguns Axiomas

A partir das noções de elementos e conjuntos descritas na seção anterior, enunciaremos nesta seção seis premissas, cada uma delas chamada de *Axioma*, que nos permitirão construir os conjuntos abarcados pela teoria apresentada aqui. A construção dessa teoria consistirá na determinação de propriedades de conjuntos, e tais propriedades serão expressas na forma de sentenças verdadeiras, cada uma delas chamada de *Lema* ou *Teorema*. O uso do primeiro termo indica que a propriedade expressa pela sentença implica em alguma outra propriedade expressa em um Teorema.

O primeiro axioma a ser apresentado garante a existência de pelo menos um conjunto:

***Axioma do Conjunto Vazio*** Existe um conjunto sem elementos. Mais formalmente,  $\exists B: \forall x, x \notin B$ .

O Axioma do Conjunto Vazio, também conhecido como Axioma da Existência, é a base da Teoria Axiomática visto que é o axioma que nos permite identificar conjuntos que não dependem de outros conjuntos. O axioma a seguir trata da igualdade entre conjuntos.

***Axioma da Igualdade*** Dois conjuntos  $A$  e  $B$  têm exatamente os mesmos elementos se e somente se eles são iguais. Dizemos, neste caso, que  $A = B$ . Formalmente, se  $A$  e  $B$  são conjuntos, então  $\forall x, (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow A = B$ .

A partir desse Axioma, temos que os conjuntos  $\{x, y\}$  e  $\{y, x\}$  são iguais (pois eles têm

exatamente os mesmos elementos). Os conjuntos  $\{x, x\}$  e  $\{x\}$  também são iguais por possuir exatamente os mesmos membros. O axioma acima nos permite ainda garantir a existência de um único conjunto sem elementos.

**Lema** Se  $A$  e  $B$  são dois conjuntos sem elementos, então  $A = B$

*Demonstração:* Dado que  $A$  e  $B$  são conjuntos sem elementos, temos que  $x \in A$  e  $x \in B$  são **F** para todo elemento  $x$ . Tais conjuntos existem pelo **Axioma do Conjunto Vazio**. Então,  $(x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)$  é **V** por vacuidade, para todo  $x$ . Logo, aplicando o **Axioma da Igualdade**, concluímos que  $A = B$ .  $\square$

Chamamos o (único) conjunto sem elementos de *conjunto vazio* e usamos o símbolo  $\emptyset$  para representá-lo. O conjunto  $\emptyset$  está contido em qualquer conjunto  $A$ , uma vez que é verdade (por vacuidade) que todo elemento de  $\emptyset$  está em  $A$ .

Visto que o conjunto vazio é o único objeto que pode ser classificado como conjunto pelos axiomas acima, precisamos de outros axiomas se pretendemos incluir outros conjuntos em nossa teoria. De fato, há ainda um certo número de axiomas, necessários para a construção dos conjuntos utilizados nos diversos ramos da Matemática. Cada um desses novos axiomas acrescenta novos conjuntos à teoria (naturalmente, mantendo a consistência entre os axiomas). Essencialmente, há duas maneiras possíveis de acrescentar conjuntos à teoria através de novos axiomas. A primeira é enunciar um axioma que estabelece, diretamente, a existência de um certo conjunto (o **Axioma do Conjunto Vazio** é um exemplo). Uma outra maneira, adotada nos três axiomas que veremos a seguir, é estabelecer a existência de novos conjuntos como consequência de outros já existentes. Em particular, podemos dizer o seguinte.

**Axioma dos Subconjuntos** Se  $A$  é um conjunto e  $P(x)$  é uma fórmula em  $x$ , então existe um conjunto  $B$  tal que  $x \in B$  se e somente se  $x \in A$  e  $P(x)$  é **V**. De maneira formal, se  $A$  é um conjunto, então  $\exists B: \forall x, (x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge P(x))$ .

