From ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização

Manuscritos: Fórmulas

Ocorre com frequência que o valor lógico de uma sentença depende do valor de uma variável. Por exemplo, considere a seguinte sentença P:

> "x gosta de Matemática."

Ora, claramente essa sentença depende de um sujeito (ou *variável lógica* x, entendida como uma variável que só pode assumir os valores **V** ou **F**) ao qual ela deve ser aplicada. Para indicar essa dependência da sentença P com a variável lógica x, escrevemos $P(x)$. As sentenças construídas dessa forma são também chamadas de *fórmulas lógicas* (ou simplesmente *fórmulas*, quando o fato de depender apenas de variáveis lógicas estiver claro pelo contexto). Observe que uma sentença também é uma fórmula. Observe ainda que uma fórmula corresponde, de fato, a várias sentenças, cada seqüência correspondendo a um valor da variável (nos permitimos omitir qualificação "lógica" pois este fato está subentendido pelo contexto). Para a fórmula $P(x)$ do exemplo acima, algumas das sentenças que podemos construir são:

1. P(João) = "João gosta de Matemática."
2. P(Maria) = "Maria gosta de Matemática."
3. P(Pedro) = "Pedro gosta de Matemática."

Podemos definir *quantificadores* para resumir informações sobre as sentenças de uma fórmula, tornando a sua escrita independente da quantidade de valores que a(s) variável(is) pode(m) assumir. A utilidade do uso de fórmulas fica assim evidente (em alguns casos, a quantidade de valores das variáveis pode ser ilimitada, fazendo com que o uso dos quantificadores vá além da comodidade, passando a ser uma necessidade). Obtemos o valor da aplicação do conectivo $\wedge$ a todas as sentenças usando o quantificador *para todo*:

> "Para toda pessoa x, x gosta de Matemática."

Freqüentemente, usamos a notação $\forall$ para indicar o quantificador *para todo*. Como "x gosta de Matemática" é a fórmula $P(x)$, a sentença acima pode ser re-escrita na forma:

> "$\forall x, P(x)$."

Por outro lado, podemos também usar o quantificador "existe algum … tal que" (denotado por $\exists \ldots :$) para indicar que alguma das sentenças de uma fórmula é **V**. Voltando ao nosso exemplo, a sentença

> "$\exists x\colon P(x)$"

recebe o valor da aplicação do conectivo $\vee$ a todas as sentenças da fórmula. Observe que esta sentença pode possuir valor **V** mesmo que alguma pessoa não goste de Matemática (isso se for possível a existência de alguma pessoa que não goste de Matemática...).

Um ponto importante a ser observado é a negação de fórmulas envolvendo quantificadores. Como o quantificador $\forall$ corresponde à aplicação de $\wedge$ a todas as sentenças da fórmula, a sua negação indica que pelo menos uma dessas sentenças é **F**. Por exemplo, as negações de

"Para toda pessoa x, x gosta de Matemática."

"Para todo triângulo, o ângulo oposto ao maior lado é o maior ângulo." (Proposição 19 de Os Elementos de Euclides)

são

"Existe uma pessoa x que não gosta de Matemática."

"Existe um triângulo cujo ângulo oposto ao maior lado não é o maior ângulo."

De maneira similar, a interpretação do quantificador $\exists$ como um $\vee$ das sentenças da fórmula permite visualizar a sua negação como a negação de todas as sentenças. Assim:

$$\neg \exists x : P(x) \;\Leftrightarrow\; \forall x, \neg P(x)$$

$$\neg \forall x : P(x) \;\Leftrightarrow\; \exists x : \neg P(x)$$

Um quantificador que se usa com frequência é $\exists !$. Por exemplo, $\exists ! x : P(x)$, que significa "existe exatamente um x tal que $P(x)$" (ou seja, existe um x que satisfaz $P(x)$ e mais nenhum outro $x' \neq x$ satisfaz $P(x')$).

$$\exists ! x : P(x) \;\Leftrightarrow\; \exists x : P(x) \wedge \forall x', x' \neq x \Rightarrow \neg P(x')$$

Fórmulas podem ser compostas usando conectivos, possivelmente formando fórmulas em mais de uma variável. Por exemplo, se

$Q(y) =$ "y é bom programador"

então podemos definir a fórmula

$R(x, y) = P(x) \vee Q(y)$.

Nesse caso, a sentença $\forall x, \exists y : R(x, y)$ expressa a idéia que todas as pessoas gostam de Matemática ou existe um bom programador (o que, claro, pode também ser escrito como $\forall x, P(x) \vee \exists y : Q(y)$).

Em geral, uma fórmula que contém um quantificador requer a especificação de um *universo*, indicando os valores que a variável (ou variáveis) pode(m) receber. No exemplo acima, se estabelecermos como universo as pessoas que trabalham com Informática, a fórmula

"∀ pessoa x, $P(x)$"

significa "Toda pessoa que trabalha com Informática gosta de Matemática." (que possui, obviamente, valor **V**!).
