Probabilidade e Processos Estocásticos

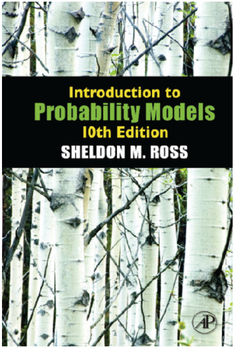
Ementa

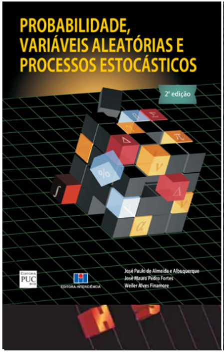
Conceitos básicos de Probabilidade, Esperança e Variância, Leis Fraca e Forte dos Grandes Números, Convergência de Distribuições de Probabilidade e o Teorema Central do Limite, Processos Estocásticos Estacionários e seus Teoremas Ergódicos, Movimento Browniano, Cadeias de Markov, Campos Aleatórios de Markov em Grafos.

Bibliografia

- Sheldon Ross. **Introduction to Probability Models**, AP, 2010.
- S. Ross. **Probability Models for Computer Science**, AP, 2002.
- P. Fernandez. **Introdução a Processos Estocásticos**, IMPA, 2014.
- M. Alencar. **Probabilidade e Processos Estocásticos**, Érica, 2008.
- J. Albuquerque, J. Fortes, W. Finamore. **Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos**, Editora Interciência, 2018.

Probabilidade e Processos Estocásticos - Bibliografia





Próximas aulas

- Resumo das Noções básicas de probabilidade: Independência, Variável aleatória, Esperança, Variância
- Desigualdades clássicas: Markov e Chebyschev
- Aplicação em Probabilidade e Processos Estocásticos interessantes
- Distribuições Discretas: Binomial, Geométrica, HiperGeométrica, Poisson, Binomial Negativa,...
- Aplicações: Problemas do Colecionador de Figurinhas
- E mais: Cadeias de Markov, outros Processos Estocásticos,...

Noções básicas de Probabilidade Discreta

Um **espaço de probabilidade discreto** $(\Omega, \mathbb{P})$ é dado por um conjunto Ω (chamado espaço amostral, finito ou infinito enumerável) e uma função de probabilidade $\mathbb{P} : \Omega \to [0,1]$ tal que $\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1$. Subconjuntos do espaço amostral são chamados de **eventos**.

Exemplo: Lançamento de 1 moeda. Espaço amostral {C,K} com $\mathbb{P}(C) = 1/2$ e $\mathbb{P}(K) = 1/2$.

Exemplo: 2 moedas. Espaço amostral {CC,CK, KC, KK} com probabilidade 1/4 para cada.

Exemplo: Lançamento de 1 dado. Espaço amostral {1,2,3,4,5,6} com probabilidade 1/6 para cada.

Exemplo: Duplas em sala com 4 alunos A,B,C,D. Espaço amostral {AB,AC,AD,BC,BD,CD} com probabilidade 1/6 para cada.

Noções básicas de Probabilidade Discreta

Um **espaço de probabilidade discreto** $(\Omega, \mathbb{P})$ é dado por um conjunto Ω (chamado espaço amostral, finito ou infinito enumerável) e uma função de probabilidade $\mathbb{P} : \Omega \to [0, 1]$ tal que $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1$.
Subconjuntos do espaço amostral são chamados de **eventos**.

Exemplo: Moeda não-viciada até obter uma coroa. Espaço amostral $\{1, 2, \ldots\}$ do número de lançamentos. Determine função de probab.

Solução: $\mathbb{P}(n) = (\frac{1}{2})^{n-1} \cdot (\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^n$ (Distribuição Geométrica)
Note que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$ (soma de PG).

Exemplo: Moeda viciada é lançada até se obter uma coroa, que tem probab. $1/9$. Espaço amostral $\{1, 2, \ldots\}$ do número de lançamentos. Determine a função de probabilidade.

Solução: $\mathbb{P}(n) = (\frac{8}{9})^{n-1} \cdot (\frac{1}{9}) = \frac{1}{8} (\frac{8}{9})^n$ (Distribuição Geométrica)
Note que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8} (\frac{8}{9})^n = \frac{1/9}{1-8/9} = 1$ (soma de PG).

Noções básicas de Probabilidade Discreta

Exemplo: Moeda viciada até obter 4 coroas. Espaço amostral $\{4, 5, \ldots\}$ do número de lançamentos. Determine função de probab.

Solução: $\mathbb{P}(n) \;=\; \binom{n-1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{n-4}$ (Distr Binomial Negativa)

Exemplo: Uma moeda não-viciada é lançada 5 vezes. Qual é a probabilidade de aparecer apenas uma cara? E 2, 3, 4 ou 5 caras?

Solução: Seja C (cara) e K (coroa).
As possibilidades de lançamentos com 1 cara são:
CKKKK, KCKKK, KKCKK, KKKCK, KKKKC:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{número de caras} = 0) &= \tbinom{5}{0}/2^5 = 1/32.\\
\mathbb{P}(\text{número de caras} = 1) &= \tbinom{5}{1}/2^5 = 5/32.\\
\mathbb{P}(\text{número de caras} = 2) &= \tbinom{5}{2}/2^5 = 10/32. \qquad \text{(Distribuição Binomial)}\\
\mathbb{P}(\text{número de caras} = 3) &= \tbinom{5}{3}/2^5 = 10/32\\
\mathbb{P}(\text{número de caras} = 4) &= \tbinom{5}{4}/2^5 = 5/32.\\
\mathbb{P}(\text{número de caras} = 5) &= \tbinom{5}{5}/2^5 = 1/32.
\end{aligned}
$$

Probabilidade Condicional

Probabilidade de um evento A dado que ocorreu um evento B:

$$\mathbb{P}(A \mid B) \;=\; \frac{\mathbb{P}(A \;\cap\; B)}{\mathbb{P}(B)}, \quad \text{se} \;\; \mathbb{P}(B) > 0$$

Exemplo: Qual a probabilidade de se obter 3 caras em 5 lançamentos, considerando que nos dois primeiros só teve 1 cara?
As possibilidades são:
CKCCK, CKCKC, CKKCC, KCCCK, KCCKC, KCKCC:

$$\frac{6}{2 \cdot 8} = \frac{3}{8} \qquad = \qquad \frac{2/4 \cdot 3/8}{16/32}$$

Eventos A e B são **independentes** se $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.
Conclusão: $\mathbb{P}(A \cap B) \;=\; \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$.

