From ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização

Manuscritos: Introdução

A teoria dos conjuntos, embora trate de um conceito -- o de *conjunto* -- que possui (algumas) aplicações cuja compreensão é facílima -- como "o conjunto das maçãs em uma cesta" --, e que por isso mesmo é apresentado cedo no ensino escolar, apenas na segunda metade do século XIX recebeu o tratamento abrangente e sistematizado que forma a base moderna do assunto -- o que é surpreendente, se compararmos essa situação com a da Geometria, por exemplo, cujos alicerces modernos já começaram a ser estabelecidos na Grécia, há mais de dois milênios.

Embora o conceito de conjunto seja facilmente compreensível no caso *finito*, o mesmo não acontece com relação aos conjuntos *infinitos*. De imediato, uma questão é logo suscitada: *existem conjuntos infinitos?* Por um lado, pode-se argumentar que, como não se tem notícia de que uma coleção comprovadamente infinita de objetos foi encontrada no mundo físico, então não há justificativa plausível para que se defina conjuntos infinitos. Por outro lado, do ponto de vista abstrato, não é difícil encontrar coleções infinitas: o conjunto dos números cardinais (aqueles utilizados para se dar valor ao tamanho de conjuntos: 0 -- nenhum elemento, 1 -- um elemento, 2 -- dois elementos etc), por exemplo, é claramente uma coleção infinita, pois, para cada número cardinal, é fácil conceber outro que é 1 unidade maior que o primeiro, com o quê obtemos uma seqüência *sem fim* de tais números; é verdade que não conseguimos vislumbrar de uma vez só toda a coleção de números cardinais, mas isso parece ser mais uma restrição inerente à nossa mente do que uma evidência da não existência da coleção como um todo, pelo menos no mundo abstrato.

A questão "existem no mundo físico conjuntos infinitos?" não deve ser considerada um empecilho na definição de um tal conceito visto que, na Matemática, não é exatamente a correspondência com objetos concretos o critério segundo o qual é julgada a adequação de um conceito, mas a sua utilidade. Os números racionais, por exemplo, claramente constituem uma invenção útil, inclusive para as manipulações numéricas associadas às diversas atividades cotidianas. Entretanto, pode-se argumentar que a existência de todos os números racionais não é fisicamente garantida: afinal, existem números racionais tão pequenos quanto se queira, mas existe a garantia de que, dado um corpo físico, seria possível dividí-lo em partes ilimitadamente pequenas? Questão semelhante pode ser imaginada para os números cardinais, os quais são utilizados de forma generalizada também no dia-a-dia, mas cuja quantidade estaria vinculada à possibilidade de se encontrar no mundo físico coleções ilimitadamente grandes de objetos.

Estando decidido, então, que se deseja criar uma teoria sobre conjuntos, finitos e infinitos, o passo seguinte natural é definir os conceitos básicos de que ela trata, no caso, o conceito de *conjunto*. Entretanto, *o que é um conjunto?* Uma coleção de objetos? E o que é uma coleção? Com alguma reflexão, é possível verificar que definir um conceito em termos de outro equivalente não acrescenta nenhuma informação útil à definição, e por isso não serve ao nosso propósito. Consideremos então a definição apresentada pelo próprio criador da

Teoria dos Conjuntos, Georg Cantor: segundo ele, um conjunto é ``uma coleção, considerada com um todo (isto é, como um único objeto), de certos objetos bem determinados das nossas percepção ou pensamento''. Nós podemos ver que a definição de Cantor sofre do mesmo problema da anterior, embora especifique que os objetos a partir dos quais nós podemos formar conjuntos podem vir tanto da nossa percepção -- ou seja, por meio dos nossos sentidos -- quanto do nosso pensamento. Na verdade, definir esse conceito não é fácil: você consegue pensar numa definição melhor que as anteriores?

De qualquer forma, mesmo não sendo a definição de Cantor completamente satisfatória, seria ela suficientemente precisa para os propósitos da Teoria dos Conjuntos? Com alguma manipulação de conjuntos infinitos, logo é possível chegar a situações curiosas: consideremos, por exemplo, o caso do *conjunto de todos os conjuntos*. Em primeiro lugar, com base na definição de Cantor, é válido considerar a "coleção de todos os conjuntos como um conjunto?" Certamente, se todo conjunto é uma coleção de objetos das nossas percepção ou pensamento, então um conjunto é ele próprio um objeto do nosso pensamento; assim, a coleção de todos os conjuntos é uma coleção de objetos do nosso pensamento, e portanto também um conjunto. Sendo isso verdade, porém, então o conjunto de todos os conjuntos é um elemento de si mesmo, já que contém todos os conjuntos; entretanto, faz sentido um conjunto ser elemento de si mesmo?

