Construção e Análise de Algoritmos (UFC)
TRABALHO FINAL DE CANA
Entrega: **10/Janeiro/2025**
Após esta data, haverá redução em 0.5 ponto da nota por dia de atraso até o prazo final máximo **20/Janeiro/2025**.

O trabalho deve ser entregue por email em um PDF só escrito à mão.

Cada questão abaixo vale 0.5 ponto.

1. Responda e explique cada um dos itens abaixo.

(a) O que é a Classe P?
(b) O que é um certificado de um problema de decisão?
(c) O que é a Classe NP e qual a relação dela com certificados?
(d) Porque se associa a Classe P a problemas fáceis e a classe NP a problemas razoáveis?
(e) O que é um Algoritmo Não-Determinístico?
(f) O que é a Classe co-NP?
(g) O que é uma Redução Polinomial entre dois problemas e para que serve?
(h) O que é a Classe NP-Completa?
(i) O que significa a Questão P=NP? Qual a importância da Classe NP-Completa para essa questão?
(j) O que é o Problema da Parada e qual a sua importância?

2. Para cada uma das afirmações abaixo, diga se ela e *verdadeira*, *falsa*, *verdadeira se P≠NP* ou *falsa se P≠NP*. Dê uma justificativa curta para cada resposta.

(1) Não há problemas em P que são NP-Completos
(2) Existe apenas algoritmo exponencial para o problema da parada
(3) Existem problemas em P que estão em NP e em co-NP
(4) Existem problemas em NP que não estão em P
(5) O Problema da Parada não possui algoritmo polinomial; apenas exponencial
(6) Se A pode ser polinomialmente reduzido a B, e B é NP-Completo, então A é NP-Completo
(7) Se A pode ser polinomialmente reduzido a B, e B $\in$ P, então A $\in$ P
(8) O problema de obter o percurso mínimo do Caixeiro Viajante é NP-Completo
(9) O problema SAT não pertence a Classe P

3. Seja MOCHILA o problema de decidir se, dados inteiros positivos P e V e dado um conjunto S onde cada elemento $s \in S$ possui um peso $p(s)$ e um valor $v(s)$, existe um subconjunto S' de S tal que a soma dos pesos dos elementos de S' seja menor ou igual a P e a soma dos valores dos elementos de S' seja maior ou igual a V. Prove que MOCHILA é NP-Completo. **Dica:** Problema SOMA-SUBC (ou SUBSET-SUM) da soma de subconjuntos.

4. Dizemos que um grafo G esta parcialmente rotulado se alguns de seus vértices possuem um número inteiro como rótulo. Dado um vértice rotulado v de G, seja $r(v)$

o seu rótulo. Seja CAMPO-MINADO o problema de decidir se, dado como entrada um grafo G parcialmente rotulado, G pode ser completamente rotulado de forma que qualquer vértice v com rótulo positivo tenha exatamete $r(v)$ vizinhos com rótulo negativo. Prove que CAMPO-MINADO é NP-Completo. Dica: Imagine rótulos negativos como bombas do campo minado. Tente reduzir 3SAT para este problema: cada variável tendo dois vértices no grafo com um vizinho comum com rótulo igual a 1. Pense nas bombas do campo minado como uma atribuição de Verdadeiro.

5. No seguinte jogo de paciência, é dado um tabuleiro $n \times n$. Em cada uma das suas n^2 posições está colocada uma pedra azul ou uma pedra vermelha ou nenhuma pedra. Você joga removendo pedras do tabuleiro até que cada coluna contenha pedras de uma única cor e cada linha contenha pelo menos uma pedra. Você vence se atingir esse objetivo. Vencer pode ser possível ou não, dependendo da configuração inicial. Seja PACIÊNCIA o problema de decidir se dado um tabuleiro dessa forma como entrada é possível vencer. Prove que PACIÊNCIA é NP-Completo. Dica: Tente reduzir 3SAT para este problema: pense as colunas como variáveis e as linhas como cláusulas. Depois adicione algumas linhas e colunas inóquas para que o tabuleiro fique quadrado.

6. Seja G um grafo e k um inteiro. Seja CLIQUE o problema de decidir se G possui uma clique com k vértices, onde uma clique é um subconjunto de vértices todos ligados entre si. Seja VERTEX-COVER o problema de decidir se G possui um cobertura com k vértices, onde uma cobertura é um subconjunto de vértices tal que toda aresta possui um vértice lá. Mostre uma redução de CLIQUE para VERTEX-COVER.