Probabilidade Condicional

Probabilidade de um evento A dado que ocorreu um evento B:

$$\mathbb{P}(A \mid B) \; = \; \frac{\mathbb{P}(A \; \cap \; B)}{\mathbb{P}(B)}, \quad \text{se} \;\; \mathbb{P}(B) > 0$$

Caso geral: $\mathbb{P}(A \cap B) \; = \; \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A)$.
Caso geral: $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \; = \; \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(C|A, B)$.
Caso mais geral:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) \; = \; \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3|A_1, A_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_k|A_1, \ldots, A_{k-1})$$

Variável Aleatória Discreta

Uma **variável aleatória (v.a.)** de um espaço de probabilidade discreto $(\Omega, \mathbb{P})$ é uma função $X : \Omega \to \mathbb{R}$ que associa um valor real a cada elemento do espaço amostral Ω.

Exemplo: 3 moedas; v.a. X conta o número de caras.
$X(KKC) = 1$, $X(CCK) = 2$.

Probabilidade de uma v.a.: Escrevemos $\mathbb{P}(X \in S)$ para $S \subseteq \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \in S) \; = \; \mathbb{P}(X^{-1}(S)) \; = \; \sum_{\omega \in X^{-1}(S)} \mathbb{P}(\omega).$$

Exemplo: 3 moedas; v.a. X conta o número de caras.
$\mathbb{P}(X \geq 2) = \mathbb{P}(\{CCK, CKC, KCC, CCC\}) = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$.

Observação: A maioria das variáveis aleatórias usadas aqui serão do tipo $X : \Omega \to \mathbb{N}$. Nesse caso, $\sum_{x=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = x) = 1$

Distribuição de Probabilidade Conjunta

Dadas duas v.a. X e Y de um espaço de probabilidade discreto $(\Omega, \mathbb{P})$, escrevemos $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B)$ como a probabilidade de $X \in A$ e $Y \in B$.

X e Y são **independentes** se, para quaisquer conjuntos A e B:
$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B)$.

Exemplo: 3 moedas. v.a.'s X (num caras), Y (num coroas), Z (num caras nos 2 primeiros lançamentos) e W (num caras no último).

$$\mathbb{P}(X = 2, Y = 0) = 0 \neq \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{8}$$ X e Y não são independentes

$$\mathbb{P}(X = 3, Z = 1) = 0 \neq \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{4}$$ X e Z não são independentes

$$\mathbb{P}(Z = 0, W = w) = \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$$ Analogamente para $Z = 2$

$$\mathbb{P}(Z = 1, W = w) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$ Logo Z e W são independentes

Valor esperado, Esperança ou Média $\mathbb{E}(X)$

v.a. discreta X: $$\mathbb{E}(X) = \sum_x x \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

Média dos valores de X, ponderada pela probabilidade de cada valor.

Ex: valor X de 1 dado: $\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$

Ex: num caras em 3 moedas: $\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1.5$

v.a.'s discretas X e Y: $$\mathbb{E}(XY) = \sum_{x,y} x \cdot y \cdot \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

Se X e Y são independentes, então: (a volta nem sempre vale)

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_x x \sum_y y \cdot \mathbb{P}(X = x) \cdot \mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$$

Ex: $\mathbb{E}(XY) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 0 \cdot \frac{1}{8} = 1.5 \neq 1.5^2 = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$

Linearidade da Esperança $\mathbb{E}(X)$

v.a. discreta X, função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $$\mathbb{E}(g(X)) \;=\; \sum_x g(x) \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

$$\mathbb{E}(aX + b) \;=\; \sum_x (ax + b) \cdot \mathbb{P}(X = x) \;=\; a \cdot \mathbb{E}(X) + b$$

Linearidade da Esperança: $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

Prova:

$$\mathbb{E}(X + Y) \;=\; \sum_x \sum_y (x + y) \cdot \mathbb{P}(X = x, Y = y) =$$

$$= \sum_x x \cdot \sum_y \mathbb{P}(X = x, Y = y) \;+\; \sum_y y \cdot \sum_x \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

$$= \sum_x x \cdot \mathbb{P}(X = x) \;+\; \sum_y y \cdot \mathbb{P}(Y = y) \;=\; \mathbb{E}(X) \;+\; \mathbb{E}(Y) \qquad \square$$

Observação: Para variáveis contínuas, vale o mesmo (trocando somatórios por integrais).

Variância $\mathbb{V}ar(X)$, Desvio padrão $\sigma(X)$ e Covariância

Medidas para avaliar o quanto uma v.a. X desvia de sua média.

$$Var(X) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))^2\Big) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X). \qquad \sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}ar(X)}$$

$$\mathbb{V}ar(a \cdot X + b) \;=\; a^2 \cdot \mathbb{V}ar(X) \quad \text{e} \quad \sigma(a \cdot X + b) = a \cdot \sigma(X)$$

Ex: valor X de 1 dado:
$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6} = 15.2.$
$\mathbb{V}ar(X) = 15.2 - 3.5^2 = 2.92.$ $\qquad \sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}ar(X)} = 1.71.$

Covariância de v.a. X e Y: $\mathbb{C}ov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y).$
Logo, se X e Y são independentes, então $\mathbb{C}ov(X, Y) = 0.$ (a volta não vale)

Propriedades da Covariância: $\mathbb{C}ov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$

- $\mathbb{C}ov(X, X) = Var(X)$
- $\mathbb{C}ov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $\mathbb{C}ov(a \cdot X, Y) = a \cdot \mathbb{C}ov(X, Y)$
- $\mathbb{C}ov(X, Y + Z) = Cov(X, Y) + Cov(X, Z)$

Variância $\mathbb{V}ar(X)$ e Covariância $\mathbb{C}ov(X,Y)$

Propriedades da Covariância: $\mathbb{C}ov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)$

- $\mathbb{C}ov(X,X) = Var(X)$
- $\mathbb{C}ov(X,Y) = Cov(Y,X)$
- $\mathbb{C}ov(a\cdot X,Y) = a\cdot\mathbb{C}ov(X,Y)$
- $\mathbb{C}ov(X,Y+Z) = Cov(X,Y) + Cov(X,Z)$

$$\mathbb{C}ov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\ ,\ \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathbb{C}ov(X_i,Y_j)$$

$$\mathbb{V}ar\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \mathbb{C}ov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\ ,\ \sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{C}ov(X_i,X_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{C}ov(X_i,X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\mathbb{C}ov(X_i,X_j) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}ar(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\mathbb{C}ov(X_i,X_j)$$

Se $X_1,\ldots,X_n$ são independentes, então: $\mathbb{V}ar(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}ar(X_i)$.

Variância, Desvio Padrão e Covariância

Propriedades da Covariância: $\mathbb{C}ov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)$

- $\mathbb{C}ov(X,X) = Var(X)$
- $\mathbb{C}ov(X,Y) = Cov(Y,X)$
- $\mathbb{C}ov(a\cdot X,Y) = a\cdot\mathbb{C}ov(X,Y)$
- $\mathbb{C}ov(X,Y+Z) = Cov(X,Y) + Cov(X,Z)$

$$\mathbb{C}ov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\ ,\ \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathbb{C}ov(X_i,Y_j)$$

$$\mathbb{V}ar\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}ar(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\mathbb{C}ov(X_i,X_j)$$

Se $X_1,\ldots,X_n$ são independentes, então: $\mathbb{V}ar(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}ar(X_i)$.