Em outras palavras, o axioma assegura a existência de um conjunto  $B$  cujos elementos são exatamente os elementos de  $A$  tais que  $P$ , caso  $A$  seja um conjunto. Como consequência, temos que  $B \subseteq A$ . Na verdade, o **Axioma dos Subconjuntos** é um esquema de axiomas pois, para cada propriedade expressa pela fórmula  $P(x)$ , há um axioma diferente.

**Lema** Seja  $x$  um elemento e  $P(x)$  uma fórmula em  $x$ . Se  $A$  é um conjunto, então existe um único conjunto  $B$  tal que  $x \in B$  se e somente se  $x \in A$  e  $P(x)$ .

*Demonstração:* Sejam  $B$  e  $B'$  dois conjuntos tais que  $x \in B$  se e somente se  $x \in A$  e  $P(x)$  e  $x \in B'$  se e somente se  $x \in A$  e  $P(x)$ . A existência desses conjuntos é garantida pelo **Axioma dos Subconjuntos**. Por equivalência, concluímos que  $x \in B$  se e somente se  $x \in B'$ . Aplicando o **Axioma da Igualdade**, temos que  $B = B'$ .  $\square$

Como  $B$  é unicamente determinado, podemos usar a seguinte notação para defini-lo:  
 $B = \{x \in A \mid P(x)\}$ .

Diremos que um conjunto  $A$  é um *subconjunto próprio* de um conjunto  $B$  se  $A$  é um subconjunto de  $B$ , porém  $A \neq B$ . Usaremos a notação  $A \subset B$  para indicar que  $A$  é um conjunto subconjunto próprio de  $B$ .

Nem toda propriedade pode ser usada para definir subconjuntos. Outra consequência importante do **Axioma dos Subconjuntos** é que a classe de todos os conjuntos não é ela mesma um conjunto.

**Teorema** Não existe um conjunto contendo todos os conjuntos.

*Demonstração:* Por contradição, suponha a existência de um conjunto  $R$  tal que, para todo conjunto  $x$ ,  $x \in R$ . Já que  $R$  existe, podemos usar o **Axioma dos Subconjuntos** para construir o conjunto

$$B = \{x \in R : x \notin x\}$$

Além disso, por definição de pertinência,  $B \in B$  ou  $B \notin B$ . Se  $B \in B$ , então o fato de  $B \in R$  implica, pela definição de  $B$ , que  $B \notin B$ , o que contradiz a hipótese  $B \in B$ . Então,  $B \notin B$ , e como  $B \in R$ , concluímos que  $B \in B$  pois  $B$  satisfaz as duas condições para ser membro de  $B$ . Novamente chegamos a uma contradição. Portanto, se ambos  $B \in B$  e  $B \notin B$  são **F**, então  $B$  não pode existir, contrariando a hipótese de  $R$  existir.  $\square$

Seguimos com os axiomas que permitem criar novos conjuntos. Nos dois axiomas seguintes, veremos como compor conjuntos para obter conjuntos maiores.

**Axioma dos Pares** Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos quaisquer. Então, existe um conjunto contendo exatamente  $A$  e  $B$ :  $\exists C : \forall x, (x \in C \Leftrightarrow (x = A) \vee (x = B))$ .

Para quaisquer conjuntos  $A$  e  $B$ , o *conjunto dos pares*  $\{A, B\}$  é o conjunto cujos únicos membros são  $A$  e  $B$ . Usando o **Axioma dos Pares**, a existência de  $A$  e  $B$  implica na existência de muitos outros conjuntos. Por exemplo, podemos concluir que o conjunto  $\emptyset$  pode também ser um elemento de um outro conjunto. Mais concretamente, considere que, tomando a notação do enunciado do axioma, tenhamos  $A = \emptyset$  e  $B = \emptyset$ . Nessa situação, o **Axioma dos Pares** garante a existência do conjunto  $\{\emptyset\}$  com apenas um elemento: o  $\emptyset$ . Observe que  $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ , uma vez que  $\emptyset \in \{\emptyset\}$ , mas  $\emptyset \notin \emptyset$ . De maneira semelhante, nós podemos também combinar os conjuntos  $\emptyset$  e  $\{\emptyset\}$ , obtendo o conjunto  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ . O próximo axioma nos permite "abrir" conjuntos que são elementos de um outro conjunto.