Na verdade, existem conseqüências ainda mais críticas das estipulações sobre conjuntos que estamos tomando por base. Com base na possibilidade acima -- a de um conjunto conter a si mesmo --, consideremos agora o *conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos*. Embora seja estranho considerar que um conjunto contenha a si mesmo, nós podemos considerar que essa é uma conseqüência inesperada da nossa teoria mas que, de qualquer forma, dado um conjunto, ou ele pertence a si mesmo ou não; tomando isso por base, então, para cada conjunto -- que, como já foi argumentado, é um objeto do nosso pensamento -- está "bem determinado" se ele pertence a si mesmo ou não, o que implica que a "coleção" de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos é de fato um "conjunto". Agora, sendo isso verdade, nos é permitido imaginar algumas situações inusitadas. Uma delas: imagine uma aldeia onde, todos os dias, um barbeiro faz a barba de todos os homens que não barbeiam a si próprios e a mais ninguém. Ora, em tal aldeia duas coisas devem acontecer ao infeliz barbeiro:

- Se o barbeiro barbeia a si mesmo, então terá de fazer a barba a si mesmo.
- Se ele barbear a si mesmo, de acordo com a regra ele não poderá se barbear a si mesmo.

Outra situação: em um determinado reino, um filósofo que cometeu algum crime muito grave (por exemplo, olhou para uma das esposas do Rei), e deve ser executado. O Rei, em sua real e inifinita bondade, permite que o filósofo escolha entre ser enforcado ou decapitado, desde que ele diga, respectivamente, uma verdade ou uma mentira. O filósofo, então, diz *eu serei decapitado* (deixando o Rei completamente confuso!).

Essas pequenas histórias são ilustrações de uma indagação consistente com a definição de conjuntos: o "conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos" pertence a si mesmo? Para facilitar a investigação dessa questão, utilizemos a notação costumeira para conjuntos, e denotemos por $N = \{C \mid C \notin C\}$ o conjunto em questão. Investiguemos agora as consequências dos seguintes dois casos:

1. $N \in N$: Nesse caso, então, como todo elemento do conjunto N não é elemento de si mesmo, então $N \notin N$!
2. $N \notin N$: Nesse caso, então, pela definição do conjunto N, N pertence ao conjunto N!

Como, portanto, em ambos os casos acima, conclui-se que $N \in N$ e $N \notin N$, então essas duas conclusões são conseqüências dos pressupostos da nossa teoria, o que, entretanto, é um absurdo, já que essas afirmações se contra-dizem. (A contradição em questão ficou conhecida como *paradoxo de Russell*; antes de ele ser publicado, outros paradoxos relativos à Teoria dos Conjuntos -- como o de Burali-Forti, por exemplo -- já eram conhecidos, mas ele é particularmente importante devido à sua simplicidade.)

Pelo que foi exposto nos parágrafos anteriores, pode-se agora entender melhor por que a fundamentação moderna da Teoria dos Conjuntos começou a aparecer em época relativamente tardia:

1. Os **conjuntos infinitos** são objetos importantes da teoria, mas também suscitam diversas questões matemáticas controversas. No século XIX, entretanto, outras teorias -- como a Aritmética e Análise Real -- estavam recebendo uma fundamentação precisa, as quais porém faziam uso direto de conjuntos infinitos, e portanto demandavam uma teoria a respeito (essa foi, na verdade, a motivação dos trabalhos de Dedekind e Cantor no assunto).
2. O conceito de conjunto é inerentemente difícil de se definir: diferentemente de outros objetos matemáticos -- como, por exemplo, os números naturais, racionais e reais --, que podem ser definidos em termos de outros ``mais simples'', a noção de conjunto costuma ser entendida como fundamental, o que dificulta a sua definição. Na segunda metade do século XIX, porém, avanços na abordagem axiomática da Matemática possibilitaram que, no início do século seguinte, o problema da fundamentação da Teoria dos Conjuntos pudesse ser abordado de uma perspectiva diferente.