Desigualdades de Markov e Chebyshev

Markov: v.a. $X \geq 0$, $a > 0$, $\alpha > 1$:

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a} \qquad \textit{ou} \qquad \mathbb{P}(X \geq \alpha \cdot \mathbb{E}(X)) \leq \frac{1}{\alpha}$$

Prova:

- $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = k) \geq \sum_{k=a}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = k) \geq$
- $\mathbb{E}(X) \geq a \cdot \sum_{k=a}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = a \cdot \mathbb{P}(X \geq a)$ $\square$

Chebyshev: v.a. X, $b > 0$, $\beta > 1$:

$$\mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}(X)\right| \geq b\right) \leq \frac{\mathbb{V}ar(X)}{b^2} \qquad \textit{ou} \qquad \mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}(X)\right| \geq \beta \cdot \sigma(X)\right) \leq \frac{1}{\beta^2}$$

Prova:

$$\mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}(X)\right| \geq b\right) = \mathbb{P}\left((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq b^2\right) \leq \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}{b^2} = \frac{\mathbb{V}ar(X)}{b^2}$$

Distribuições Discretas: Bernoulli(p) e Binomial(n, p)

$X \sim Bernoulli(p)$: **1 (sucesso) com prob p, e 0 com prob $1-p$.**

$\mathbb{P}(X=1) = p$ e $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$. $\quad \mathbb{E}(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) \; = \; p$.

$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \mathbb{E}(X) - p^2 = p - p^2 = p(1-p)$.

$X \sim Binomial(n, p) = \sum_{i=1}^{n} Bernoulli(p)$: **número de sucessos (de probabilidade p) em n experimentos independentes.**

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) = (p+1-p)^n = 1.$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \; = \; n \cdot p,$$

pois $X = \sum_{i=1}^{n} Bernoulli(p)$ e portanto $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = n \cdot p$ e

$\mathbb{V}ar(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}ar(X_i) \; = \; n \cdot p \cdot (1-p)$ (pois os X_i's são independentes entre si).

Distribuições Discretas: Bernoulli(p) e Binomial(n, p)

Aplicação: n moedas não-viciadas lançadas. Seja X o número de caras.
$X \sim Binomial(n, \frac{1}{2})$, $\mathbb{E}(X) = n/2$ e $\mathbb{V}ar(X) = n \cdot \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) = n/4$.

Markov: $\mathbb{P}(X \geq 3n/4) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{3n/4} = \frac{n/2}{3n/4} = \frac{2}{3}$ **(ruim)**

Chebyshev: $\mathbb{P}(X \geq 1.5\frac{n}{2}) \leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 0.5\frac{n}{2}) \leq \frac{\mathbb{V}ar(X)}{(n/4)^2} = \frac{4}{n}$. **(bom)**

Chebyshev: $\mathbb{P}(X \geq 1.1\frac{n}{2}) \leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 0.1\frac{n}{2}) \leq \frac{\mathbb{V}ar(X)}{(0.1 \cdot n/2)^2} = \frac{100}{n}$.

Chebyshev: $\mathbb{P}(X \geq 1.01\frac{n}{2}) \leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 0.01\frac{n}{2}) \leq \frac{\mathbb{V}ar(X)}{(0.01 \cdot n/2)^2} = \frac{10000}{n}$.

Chebyshev: $\mathbb{P}(X \geq \frac{n+\sqrt{n}}{2}) \leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \frac{\sqrt{n}}{2}) \leq \frac{\mathbb{V}ar(X)}{(\sqrt{n}/2)^2} = 1$. **(ruim)**

Nas próximas aulas, veremos outras distribuições clássicas e desigualdades mais fortes, como a de Chernoff.

Distribuições Discretas: Geométrica(p)

$X \sim Geom(p)$: **Num experimentos indep até 1 sucesso (de prob p).**

$\mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}$. $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{para } 0 < x < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) \cdot x^{n-2} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p(1-p)^{n-1} = p \cdot \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \mathbb{P}(X = n) = \frac{2p(1-p)}{p^3} + \frac{p(1-p)}{(1-p)p^2} = \frac{2-p}{p^2}$$

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Distribuições Discretas: Binomial Negativa(k, p)

$X \sim BN(k, p)$: **Num experimentos indep até k sucessos (de prob p).**
$\mathbb{P}(X = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$.

v.a. $X \sim BN(k, p)$ pode ser vista como $X = \sum_{i=1}^{k} X_i$: a soma de k v.a. $X_i \sim Geom(p)$. Ou seja, $BN(k, p) = \sum_{i=1}^{k} Geom(p)$.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}(X_i) \;=\; k \cdot \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{V}ar(X) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{V}ar(X_i) \;=\; k \cdot \frac{1-p}{p^2}$$

Problema do Colecionador de Cupons/Figurinhas

Álbum com n diferentes tipos de figurinhas. Cada figurinha comprada tem probabilidade igual para ser de qualquer tipo. Determinar esperança e variância do número de figurinhas compradas para encher o álbum.

Seja v.a. X esse número. Seja X_i o número a comprar até obter uma nova figurinha, dado que já possui i figurinhas.

$X = \sum_{i=0}^{n-1} X_i$, onde $X_i \sim Geom(\frac{n-i}{n})$. X é semelhante à Binomial Negativa.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(X_i) \; = \; \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n}{n-i} = n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx n \ln n + 0.5772 \cdot n + \frac{1}{2},$$

pois $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + 0,5772 + \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$. Ademais, $0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \leq 1$.

$$\mathbb{V}ar(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{V}ar(X_i) \; = \; n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{(n-i)^2} = n \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{k^2} = n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\mathbb{V}ar(X) = n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx n^2 \frac{\pi^2}{6} - n \ln n - 0,5772 \cdot n - \frac{1}{2},$$

pois $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Problema do Colecionador de Cupons/Figurinhas

Álbum com n diferentes tipos de figurinhas. Cada figurinha comprada tem probabilidade igual para ser de qualquer tipo. Determinar esperança e variância do número X de figurinhas compradas para encher o álbum.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n}{n-i} = n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx n \ln n + 0,5772 \cdot n + \frac{1}{2}.$$

$$\mathbb{V}ar(X) = n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx n^2 \cdot \frac{\pi^2}{6} - n \cdot \ln n - 0,5772 \cdot n - \frac{1}{2}.$$

Exemplo: Álbum da copa: $n = 680$ figurinhas.
$\mathbb{E}(X) = 4828.03 \approx 4828.02,$ $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}ar(X)} = 869.0 \approx 869.4.$

Exercício: (a) Implementar simulação do problema do colecionador de figurinhas para $n = 680$, repetir 5000 vezes obtendo o número de figurinhas compradas até preencher o álbum, calcular média e desvio padrão. (b) Fazer o mesmo considerando a venda em pacotes de 5 figurinhas diferentes entre si. (c) Fazer gráficos das distribuições dos itens (a) e (b) obtidas nas simulações.