**Axioma da União** Para qualquer conjunto  $A$ , existe um conjunto  $\cup A$  cujos elementos são exatamente os elementos dos elementos de  $A$ :  $\forall x, (x \in \cup A \Leftrightarrow \exists B : (B \in A) \wedge (x \in B))$ .

Veja como podemos obter o conjunto  $A \cup B$  a partir de conjuntos  $A$  e  $B$ : se  $A$  e  $B$  são conjuntos, então, pelo **Axioma dos Pares**,  $\{A, B\}$  também é um conjunto, o que, pelo **Axioma da União**, implica que existe um conjunto cujos elementos são exatamente aqueles que pertencem a pelo menos um entre  $A$  e  $B$ ; ora, esse não é senão o conjunto que, na **Teoria dos Conjuntos Ingênua**, nós denotamos por  $A \cup B$ . De fato, há formas mais gerais de usar o **Axioma dos Pares** e o **Axioma da União** juntos para formar outros conjuntos. Por exemplo, dado  $X$ , um conjunto qualquer, podemos formar o conjunto  $\{X\}$ , que é definido ser  $\{X, X\}$ . Além disso, dados quaisquer conjuntos  $X_1, X_2$  e  $X_3$ , podemos definir os conjuntos

$\{X_1, X_2\}, \{X_3\}, \{\{X_1, X_2\}, \{X_3\}\}$  e  $\{X_1, X_2, X_3\}$ .

Dado um conjunto qualquer  $A$ , podemos definir como *sucessor* de  $A$ , denotado por  $A^+$ , o conjunto  $\cup\{A, \{A\}\}$ . O sucessor do  $\emptyset$  é  $\{\emptyset\}$ , cujo sucessor é  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ , e cujo sucessor por sua vez é  $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ .

**Definição (Conjunto Indutivo)** Um conjunto  $A$  é indutivo se:

1.  $\emptyset \in A$ ; e
2. Se  $a \in A$ , então  $a^+ \in A$ .

Uma forma de tentar construir um conjunto indutivo é determinando os sucessivos sucessores obtidos a partir do  $\emptyset$ . Mas, usando apenas os axiomas de que dispomos até agora, nós conseguimos chegar a um conjunto indutivo dessa forma? A resposta é não porque, para qualquer conjunto que for construído, existe um elemento cujo sucessor não está no conjunto. Por isso, usamos o seguinte axioma:

**Axioma da Indução** Existe um conjunto indutivo.

Observe que um conjunto indutivo é definido de maneira recorrente, explicitando-se um ou mais dos seus elementos (dentre eles, o elemento  $\emptyset$ ), e descrevendo-se os demais elementos em termos dos elementos já conhecidos. Esta é a terceira maneira usual de definição de conjuntos (além da enumeração explícita e da descrição de uma propriedade comum dos elementos, vistos anteriormente). Uma consequência é a possibilidade de verificar seus elementos sem enumerá-los.

Veremos em um próximo capítulo que os elementos de um conjunto indutivo recebem nomes especiais. Por enquanto, continuaremos tratando de conjuntos genéricos. Uma outra forma de obter um novo conjunto a partir de outro já existente é tomando apenas alguns dos seus elementos.

**Axioma das Partes** Para qualquer conjunto  $A$ , existe um conjunto cujos elementos são exatamente o subconjuntos de  $A$ :  $\exists \mathbb{P}(A): \forall x, (x \in \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow x \subseteq A)$ .

O conjunto das partes  $\mathcal{P}(A)$  de qualquer conjunto  $A$  é o conjunto cujos elementos são exatamente os subconjuntos de  $A$ . A existência desse conjunto implica na existência de todos os subconjuntos de  $A$ .

---

Originário de <http://www.lia.ufc.br/~pargo/index.php/Manuscritos/ConstrucaoDeConjuntos>  
Pagina modificada em 27/04/2011 12:39