

Matemática Discreta
Lista de exercícios 3

Cada $\surd$ denota um nível de dificuldade: $\surd$ fácil, $\surd\surd$ médio e $\surd\surd\surd$ difícil.

$\surd\surd$ 1. (**recorrências**) Resolva as seguintes recorrências:

- (a) $a_n = a_{n-1} + 7$, $a_0 = 13$;
- (b) $a_n = 5 \cdot a_{n-1} + 3$, $a_0 = 8$;
- (c) $a_n = 5 \cdot a_{n-1} - 6 \cdot a_{n-2}$, $a_0 = 2$, $a_1 = 5$;
- (d) $a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 4 \cdot a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$;
- (e) $a_n = 5 \cdot a_{n-1} - 6 \cdot a_{n-2} + 6$, $a_0 = 5$, $a_1 = 8$;

$\surd\surd$ 2. (**recorrências**) Seja $n = 3^k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Resolva a seguinte relação de recorrência: $T(n) = T(n/3) + 17$, $T(1) = 29$.

$\surd\surd\surd$ 3. (**recorrências**) Assumindo que n é uma potência de 2, resolva a seguinte relação de recorrência e depois prove a corretude por indução:

$$\begin{aligned}T(n) &= 6 \cdot T(n/2) - 8 \cdot T(n/4), \text{ se } n > 2 \\T(1) &= 2 \\T(2) &= 6\end{aligned}$$

(**Dica:** é possível obter uma recorrência de 2° ordem para nos ajudar. Para isso, substitua n por 2^k na recorrência)

$\surd$ 4. (**inclusão e exclusão**) Em um grupo de 155 alunos, 84 possuem computador pessoal, 100 possuem endereço eletrônico, 30 possuem página pessoal, 54 têm computador pessoal e endereço eletrônico, 15 têm computador e página pessoais, 8 possuem endereço eletrônico e página pessoal, e 3 alunos têm computador pessoal, endereço eletrônico e página pessoal. Responda as seguintes perguntas usando o Princípio da Inclusão e Exclusão:

- (a) Quantos alunos têm apenas endereço eletrônico?
- (b) Quantos alunos não possuem nenhum dos 3 itens?
- (c) Quantos alunos têm computador e homepage, mas não tem email?

$\surd\surd$ 5. (**inclusão/exclusão**) Quantos inteiros de 1 a 100.000 não são divisíveis por 2, 3, 5, 7, 11 ou 13?

$\surd\surd$ 6. (**casa dos pombos**) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \subseteq \{0, 1, \dots, 2n - 1\}$. Mostre que se $|A| = n + 2$, então existem $a \in A$ e $a' \in A$, $a \neq a'$, tais que $a + a' = 2n$.

$\surd\surd\surd$ 7. (**casa dos pombos**) Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, e $A \subseteq \mathbb{N}$. Prove cada uma das afirmações a seguir.

- (a) se $|A| = n + 1$, então existem $a \in A$ e $a' \in A$, $a \neq a'$, tais que $a - a'$ é divisível por n .
- (b) se $|A| = n + 2$, então existem $a \in A$ e $a' \in A$, $a \neq a'$, tais que $(a - a'$ é divisível por $2n$) ou $(a + a'$ é divisível por $2n$).

Observe que $a - a'$ é divisível por n se e somente se $a \bmod n = a' \bmod n$, e que $a + a'$ é divisível por n se e somente se $(a \bmod n) + (a' \bmod n) = n$.

✓✓ **8. (casa dos pombos)** Mostre que, em todo grupo de $n \geq 2$ pessoas, há duas pessoas com o mesmo número de amigos no grupo. Considere que a relação “ser amigo” é simétrica mas não é reflexiva.

✓ **9. (permutações)** Se enumerarmos todas as permutações dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 em ordem crescente, então:

- (a) que posição ocupa o número 42513? (b) qual número ocupa a posição 73?

✓ **10. (combinações)** Quantos são os subconjuntos de k elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$ nos quais:

- (a) 1 aparece? (b) 1 não aparece? (c) 1 e 2 aparecem?

✓✓ **11. (combinatória)** Considere todos os subconjuntos com 5 elementos de $\{1, 2, \dots, 12\}$. Se ordenarmos todos esses subconjuntos por ordem crescente de índices, em quantos subconjuntos o elemento 8 aparece na posição 3 da sua ordenação?

✓✓ **12. (combinatória)** Quantas são as soluções de:

- (a) $w + x + y + z = 50$, com w, x, y e z números naturais?
 (b) $w + x + y + z = 120$, com w, x, y e z naturais tendo pelo menos um deles é maior que 27?
 (c) $w + x + y + z = 120$, com w, x, y e z naturais tendo pelo menos um deles é maior que 33?

✓✓✓ **13. (combinatória)** Demonstre as seguintes afirmações:

- (a) $\binom{n+p+1}{p} = \sum_{r=0}^p \binom{n+r}{r}$. **Dica:** Stifel e indução em p .
 (b) $\binom{n+p+1}{p+1} = \sum_{r=0}^n \binom{p+r}{p}$ **Dica:** Stifel e indução em n .
 (c) $\binom{n+2}{p+2} = \binom{n}{p} + 2\binom{n}{p+1} + \binom{n}{p+2}$. **Dica:** Escolher $p+2$ pessoas entre n homens e 2 mulheres.
 (d) $\binom{n+k}{p+k} = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \cdot \binom{n}{p+r}$. **Dica:** Escolher $p+k$ pessoas entre n homens e k mulheres.

✓✓ **14. (combinatória)** Determine o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{99} \quad \text{e} \quad \left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{100}$$

✓✓ **15. (probabilidade)** Fazemos um jogo semelhante ao de Monty-Hall. Um participante deve escolher uma porta entre 4 portas possíveis. Atrás de uma delas existe um prêmio. (a) Após fazer sua escolha, o apresentador abre 1 porta não escolhida e que não possui o prêmio, e pergunta se o participante deseja mudar sua escolha. O que ele deve fazer? Justifique. (b) E se houvessem 5 portas e o apresentador abrisse duas portas sem o prêmio? Justifique.

✓✓ **16. (probabilidade)** Um experimento consiste em lançar 5 dados. Dizemos que o experimento foi um sucesso se pelo menos 2 dados tiveram valor 6. Desejamos repetir experimentos até obter um sucesso. (a) Qual a probabilidade de ter sucesso apenas no 1º experimento? (b) Qual a probabilidade de ter sucesso apenas no 2º experimento? (c) Qual o número esperado de experimentos para se obter o 1º sucesso?