Problema do Colecionador de Cupons/Figurinhas - 2

Álbum com n diferentes tipos de figurinhas. Comprando k figurinhas com álbum vazio, determinar esperança e variância do número de figurinhas no álbum.

Seja v.a. $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ esse número, onde $X_i = 1$, se a figurinha i foi comprada, e 0 c.c.

$\mathbb{P}(X_i = 0) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$ e $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k$

$X_i \sim Bernoulli\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)$ (não independentes entre si)

$\mathbb{E}(X_i) = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k$ e $\mathbb{V}ar(X_i) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)$

$\mathbb{E}(X) = n \cdot \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)$. Exemplo: $n = k = 680 \Rightarrow \mathbb{E}(X) = 430$

Para $k = c \cdot n$, temos: $\mathbb{E}(X) = n \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n \cdot c}\right) \approx n \cdot \left(1 - \frac{1}{e^c}\right)$,
pois $lim_{n\to\infty}(1 + \frac{\alpha}{n})^n = e^{\alpha}$. Exemplo: $n = k = 680 \Rightarrow \mathbb{E}(X) = 430$

Problema do Colecionador de Cupons/Figurinhas - 2

Álbum com n diferentes tipos de figurinhas. Comprando k figurinhas com álbum vazio, determinar esperança e variância do número de figurinhas no álbum.

v.a. $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ esse número, onde $X_i = 1$, se a figurinha i foi comprada, e 0 c.c.

$\mathbb{P}(X_i = 0) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$ $\qquad X_i \sim \mathit{Bernoulli}\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)$

$\mathbb{E}(X) = n \cdot \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)$. $\qquad$ Exemplo: $n = k = 680 \;\Rightarrow\; \mathbb{E}(X) = 430$

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{V}ar\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}ar(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{C}ov(X_i, X_j)$$

$\mathbb{C}ov(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_iX_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)$. $\qquad \mathbb{E}(X_iX_j) = \mathbb{P}(X_iX_j = 1) = \mathbb{P}(A_i \cap A_j)$

$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A_i \cap A_j}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A_i} \cup \overline{A_j}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A_i}) - \mathbb{P}(\overline{A_j}) + \mathbb{P}(\overline{A_i} \cap \overline{A_j})$

$\mathbb{E}(X_iX_j) = 1 - 2\left(\frac{n-1}{n}\right)^k + \left(\frac{n-2}{n}\right)^k$

$$\mathbb{C}ov(X_i, X_j) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^k - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2k}$$

Problema do Colecionador de Cupons/Figurinhas - 2

Álbum com n diferentes tipos de figurinhas. Comprando k figurinhas com álbum vazio, determinar esperança e variância do número de figurinhas no álbum.

Seja v.a. $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ o número, onde $X_i = 1$, se a figurinha i foi comprada, e 0 c.c.

$\mathbb{P}(X_i = 0) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$ e $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k$

$X_i \sim Bernoulli\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)$ (não independentes entre si)

$\mathbb{E}(X_i) = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k$ e $\mathbb{V}ar(X_i) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)$

$\mathbb{E}(X) = n \cdot \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)$. Exemplo: $n = k = 680 \Rightarrow \mathbb{E}(X) = 430$

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{V}ar\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}ar(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{C}ov(X_i, X_j)$$

$$\mathbb{C}ov(X_i, X_j) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^k - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2k}$$

$$\mathbb{V}ar(X) = n\left(\frac{n-1}{n}\right)^k\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right) + n(n-1)\left(\left(\frac{n-2}{n}\right)^k - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2k}\right)$$

$$\mathbb{V}ar(X) = n\left(\frac{n-1}{n}\right)^k + n(n-1)\left(\frac{n-2}{n}\right)^k - n^2\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2k}$$

Problema do Colecionador de Cupons/Figurinhas - 2

Álbum com n diferentes tipos de figurinhas. Comprando k figurinhas com álbum vazio, determinar esperança e variância do número de figurinhas no álbum.

Seja v.a. $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ o número, onde $X_i = 1$, se a figurinha i foi comprada, e 0 c.c.

$\mathbb{P}(X_i = 0) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$ e $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k$

$X_i \sim Bernoulli\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)$ (não independentes entre si)

$\mathbb{E}(X_i) = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k$ e $\mathbb{V}ar(X_i) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)$

$$\mathbb{E}(X) = n \cdot \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right) \approx n \cdot \left(1 - \frac{1}{e}\right) \qquad \text{(para } k = n \text{ grande).}$$

$$\mathbb{V}ar(X) = n\left(\frac{n-1}{n}\right)^k + n(n-1)\left(\frac{n-2}{n}\right)^k - n^2\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2k} \approx n \cdot \left(\frac{1}{e} - \frac{2}{e^2}\right)$$

Exemplo: $n = k = 680$: $\mathbb{E}(X) = 430$, $\mathbb{V}ar(X) = 66.1$, $\sigma(X) = \sqrt{66.1} = 8.13$

Exercício: (a) Implementar simulação do problema do colecionador de figurinhas-2 para $n = k = 680$, repetir 5000 vezes obtendo o número de figurinhas novas no álbum, calcular média e desvio padrão. (b) Fazer o mesmo considerando a venda em pacotes de 5 figurinhas diferentes entre si. (c) Fazer gráficos das distribuições dos itens (a) e (b) obtidas nas simulações.

Distribuições Discretas: HiperGeométrica(N, K, n)

$X \sim HiperGeom(N, K, n)$: **Número de sucessos em n retiradas (sem reposição) de uma população de tamanho N com K sucessos.**

$$\mathbb{P}(X = k) \;=\; \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}. \qquad \sum_{k=0}^{K} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{K} \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = 1 \;\; \text{(Vandermonde)}$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{K} k \cdot \mathbb{P}(X = k) = \frac{nK}{N} \sum_{k=1}^{K} \frac{\binom{K-1}{k-1}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N-1}{n-1}} = \frac{nK}{N} \sum_{\ell=0}^{K-1} \frac{\binom{K-1}{\ell}\binom{N-1-(K-1)}{n-1-\ell}}{\binom{N-1}{n-1}} = \frac{nK}{N}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{K} k^2 \cdot \mathbb{P}(X = k) = \ldots \text{ contas } \ldots = \frac{nK(n-1)(K-1)}{N(N-1)} + \frac{nK}{N}$$

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \frac{nK(n-1)(K-1)}{N(N-1)} + \frac{nK}{N} - \left(\frac{nK}{N}\right)^2 = \frac{nK(N-K)}{N^2} \cdot \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Distribuições Discretas: Poisson(λ)

$X \sim Poisson(\lambda)$: **Aproximação útil p/** $Binomial(n, p)$ **quando** $\lambda = np$ **tende a uma constante para** n **muito grande (e** p **muito pequeno).** Também mede número de sucessos. Exemplo: Número de meteoritos com mais de 1m de diâmetro que atingem a Terra por ano.

