From ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização

Manuscritos: Métodos de Demonstração

Demonstrar uma implicação lógica significa verificar a sua validade. No nosso contexto, uma demonstração é uma sucessão finita de argumentos restritos às regras da lógica, construída a partir de certos fatos iniciais tomados como **V**, mostrando que determinada implicação é necessariamente **V**, e esse é o mecanismo com o qual construiremos as teorias ao longo do livro. Naturalmente, encontrar uma demonstração não é um processo mecânico, pois envolve muita criatividade e perspicácia (o que certamente dá a beleza das teorias matemáticas). Portanto, cada demonstração segue uma linha de raciocínio própria. No entanto, alguns métodos de demonstração de implicações lógicas existem e serão usados ao longo do livro. Tais métodos, descritos a seguir, servem como um guia para estruturar o raciocínio usado na demonstração. Para descrever esses métodos, vamos supor que desejamos demonstrar uma implicação lógica do tipo $P \Rightarrow Q$, onde P e Q podem ser, e muitas vezes serão, fórmulas em uma ou mais variáveis. Vale observar que, no caso de P ou Q ser uma fórmula, demonstrar a implicação $P \Rightarrow Q$ significa que todas as implicações que podem ser construídas atribuindo-se valores à(s) variável(is) de P e Q são **V**. Nos exemplos empregados, utilizamos noções correntes sobre números inteiros e operações aritméticas, embora muitas delas sejam formalizadas em seções seguintes.

Os métodos de demonstração de $P \Rightarrow Q$ são os seguintes:

Demonstração por vacuidade

Consiste em argumentar que P é **F** em qualquer circunstância. No caso em que P é uma fórmula, devemos mostrar que não existe sentença obtida pela atribuição de valor à(s) sua(s) variável(is) que seja **V**. Por exemplo, a fórmula composta

"Se $(x + y > 0) \wedge (x < 0) \wedge (y < 0)$, então $x > y$"

é **V** por vacuidade, pois, para quaisquer valores inteiros de x e y, pelo menos uma das sentenças $(x + y > 0)$, $(x < 0)$ ou $(y < 0)$ é **F**. Outros exemplos correntes de sentença **V** por vacuidade ocorrem em fórmulas com a forma

"**Para todo** $x \in \emptyset$, $P(x)$"

Uma sentença não matemática que segue essa forma é

"Se o país x é africano e venceu uma Copa do Mundo de futebol no século XX, então o país x fica na Europa."

Claramente, este método só pode ser empregado nos casos em que a implicação é **V** por vacuidade. Quando esse não for o caso, é preciso examinar as situações em que P é **V**, o que pode ser feito com um dos dois outros métodos descritos em seguida.

Demonstração direta

Consiste em fazer a demonstração diretamente, ou seja, supondo que P seja **V**, argumenta-se que Q deve também ser **V**. Assim, temos que $P \Rightarrow Q$ é **V**. Observe que os casos em que P é **F** não precisam ser examinados, visto que, nesses casos, a implicação é **V**. Este método pode ser usado para demonstrar, por exemplo,

"**Para todo** número inteiro x, se $x^2 = 0$, então $x = 0$".

Neste caso, começamos supondo que $x^2 = 0$. Em seguida, para verificar que $x = 0$, observamos que $x^2 = x \,.\, x$ e, visto que a multiplicação de dois números quaisquer vale zero somente se pelo menos um dos números for nulo, chegamos à conclusão desejada.

Um outro exemplo de demonstração direta envolve a sentença

"Se $a \neq 0$, b e c são números inteiros tais que $b^2 - 4ac \geq 0$, então existe um número real x tal que $ax^2 + bx + c = 0$."

Uma demonstração direta, conhecida desde o século XII (devido ao trabalho do matemática hindu Baskhara), baseia-se na idéia de re-escrever a equação de forma a explicitar o termo $b^2 - 4ac$. Para obter o termo $4ac$, multiplicamos a equação por $4a$, obtendo

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$, o que também pode ser escrito na forma $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$.

Para introduzir o termo b^2, ele é somado à equação, resultando em

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$, o que também significa que $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$.

Analisando a equação escrita desta forma, percebemos que a igualdade é verificada quando $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, que é um número real se $b^2 - 4ac \geq 0$, concluindo a demonstração.

Demonstração construtiva

Um caso particular ocorre quando a implicação a ser demonstrada está associada ao **quantificador ∃**, ou seja, é da forma "$\exists x, P(x)$". Neste caso, a demonstração pode ser feita exibindo-se um valor $\widehat{x}$ de x tal que $P(\widehat{x}) = \mathbf{V}$. A título de exemplo. podemos retomar a **sentança anterior**. Seja $r = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Mostraremos que r é um número real que torna a sentença **V**. Se $b^2 - 4ac \geq 0$, então r é um número real tal que, se fizermos $x = r$ na equação, obtemos

$$a\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 + b\,\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + c = \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + \frac{b\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + c = \frac{b^2-2b\sqrt{b^2-4ac}+b^2-4ac}{4a} - \frac{b^2}{2a} + \frac{b\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + c = 0$$

Demonstração por contradição (ou absurdo)

Neste método, supomos que P é **V** (nos casos em que P é **F**, a sentença é **V**) e, por contradição, supomos que Q seja **F**. Partindo dessa suposição, tentamos chegar a uma conclusão que contradiz a hipótese inicial de que P é **V** ou a de que Q é **F**. Com isso, provamos que P sendo **V**, Q não pode ser **F**. Logo, Q é **V**. Este método também pode ser usado para demonstrar

"Se $x^2 = 0$, então $x = 0$".

