From ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização

Manuscritos: Uma Teoria Ingênua dos Conjuntos

As noções de conjuntos e elementos são as primeiras noções matemáticas com as quais temos contato, normalmente no início da escolarização. Um *conjunto* é uma coleção, grupo ou conglomerado qualquer de objetos oriundos da nossa percepção, intuição ou pensamento. Os objetos de um conjunto são chamados de seus *membros* ou *elementos*. Em muitos casos, recorre-se a uma enumeração dos elementos de um conjunto para definir de maneira precisa esse conjunto. Veja, por exemplo, que $A = \{2, 3, 5, 7\}$ é um conjunto formado pelos elementos 2, 3, 5 e 7 (observe a enumeração explícita dos elementos de A). Observe que usamos $\{\}$ (chaves) para encapsular a descrição dos conjuntos, ou seja, um conjunto é descrito colocando-se entre chaves seus elementos. Apesar de ser intuitivo, esse recurso nem sempre pode ser usado, e a razão é que, em alguns conjuntos, uma tal enumeração não pode ser feita de maneira explícita. Apesar de a impossibilidade de enumeração explícita parecer incômoda, ela não impede que o conjunto também possa ser definido de maneira precisa. Então, sendo possível tornar precisa a descrição dos elementos de um conjunto, existe uma noção de *pertinência* de elementos a conjuntos: um elemento *pertence* a um conjunto A se ele aparece na descrição dos elementos de A (veja que um conjunto é, portanto, definido pelos elementos que pertencem a ele).

Um elemento de um conjunto pode ser, ele também, um conjunto. Assim, $B = \{2, 3, \{5, 7\}\}$ é um outro conjunto cujos elementos são 2, 3 e $\{5, 7\}$. O conceito de conjunto permite representar grupos de objetos ou seres vivos ou entidades de qualquer outra natureza que podem ser observados no mundo real através de uma estrutura matemática. Os indivíduos de uma comunidade, habitantes de uma cidade ou país, torcedores de um time de futebol são exemplos de grupos que podem ser enquadrados no conceito matemático de conjunto (o pode levar a alguns questionamentos de caráter ético, filosófico, sociológico ou de outro prisma que não é abordado neste texto).

Usualmente, reúnem-se em um conjunto objetos que têm alguma propriedade em comum, uma espécie de senha distintiva dos objetos que são elementos do dito conjunto em meio a outros objetos. Quando isso acontece, temos a possibilidade de descrever os elementos de um conjunto de maneira mais sucinta, sem enumerar explicitamente seus elementos. Considere, por exemplo, o conjunto dos números primos menores que 10. Observe que trata-se do conjunto A do exemplo do parágrafo anterior, que pode então ser re-escrito na forma

$A = \{x : x < 10 \text{ e } x \text{ é primo}\}$

Mais uma vez, exemplos podem ser buscados no mundo real. Quando, em 1919, Freud argumentou face a Jung que "O fato sexualidade é o nosso xibolete", ele estava identificando a nossa espécie em meio ao seres vivos. Se Freud fosse matemático e não o Pai da

Psicanálise, ele diria essa frase de maneira mais precisa (o que, certamente, não é adequado quando o assunto não é a Matemática. Por isso, vamos dar preferência aos exemplos matemáticos...). É importante que a definição de um conjunto não deixe dúvidas sobre a pertinência ou não de um objeto a ele. Observe que ambas as definições do conjunto A, por enumeração explícita dos seus elementos e pela descrição de uma propriedade comum, são claras e sem ambigüidades.

Determinar propriedades de conjuntos sem observar explicitamente cada um de seus elementos é certamente o maior desafio, e também a maior utilidade, do estudo de conjuntos. Uma questão bastante comum é determinar a pertinência, ou não, de um dado elemento a um certo conjunto, o que pode ser feito enumerando-se os elementos desse conjunto e verificando se elemento procurado aparece na enumeração. Por exemplo, a enumeração do conjunto A nos fornece os elementos 2, 3, 5 e 7, de onde conlcuimos que $3 \in A$, mas que $\{2,7\} \notin A$. Uma outra forma de responder a mesma pergunta é possível quando temos a descrição de uma propriedade dos elementos do conjunto. Voltando ao conjunto A do exemplo, a definição $A = \{x \mid x < 10 \text{ e } x \text{ é primo}\}$ nos permite concluir que $3 \in A$, sem precisar realizar a enumeração anterior, pois $3 < 10$ e 3 é primo.

Seguimos com a definição de alguns conceitos usados na nossa descrição de propriedades de conjuntos. Escrevemos $t \in A$ para indicar que t é um elemento do conjunto A, e dizemos que "t pertence ao conjunto A". De forma complementar, escrevemos $t \notin A$ para indicar que t não é elemento de A. Observe que, para qualquer objeto t e qualquer conjunto A, temos $t \in A$ ou $t \notin A$, mas não ambos. Como já foi observado anteriormente, um conjunto pode ser elemento de um outro conjunto. Além disso, um conjunto A é dito *subconjunto* de um conjunto B se e somente se todo elemento de A é também elemento de B. Observe que qualquer conjunto é um subconjunto dele mesmo e, portanto, qualquer conjunto A possui um ou mais subconjuntos.

A relação de *inclusão* ($\subseteq$) é definida para quaisquer dois conjuntos. Se A e B são dois conjuntos, então $A \subseteq B$ significa que A é subconjunto de B, ou seja

$$B \subseteq A \iff \forall x, (x \in B \Rightarrow x \in A)$$

Para verificar se $A \subseteq B$, precisamos verificar que $x \in B$, para todo $x \in A$, ou seja, precisamos *abrir* A e verificar se cada um de seus membros está em B. Deve-se observar a diferença dessa propriedade para a relação de pertinência ($\in$) entre dois conjuntos. Neste caso, para verificar se $A \in B$, temos que pensar em A como um objeto fechado e verificar se ele está entre os membros de B. A título de ilustração, defina MD como o conjunto de estudantes que formam uma turma de Matemática Discreta e INF como o conjunto de todas as turmas do Curso de Informática. Podemos escrever, por exemplo, que João $\in MD \in INF$. Mas, João $\notin INF$ (João não é uma turma) nem $MD \backslash notsubseteq INF$ (MD é um elemento de INF, mas não um subconjunto).

Voltando aos exemplos $\mathbf{A = \{2,3,5,7\}}$ e $\mathbf{B = \{2,3,\{5,7\}\}}$, podemos afirmar que $\{2,7\} \subseteq A$. Temos, ainda, $5 \notin B$, $\{5,7\} \backslash not \subseteq B$ e $\{5,7\} \in B$.

Apesar de ingênua, uma teoria desenvolvida a partir da definição de conjunto nos permite estabelecer vários fatos. Por exemplo, podemos mostrar que se E é um conjunto, $A \subseteq E$, $B \subseteq E$ e $C \subseteq E$, então:

$$A \cap B = A \cap C \iff A \cap \{x \in E \mid x \notin B\} = A \cap \{x \in E \mid x \notin C\}$$