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}. \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{K} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = 1 \quad \text{(Taylor p/ exp)}$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = k) = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{\ell}}{\ell!} = \lambda$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \mathbb{P}(X = k) = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \text{...contas...} = \lambda^2 + \lambda$$

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda$$

Aproximação: Considere $n \to \infty$, $p \to 0$ e $np \to \lambda$ constante.

$$\mathbb{P}(Bin(n, p) = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \to \frac{n^k}{k!} \cdot p^k (1-p)^n$$

$$\mathbb{P}(Bin(n, p) = k) \to \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \to \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} = \mathbb{P}(Poisson(\lambda) = k)$$

Paradigma de Poisson

Poisson é aproximação útil para Binomial mesmo se experimentos de Bernoulli têm probabilidades diferentes p_i (mas pequenas) e são fracamente dependentes. Nesse caso, $\lambda = \sum_{i=1}^{n} p_i$.

Exemplo: Menor n para que seja mais provável encontrar 2 pessoas com mesmo aniversário do que o contrário.

Solução 1: Probabilidade de todos diferentes:
$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right) \leq \frac{1}{2} \;\; \Rightarrow \;\; n \geq 23$.

Solução 2: Poisson: v.a. $X_{i,j} = 1$ se pessoas i e j tem mesmo aniversário. $X_{i,j}$ são fracamente dependentes. São $\binom{n}{2}$ experimentos de Bernoulli com probabilidade $\frac{1}{365}$. **Assim:** $\lambda = \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{365}$.

$$\mathbb{P}\left(\sum X_{i,j} = 0\right) \approx \mathbb{P}(Poisson(\lambda) = 0) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^0}{0!} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow n(n-1) \geq 730 \ln 2 = 506$$

Portanto $n \geq 23$.

Paradigma de Poisson

Poisson é aproximação útil para Binomial mesmo se experimentos de Bernoulli têm probabilidades diferentes p_i (mas pequenas) e são fracamente dependentes. Nesse caso, $\lambda = \sum_{i=1}^{n} p_i$.

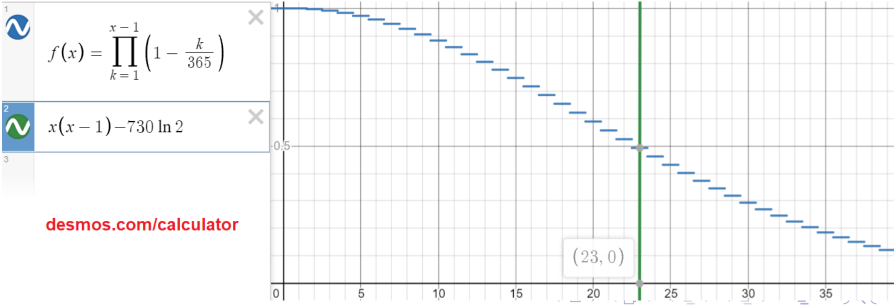
Exemplo: Menor n para que seja mais provável encontrar 2 pessoas com mesmo aniversário do que o contrário.

Solução 1: Probabilidade de todos diferentes: $\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{365}\right) \leq \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; n \geq 23$.

Solução 2: Poisson: v.a. $X_{i,j} = 1$ se pessoas i e j tem mesmo aniversário. $X_{i,j}$ são fracamente dependentes. São $\binom{n}{2}$ experimentos de Bernoulli com probabilidade $\frac{1}{365}$. **Assim:** $\lambda = \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{365}$.

$$\mathbb{P}\left(\sum X_{i,j} = 0\right) \approx \mathbb{P}(Poisson(\lambda) = 0) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^0}{0!} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow n(n-1) \geq 730 \ln 2 = 506$$

Portanto $n \geq 23$.



Distribuições Discretas: Uniforme$\{a, b\}$

$X \sim Unif\{a, b\}$ p/ $a, b \in \mathbb{Z}$: X **é número inteiro entre** a **e** b**, inclusive, todos com a mesma probabilidade** $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{b-a+1}$**.**

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=a}^{b} k \cdot \mathbb{P}(X = k) \;=\; \frac{(b+a)(b-a+1)}{2(b-a+1)} \;=\; \frac{b+a}{2}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=a}^{b} k^2 \cdot \mathbb{P}(X = k) \;=\; \frac{b(b+1)(2b+1)}{6(b-a+1)} - \frac{(a-1)a(2a-1)}{6(b-a+1)}$$

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) \;=\; \ldots \;=\; \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}ar(X)} \;\approx\; \frac{(b-a)}{2\sqrt{3}}, \qquad \text{para } b-a \text{ muito grande.}$$

Distribuições Contínuas: Uniforme$[a, b]$

$X \sim Unif[a, b]$ p/ $a, b \in \mathbb{R}$: **X é número real entre a e b, inclusive, todos com a mesma probabilidade.**

Função densidade de prob $f(x) = \frac{1}{b-a}$ se $a \leq x \leq b$; $f(x) = 0$, cc.

$$\mathbb{E}(X) = \int_a^b f(x) \cdot x dx \; = \; \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b \; = \; \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} \; = \; \frac{b+a}{2}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_a^b f(x) \cdot x^2 dx \; = \; \frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b \; = \; \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} \; = \; \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) \; = \; \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 \; = \; \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}ar(X)} \; = \; \frac{(b-a)}{2\sqrt{3}}$$

Distribuições Contínuas: Normal(μ, σ^2)

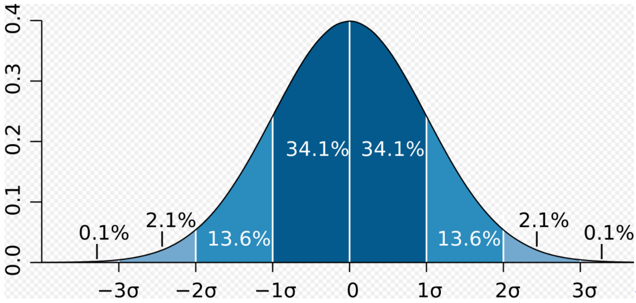
$X \sim Normal(\mu, \sigma^2)$: X **é v.a. real com média** μ **e variância** σ^2

Função densidade de prob $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$.

$$\mathbb{E}(X) = \int_a^b f(x) \cdot x dx \ = \ \dots \ = \ \mu$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_a^b f(x) \cdot x^2 dx \ = \ \dots \ = \ \sigma^2 + \mu^2$$

$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) \ = \ \sigma^2.$ $\qquad \sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}ar(X)} \ = \ \sigma$



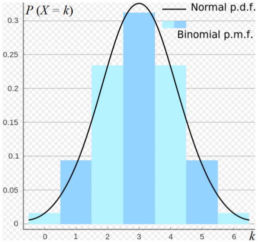
Distribuição Binomial tende a Normal para $n \to \infty$

Seja $X \sim Binomial(n, p)$. Por Stirling: $n! \approx n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \cdot p^k (1-p)^{n-k}}{k^k e^{-k}\sqrt{2\pi k} \cdot (n-k)^{n-k} e^{-(n-k)}\sqrt{2\pi(n-k)}}$$

$$= \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{n(1-p)}{n-k}\right)^{n-k} \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} = \ldots =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \cdot \exp\left\{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}\right\} = \mathbb{P}\Big(Normal(np, np(1-p)) = k\Big)$$



Geração de v.a. Uniforme$(0,1)$ no computador

Alerta 1: computador não gera números reais. Aproximação razoável usando 64 bits: divide o intervalo $[0,1]$ em 2^{64} subintervalos.