7. Mostre agora o contrário: uma redução de VERTEX-COVER para CLIQUE.

8. Seja DOMINANTE o problema de decidir se, dado como entrada um grafo G e um inteiro $k > 0$, existe um conjunto D com k vértices de G tal que todo vértice de G está em D ou é adjacente a algum vértice de D. Mostre uma redução de VERTEX-COVER para DOMINANTE.

9. Mostre agora uma redução de 3SAT para DOMINANTE.

10. Seja SET-COVER o problema de decidir se, dado como entrada um inteiro K e uma família de subconjuntos $S_1, \ldots, S_m$ de um conjunto universo U, existem K desses subconjuntos cuja união é igual a U. Mostre uma redução de VERTEX-COVER para SET-COVER.

11. Mostre agora uma redução de DOMINANTE para SET-COVER.

12. Mostre agora uma redução de SET-COVER para DOMINANTE.

13. Seja TRANSVERSAL o problema de decidir se, dado como entrada um inteiro K e uma família de subconjuntos $S_1, \ldots, S_m$ de um conjunto universo U, existe um subconjunto T com K elementos de U tal que todo conjunto S_i contém algum elemento de T. Mostre uma redução de VERTEX-COVER para TRANSVERSAL.

14. Mostre agora uma redução de SET-COVER para TRANSVERSAL.

15. Mostre agora uma redução de TRANSVERSAL para SET-COVER.

16. Seja INDEPENDENTE o problema de decidir se, dado como entrada um grafo G e um inteiro k, o grafo G possui um conjunto independente com k vértices, onde um conjunto independente é um subconjunto de vértices sem nenhuma aresta entre eles. Seja SET-PACKING o problema de decidir se, dado como entrada um inteiro K e uma família de subconjuntos $S_1, \dots, S_m$ de um conjunto universo U, existem K desses subconjuntos sem interseção entre si. Mostre uma redução de SET-PACKING para INDEPENDENTE.

17. Mostre agora uma redução de INDEPENDENTE para SET-PACKING.

18. Seja COR-DIF o problema de decidir se, dado como entrada um conjunto S e uma coleção $C = \{C_1, \dots, C_k\}$ de subconjuntos de S, onde $k > 0$, é possivel colorir os elementos de S com duas cores de forma que nenhum conjunto C_i tenha todos os seus elementos com a mesma cor. Prove que COR-DIF é NP-Completo. **Dica:** Tente reduzir 3SAT para este problema: Crie um conjunto S contendo toda variável e seu complemento. Adicione um elemento especial F a S. Para cada variável, crie um subconjunto C_i contendo apenas ela e seu complemento. Para cada cláusula, crie um subconjunto C_j contendo seus literais e mais o elemento especial F.

19. Dado um grafo G, uma coloração é uma atribuição de cores a seus vértices de forma que vértices adjacentes tenham cores diferentes. Seja 3CORES o problema de decidir se, dado um grafo G como entrada, G pode ser colorido com 3 cores. Mostre que 3CORES é NP-Completo.

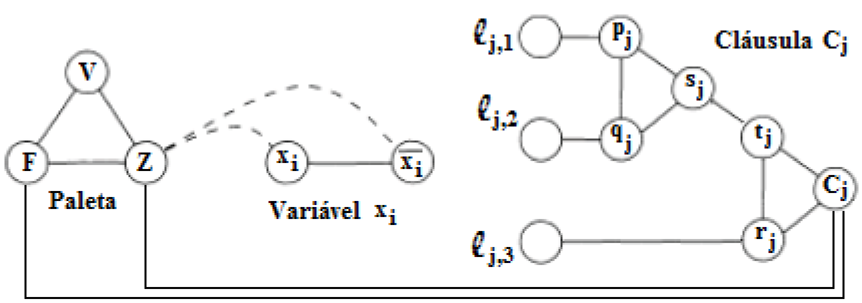

Figura 1. Use essas engrenagens na questão 1

20. Dado um grafo G, um *caminho hamiltoniano* em G é um caminho que passa por todos os vértices exatamente uma vez. Seja CAM-HAM o problema de decidir se um grafo possui ou não um caminho hamiltoniano. Mostre que CAM-HAM é NP-Completo. **Dica:** Obtenha uma redução de 3SAT para CAM-HAM.

21. Dado um grafo G, um **ciclo hamiltoniano** em G é um ciclo que passa por todos os vértices exatamente uma vez. Seja CIC-HAM o problema de decidir se um grafo possui ou não um ciclo hamiltoniano. Mostre que CIC-HAM é NP-Completo. **Dica:** Obtenha uma redução de 3SAT para CIC-HAM.

22. Mostre uma redução polinomial de CAM-HAM para SAT.