From ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização

Manuscritos: Sentenças e Operações Lógicas

Para os propósitos deste livro, faremos uso de alguns conceitos de Lógica Clássica, conceitos esses apresentados a seguir. Uma *sentença lógica* (ou, simplesmente, *sentença*), ou *proposição*, é uma afirmação não ambígua sobre qualquer assunto, à qual podemos atribuir um único dos dois seguintes valores lógicos: *verdadeiro* (ou **V**) ou *falso* (também escrito **F**). Exemplos de sentenças são:

> "A palavra `abracadabra` tem mais `a`'s do que `r`'s."
>
> "Há alunos de Matemática Discreta que se interessam por Arqueologia."
>
> "Todos os alunos de Informática estudam Matemática Discreta."
>
> "Não existem alunos de Biologia interessados em Informática."
>
> "Todo número par é divisível por 2."

Observe que, conforme previsto na definição apresentada acima, todas as sentenças citadas podem receber valores lógicos **F** ou **V**. Pode-se observar também que cada uma dessas sentenças trata de um assunto diferente. Vale destacar a sentença "Todo número par é divisível por 2", pois trata-se de uma afirmação matemática. Ao longo deste livro, apresentaremos diversas outras afirmações matemáticas, e para cada uma delas verificaremos o seu valor lógico. Algumas terão o valor lógico atribuído arbitrariamente, outras terão o valor lógico derivado de outras afirmações, ou seja, "demonstraremos" que possuem valor lógico **V**. Porém, antes de entrar nessas demonstrações, continuaremos com a apresentações de alguns outros conceitos de lógica matemática.

Uma sentença pode ser a *negação* de outra sentença, o que siginifica que o valor lógico da primeira é o oposto do valor lógico da segunda. Por exemplo, as sentenças

> "A palavra `abracadabra` tem pelo menos tantos `r`'s quanto `a`'s."
>
> "Nenhum aluno de Matemática Discreta se interessa por Arqueologia."
>
> "Nenhum aluno de Informática estuda Matemática Discreta."
>
> "Há alunos de Biologia interessados em Informática."
>
> "Existe um número par que não é divisível por 2."

São as negações das sentenças anteriores. É possível observar que cada uma delas possui um valor lógico oposto à sentença original correspondente. Uma sentença não pode ter o mesmo valor lógico que a sua negação. Sendo assim, a sentença

"Há alunos de Matemática Discreta que não se interessam por Arqueologia."

não é a negação de

"Há alunos de Matemática Discreta que se interessam por Arqueologia."

pois ambas as sentenças podem receber o mesmo valor lógico simultaneamente. De uma forma geral, se P é uma sentença, então a negação de P é a sentença que pode ser expressa na forma "O valor lógico de P é **F**". Usamos a notação $\neg P$ para denotar a negação de P.

Sentenças Compostas

As sentenças lógicas permeiam toda teoria matemática, nas quais sentenças simples são combinadas para formar *sentenças compostas*, cujos valores lógicos também podem ser determinados. Se uma sentença pode receber um valor lógico arbitrariamente, o mesmo não acontece com uma sentença composta pois o seu valor depende dos valores das sentenças que a compõem e das regras que regem a composição de sentenças. Uma forma de obter sentenças compostas é com o uso dos conectivos E (usaremos alternativamente o símbolo $\wedge$) e OU (usaremos alternativamente o símbolo $\vee$) para compor sentenças mais longas a partir das sentenças simples. Vejamos como essa composição pode ser feita. Sejam P e Q duas sentenças simples arbitrárias. Podemos compô-las da seguinte forma:

"$P \wedge Q$", que significa o mesmo que "P E Q"

"$P \vee Q$", que significa o mesmo que "P OU Q"

O valor lógico de uma sentença composta depende dos conectivos usados e dos valores lógicos das sentenças simples que a compõem. No caso do conectivo $\wedge$, como em "$P \wedge Q$", o valor da sentença composta é **V** se todas as sentenças simples que a compõem são verdadeiras, e **F** em caso contrário. Em outras palavras, para o exemplo "$P \wedge Q$", ambas as sentenças P e Q devem possuir valor **V** para que o todo seja verdade. Por outro lado, o valor da sentença composta com $\vee$ é **V** se pelo menos uma das sentenças simples que a compõem é **V**. Dito de outra forma, somente se ambas P e Q forem **F**, o todo será **F**.

Tabela Verdade

Os valores lógicos que uma sentença composta pode possuir, em função dos valores lógicos das sentenças simples, podem ser expressas através de uma *tabela verdade*. Nas **tabelas verdade para as sentenças compostas** $P \wedge Q$ **e** $P \vee Q$. Como é usual, os conectivos de uma sentença composta são aplicados às sentenças simples que a compõem na ordem em que aparecem, da esquerda para a direita. Nesse exemplo, vemos que para cada um dos conectivos $\wedge$ e $\vee$, aplica-se o único conectivo da sentença composta, o que exige que, primeiramente, as sentenças P e Q sejam avaliadas. Também seguindo a convenção usual, parênteses podem ser usados para alterar essa ordem. Vários exemplos aparecerão em seguida, começando pela **tabela-verdade da fórmula ($P \vee Q$) ∧ ($\neg P \vee R$)**. Observe nos comentários a seguir que ($P \vee Q$) e ($\neg P \vee R$) devem ser avaliadas separadamente, em obediência à ordem imposta pelos parênteses.

P	Q	$P \wedge Q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

P	Q	$P \vee Q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

Figura Tabelas verdade para as sentenças compostas $P \wedge Q$ e $P \vee Q$

Dada uma sentença composta qualquer, podemos atribuir o valor **V** ou **F** a cada uma das sentenças simples e verificar quais as atribuições que tornam a sentença composta **V** ou **F**, como mostrado na **tabela verdade para a sentença ($P \vee Q$) ∧ ($\neg P \vee R$)**. Nesse exemplo, basta que P e R sejam **V** para que a sentença composta seja **V**, não importando o valor de R. Por outro lado, basta que P e Q sejam **F** para que a sentença composta seja **F**. Dizemos que uma sentença composta R é *satisfatível* quando existe uma atribuição de valores lógicos às sentenças simples que a compõem de tal forma que R seja **V**. Se, ao contrário, uma tal atribuição não existir, então a sentença R é *insatisfatível*.

P	Q	R	$P \vee Q$	$\neg P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**

Figura Tabela-verdade para a sentença composta ($P \vee Q$) ∧ ($\neg P \vee R$)

Em princípio, seria possível certificar se a sentença composta S é ou não satisfatível procurando por uma linha da tabela-verdade contendo **V** na coluna de S. Caso tal linha exista, S é satisfatível. Caso contrário, S é insatisfatível. Aplicar esse método é certamente um exercício simples se S possuir 2 ou 3 sentenças simples. Sugerimos ao leitor refletir sobre se continuaria sendo factível se o número de sentenças simples em S for 50 ou 100.