Alerta 2: computador é determinístico. Aproximação razoável: simular comportamento probabilístico com gerador pseudo-aleatório. Os melhores geradores passam em testes estatísticos para medir a independência das amostras geradas e sua aleatoriedade.

Suposição: Temos algoritmo *randUni* que gera uma v.a. Uniforme$(0,1)$.

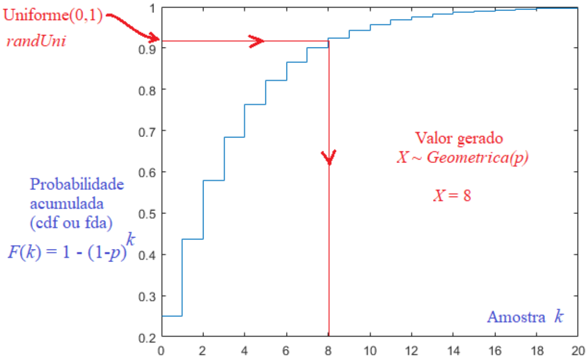
$X \sim Bernoulli(p)$: Se $(randUni < p)$, $X = 1$; caso contrário, $X = 0$.

$X \sim Uniforme\{a,b\}$: $X = a + \lfloor randUni \cdot (b - a + 1) \rfloor$.

Geração de v.a. $X \sim Geometrica(p)$ no computador

Algoritmo 1: Gera v.a.'s $Bernoulli(p)$ até obter um sucesso (1).

Algoritmo 2: Gera $Uniforme(0, 1)$ e aplica a inversa da função de probabilidade acumulada.



$$F(k) = \mathbb{P}(X \leq k) = 1 - (1-p)^k \; = \; u \; \Rightarrow \; F^{-1}(u) = k = \left\lceil \frac{\log(1-u)}{\log(1-p)} \right\rceil .$$

Geração de v.a. $X \sim Binomial(n, p)$ no computador

Geração de v.a. $X \sim Binomial(n, p)$:

Algoritmo 1: Gera n v.a.'s $Bernoulli(p)$ e conta o número de sucessos.

Algoritmo 2: Gera v.a.'s $Geometrica(p)$ até sua soma ultrapassar n e retorna o número de v.a.'s menos 1. Número esperado de geométricas geradas: $n \cdot p$.

Exemplo: $n = 10$, $p = 0.5$. $Geometrica(p)$ geradas: 2,3,1,2,4.
$Binomial(n, p)$ gerada $= 4$.

Geração de v.a. $X \sim BinomialNegativa(k, p)$:

Algoritmo 1: Gera k v.a.'s $Geometrica(p)$ e soma seus valores.

Geração de Permutação aleatória no computador

Algoritmo 1: Gera n v.a.'s *Uniforme*$(0,1)$, ordena seus valores e substitui os valores pela sua posição no vetor ordenado. Tempo $O(n \log n)$.

Exemplo: $[0.6, 0.2, 0.7, 0.4, 0.3]$. Permutação $=$ (4,1,5,3,2).

Algoritmo 2: Fisher-Yates Shuffle. Tempo $O(n)$

Algoritmo Fisher-Yates-Shuffle (inteiro n)

```
Cria vetor perm[1, ..., n]
para k ← 1 até n faça
    perm[k] ← k
para k ← 1 até n faça
    ℓ ← Uniforme{k, n}
    Trocar perm[k] ↔ perm[ℓ]
```

Desigualdade de Chernoff (p/ v.a. Binomiais)

Chernoff: n v.a.'s **independentes** $X_1, \ldots, X_n \sim Bernouli(p)$
Seja $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Binomial(n, p)$ e $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = np$:

$$\mathbb{P}\left(X > \mathbb{E}(X) + t \cdot n\right) \leq \exp\left\{-2t^2 \cdot n\right\}$$

$$\mathbb{P}\left(X < \mathbb{E}(X) - t \cdot n\right) \leq \exp\left\{-2t^2 \cdot n\right\}$$

Juntando os dois bounds em um só:

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t \cdot n\right) \leq 2 \cdot \exp\left\{-2t^2 \cdot n\right\}$$

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha\right) \leq 2 \cdot \exp\left\{\frac{-2\alpha^2}{n}\right\}$$

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t \cdot \sqrt{n}\right) \leq 2 \cdot \exp\left\{-2t^2\right\}.$$

$t = 3 \Rightarrow prob \approx 3 \cdot 10^{-8}$

Desigualdade de Chernoff-Hoeffding (generalização)

Chernoff: n v.a.'s **independentes** $X_i \in [0,1]$ com média μ_i
As v.a.'s não precisam ser Bernoulli, nem ter a mesma distribuição.
Seja $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = n \cdot \mu$, onde
$\mu = (\mu_1 + \ldots + \mu_n)/n$

$$\mathbb{P}\left(X > \mathbb{E}(X) + t \cdot n\right) \leq \exp\left\{-2t^2 \cdot n\right\}$$

$$\mathbb{P}\left(X < \mathbb{E}(X) - t \cdot n\right) \leq \exp\left\{-2t^2 \cdot n\right\}$$

Juntando os dois bounds em um só:

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t \cdot n\right) \leq 2 \cdot \exp\left\{-2t^2 \cdot n\right\}$$

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha\right) \leq 2 \cdot \exp\left\{\frac{-2\alpha^2}{n}\right\}$$

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t \cdot \sqrt{n}\right) \leq 2 \cdot \exp\left\{-2t^2\right\}.$$

$t = 3 \Rightarrow prob \approx 3 \cdot 10^{-8}$

Desigualdade de Chernoff-Hoeffding (generalização)

Chernoff: n v.a.'s **independentes** $X_i \in [a_i, b_i]$ com média μ_i
As v.a.'s não precisam ser Bernoulli, nem ter a mesma distribuição.
Seja $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = n \cdot \mu$, onde
$\mu = (\mu_1 + \ldots + \mu_n)/n$

$$\mathbb{P}\left(X > \mathbb{E}(X) + t \cdot n\right) \;\leq\; \exp\left\{\frac{-2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2} \cdot n^2\right\}$$

$$\mathbb{P}\left(X < \mathbb{E}(X) - t \cdot n\right) \;\leq\; \exp\left\{\frac{-2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2} \cdot n^2\right\}$$

Juntando os dois bounds em um só:

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t \cdot n\right) \leq \; 2 \cdot \exp\left\{\frac{-2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2} \cdot n^2\right\}$$

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha\right) \leq \; 2 \cdot \exp\left\{\frac{-2\alpha^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right\}$$

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t \cdot \sqrt{n}\right) \;\leq\; 2 \cdot \exp\left\{\frac{-2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2} \cdot n\right\}$$

Desigualdade de Chernoff-Hoeffding (comparação)

Aplicação: n moedas não-viciadas lançadas. Seja X o número de caras.
$X \sim Binomial(n, \frac{1}{2})$, $\mathbb{E}(X) = n/2$ e $\mathbb{V}ar(X) = n \cdot \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) = n/4$.