Para isso, suponha que $x^2 = 0$, mas que $x \neq 0$. Por essa hipótese, há duas possibilidades para o valor de x, visto que $x \neq 0$: ou $x > 0$ ou $x < 0$. Então, analisando a multiplicação $x^2 = x \,.\, x$ nos dois casos citados, verificamos que $x^2 \neq 0$, o que contraria a hipótese inicial $x^2 = 0$. Portanto, a implicação é **V**. Outros exemplos bastante conhecidos de demonstração por absurdo apareceram em **Os Elementos de Euclides**, a respeito de números primos (um número natural é *primo* se possui exatamente dois divisores naturais distintos). Vejamos uma demonstração por contradição da sentença

"Todo número natural maior que 1 pode ser escrito como um produto formado por um ou mais números primos."

Começamos supondo que existe um numero natural que não pode ser obtido pela multiplicação de números primos. Seja x o menor desses números (podemos mostrar facilmente que $x > 4$). Claramente, x não é primo. Então, existem k números naturais $p_1, p_2, \ldots, p_k$, com $k > 1$, tal que $x = p_1 p_2 \ldots p_k$. Seja i tal que p_i não é primo. Como $p_i < x$ e x é o menor natural que não possui decomposição em primos, concluimos que existe uma decomposição em primos de p_i. Usando esse fato, podemos obter uma fatoração em primos de p_i, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, e portanto também de x, contrariando a hipótese inicial.

Uma sentença que recebeu uma demonstração por contradição de Euclides foi

"Existe uma infinidade de números primos."

Neste caso, supomos por contradição que existe um número natural x maior que todos os números primos. Então, tomemos o número $y = p_1 p_2 \ldots p_k + 1$, sendo $p_1, p_2, \ldots, p_k$ todos os números primos, todos menores que x. Observamos que y não é divisível por nenhum dos primos mencionados (pois isso significaria que 1 é divisível por algum número mair que 1). Logo, usando o fato anterior de que todo número pode ser escrito como um produto de primos, concluimos que y é primo ou deve existir algum outro número primo que divide y, contrariando a hipótese inicial.

Conforme anunciado anteriormente, os métodos expostos acima devem ser tomados como guia, não devendo, de forma alguma, serem tomados como uma classificação precisa de todas as demonstrações matemáticas. Vejamos, por exemplo, uma demonstração que não pode ser encaixada nos métodos acima. Considere a sentença

"Existem dois números $x, y \notin \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ é o conjuntos dos números racionais) tais que $x^y \in \mathbb{Q}$."

Uma demonstração possível desta sentença decorre diretamente do fato

"A escolha $x = y = \sqrt{2}$ ou a escolha $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $y = \sqrt{2}$ satisfaz a $x^y \in \mathbb{Q}$."

Um caso especial em que precisamos demonstrar implicações lógicas ocorre na demonstração de equivalências lógicas. A demonstração de $P \Leftrightarrow Q$ exige a demonstração de $P \Rightarrow Q$ e de $Q \Rightarrow P$. Por exemplo, vejamos uma demonstração para

"Sejam x e y dois números naturais. A soma $x + y$ é ímpar se e somente se x ou y é ímpar, mas não ambos"

Nesse exemplo, temos $P(x, y)$ é "$x + y$ é ímpar", enquanto $Q(x, y)$ é "x ou y é ímpar, mas não ambos". O universo de ambas as fórmulas é o conjunto do números naturais. Podemos provar a ida, ou seja, $\forall x, y, P(x, y) \Rightarrow Q(x, y)$, por contradição. Assim, suponha que $x + y$ seja ímpar, sendo que x e y têm a mesma paridade. Dois casos podem acontecer: ambos, x e y, são pares ou ambos são ímpares. No primeiro caso, em que ambos são pares, podemos escrever $x = 2n$, para algum número natural n, e $y = 2m$, para algum número natural m. Neste caso, temos que a soma $x + y$ é $2(n + m)$, que é par pois $n + m$ é um número natural, contrariando a hipótese "$x + y$ é ímpar". No segundo caso, x e y podem ser escritos nas formas $2n + 1$ e $2m + 1$, novamente para dois certos números naturais n e m. Obtemos, então, $x + y = 2n + 1 + 2m + 1 = 2(n + m + 1)$, que é um número par, novamente contrariando a hipótese inicial.

A seguir descrevemos uma demonstração construtiva para a volta, $\forall x, y, Q(x, y) \Rightarrow P(x, y)$. Há duas possibilidades para tornar a sentença "x ou y é ímpar, mas não ambos" válida. Na primeira delas, suponha que x seja ímpar e y seja par. Nesta configuração, podemos escrever $x = 2n + 1$ e $y = 2m$, para dois certos números naturais n e m. Logo, $x + y = 2n + 2m + 1 = 2(n + m) + 1$, que é um número ímpar. A segunda possibilidade corresponde ao caso em que x é par e y é ímpar. Seguindo uma argumentação semelhante à possibilidade anterior, também concluimos que $x + y$ é ímpar.