Markov: $\mathbb{P}(X \geq 3n/4) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{3n/4} = \frac{n/2}{3n/4} = \frac{2}{3}$ **(ruim)**

Chebyshev: $\mathbb{P}(X \geq 1.5\frac{n}{2}) \leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 0.5\frac{n}{2}) \leq \frac{\mathbb{V}ar(X)}{(n/4)^2} = \frac{4}{n}$. **(bom)**

Chebyshev: $\mathbb{P}(X \geq 1.01\frac{n}{2}) \leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 0.01\frac{n}{2}) \leq \frac{\mathbb{V}ar(X)}{(0.01 \cdot n/2)^2} = \frac{10000}{n}$.

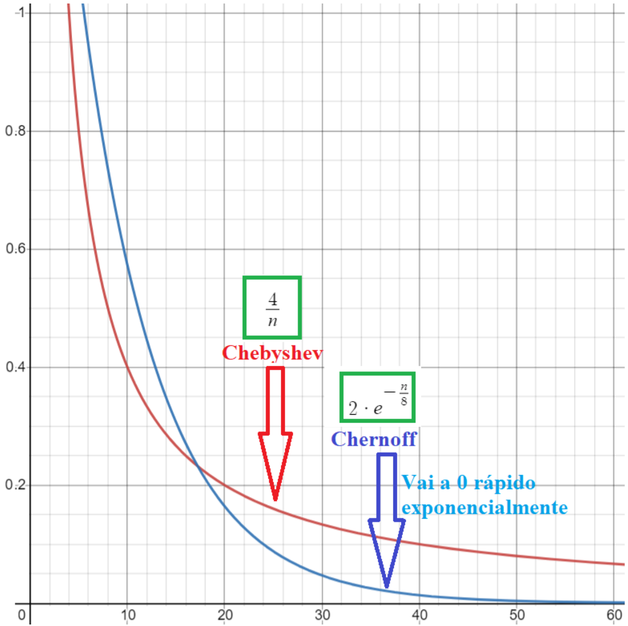
Chebyshev:
$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t\sqrt{n}) \leq \frac{\mathbb{V}ar(X)}{(t\sqrt{n})^2} = \frac{1}{4\ t^2}$. **(razoável)**

Chernoff:
$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \frac{1}{4} \cdot n) \leq 2e^{-2 \cdot (1/4)^2 \cdot n} = 2e^{-n/8}$. **(excelente)**

Chernoff:
$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \frac{0.01}{2} \cdot n) \leq 2e^{-2(0.01/2)^2 \cdot n} = 2e^{-n/20000}$. **(excelente)**

Chernoff:
$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t\sqrt{n}) \leq 2e^{-2t^2}$. **(excelente)**

Desigualdade de Chernoff-Hoeffding (comparação)



Chernoff: subgrafo bipartido grande

Problema: Dado um grafo com n vértices e m arestas, obter subgrafo bipartido com muitas arestas, próximo da metade $m/2$.

Algoritmo Probabilístico: Seja A inicialmente vazio. Para cada vértice de G, coloque-o em A com probabilidade $1/2$. Seja $B = V - A$. Remova todas as arestas entre vértices de A e remova todas as arestas entre vértices de B. O subgrafo resultante é bipartido com número esperado de arestas igual a $m/2$.

$X = \sum_{uv \in E} X_{uv}$ é v.a. $X \sim Binomial(m, \frac{1}{2}) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{V}ar(X) = \frac{m}{4}$

Chebyshev: $\mathbb{P}(X \leq 0.9\frac{m}{2}) \leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 0.1\frac{m}{2}) \leq \frac{\mathbb{V}ar(X)}{(0.1 \cdot m/2)^2} = \frac{100}{m}$.

Chernoff:
$\mathbb{P}(X \leq 0.9\frac{m}{2}) \leq \mathbb{P}(X \leq \mathbb{E}(X) - 0.1\frac{m}{2}) \leq e^{-2\cdot(0.1/2)^2 m} = e^{-m/200}$.

Exemplo: $m = 1000$: Chebyshev 10%. Chernoff $< 0.7\%$
Exemplo: $m = 10000$: Chebyshev 1%. Chernoff $< 10^{-20}$

Convergência em probabilidade (w.h.p)

Seja $A(n)$ um evento em um espaço de probabilidade, onde n é um parâmetro. Dizemos que $A(n)$ ocorre "*com alta probabilidade*" (w.h.p) se:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) \;=\; 1 \qquad \text{(convergência em probabilidade).}$$

Por exemplo,

$$\mathbb{P}(A(n)) \;\geq\; 1 - \frac{1}{n^{\beta}} \qquad \text{para algum } \beta > 0 \text{ constante}$$

Exemplo: v.a. X, que é a soma de n variáveis $0/1$ X_i com prob. $1/2$ de ser 1. $\mathbb{E}(X) = n/2$. Onde está concentrada a distribuição de X? Determinar quando $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha) < 1/n$ (w.h.p: probabilidade da "cauda" tende a 0).

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha) \leq 2 \cdot \exp\left\{\frac{-\alpha^2}{3\mathbb{E}(X)}\right\} = 2 \cdot \exp\left\{\frac{-2\alpha^2}{3n}\right\} < 1/n$$

Tomando $\alpha \geq 2\sqrt{n \cdot \ln n}$ e n suficientemente grande, temos o desejado.

Leis dos Grandes Números

Seja $X_1, X_2, X_3, \ldots$ uma sequência de v.a. iid (independentes e identicamente distribuídas) com média μ e variância σ^2 finitos.
A **Média Amostral** M_n é definida como $M_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n}\cdot n\mu = \mu$$

$$\mathbb{V}ar(M_n) = \mathbb{V}ar\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}ar(X_i) = \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

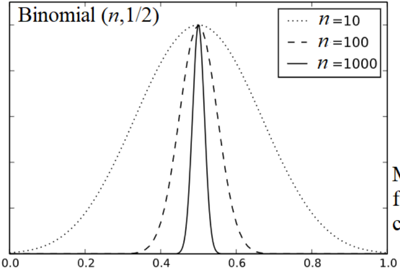
Conclusão: A Média Amostral M_n tem mesma média μ e variância que tende a 0 quanto maior for o número n de "amostras".

Teorema Central do Limite: M_n converge em distribuição para uma v.a. de distribuição Normal com média μ e variância σ^2/n.

Lei Fraca dos Grandes Números: Para todo $\varepsilon > 0$, $|M_n - \mu| < \varepsilon$ w.h.p. Assim, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|M_n - \mu| < \varepsilon) = 1$ (convergência em probabilidade).

Lei Forte dos Grandes Números: $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} M_n = \mu) = 1$ (convergência quase certa). M_n realmente converge p/ valor esperado μ.

Leis dos Grandes Números



M$_n$ fica mais concentrada

Conclusão: A Média Amostral M_n tem mesma média μ e variância que tende a 0 quanto maior for o número n de "amostras".

Teorema Central do Limite: M_n converge em distribuição para uma v.a. de distribuição Normal com média μ e variância σ^2/n.

Lei Fraca dos Grandes Números: Para todo $\varepsilon > 0$, $|M_n - \mu| < \varepsilon$ w.h.p. Assim, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|M_n - \mu| < \varepsilon) = 1$ (convergência em probabilidade).

Lei Forte dos Grandes Números: $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} M_n = \mu) = 1$ (convergência quase certa). M_n realmente converge p/ valor esperado μ.

Margem de Erro e Confiança

Dizemos que um experimento tem Margem de Erro ε e Confiança β se a Média Amostral M_n (com valor esperado μ) satisfaz:

$$\mathbb{P}\,(M_n = \mu \pm \varepsilon) \;=\; \mathbb{P}\,(|M_n - \mu| \leq \varepsilon) \;\geq\; \beta$$

Lembrando que $\mathbb{V}ar(M_n) = \sigma^2/n$, temos por Chebyshev que

$$\mathbb{P}(M_n = \mu \pm \varepsilon) \;\geq\; 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n} \;=\; \beta,$$

tomando

$$n \;=\; \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2(1-\beta)}.$$

Diminuir a Margem de Erro (ou aumentar a precisão) tem mais impacto do que aumentar a Confiança.

Exemplo: Testar com margem de erro 1% e confiança 99% se uma moeda é viciada. Seja M_n a média amostral de caras.

$$\mathbb{P}(M_n \;=\; 0.5 \pm 0.01) \;\geq\; 1 - \frac{0.25}{0.01^2 n} \;=\; 0.99;$$

tomando $n = 250.000$

Margem de Erro e Confiança

Exemplo: Pesquisa com 2000 eleitores indica que certo candidato vence no 2o turno com 55% de votos. Calcule a margem de erro para 95% de confiança.

Considerando cada pessoa como uma v.a. $X_i \sim Bernoulli(0.55)$, temos: $\mu = 0.55$ e $\sigma^2 = 0.55 \cdot 0.45$

$$\mathbb{P}(M_n = \mu \pm \varepsilon) \;\geq\; 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n} \;=\; \beta,$$

$$\mathbb{P}(M_n \;=\; 0.55 \pm \varepsilon) \;\geq\; 1 - \frac{0.55 \cdot 0.45}{\varepsilon^2 \cdot 2000} \;=\; 0.95;$$

tomando $\varepsilon = 0,0498 = 4,98\%$.

Margem de Erro e Confiança

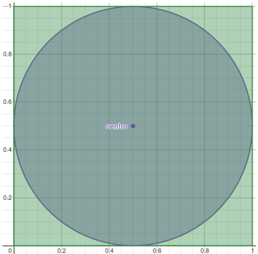
Exemplo: Calcular o valor de π experimentalmente.

Sortear n pontos unif aleatórios no quadrado $[0,1]^2$ e ver quantos caem no círculo de diâmetro 1 (com área $\pi/4$) dentro do quadrado.
Acertar a 4o casa decimal (margem de erro 10^{-5}) com confiança 70%.
$\mu = \pi/4$ e $\sigma^2 = \frac{\pi}{4}(1 - \frac{\pi}{4})$.

$$\mathbb{P}(M_n = \mu \pm \varepsilon) \;\geq\; 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n} \;=\; \beta,$$

$$\mathbb{P}\left(4 \cdot M_n = \pi \pm 4 \cdot 10^{-5}\right) = \mathbb{P}\left(M_n = \frac{\pi}{4} \pm 10^{-5}\right) \;\geq\; 1 - \frac{\pi \cdot (4 - \pi)}{4^2 \cdot 10^{-10} \cdot n} \;=\; 0.7;$$

tomando $n = 6 \cdot 10^9$ (seis bilhões de experimentos).



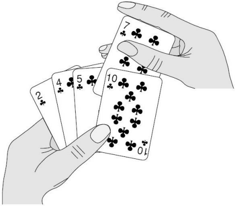
MCM (Monte Carlo Method)

- Algoritmos que realizam muitas amostragens aleatórias para obter soluções razoáveis de problemas difíceis.
- Pelas Leis dos Grandes Números, uma grande quantidade de amostras levam à solução do problema (no limite tendendo ao infinito).

Análise do Caso Médio do Insertion Sort

Insertion-Sort (vetor A, inteiro n)

1 **para** $k \leftarrow 2$ **até** n **faça**:
2 $\quad$ $carta \leftarrow A[j]$; $\quad i \leftarrow k - 1$
3 $\quad$ **enquanto** $i \geq 1$ **e** $A[i] > carta$ **faça**:
4 $\quad\quad$ $A[i+1] \leftarrow A[i]$; $\quad i \leftarrow i - 1$
5 $\quad$ $A[i+1] \leftarrow carta$



Tempo do Caso Médio: Considere o vetor de entrada do algoritmo como uma permutação de 1 a n escolhida aleatoriamente com prob uniforme.
É na linha 3 onde são feitas comparações entre elementos do vetor.
Qual é o número esperado de execuções da linha 3?

Para cada valor de k, a linha 3 é executada um num de vezes entre 1 e k.
Para um certo t entre 1 e k, qual a probab de ser executada t vezes?

Resposta: $1/k$, pois a nova carta (a k-ésima) deveria ser a t-ésima maior entre as primeiras k cartas $A[1 \ldots k]$.

Análise do Caso Médio do Insertion Sort

Tempo do Caso Médio: Considere o vetor de entrada do algoritmo como uma permutação de 1 a n escolhida aleatoriamente com probabilidade uniforme. Qual é o número esperado de execuções da linha 3?

Para cada valor de k, a linha 3 é executada um num de vezes entre 1 e k. Para um certo t entre 1 e k, qual a probab de ser executada t vezes?

Resposta: $1/k$, pois a nova carta (a k-ésima) deveria ser a t-ésima maior entre as primeiras k cartas $A[1 \ldots k]$.

Seja X_k o número de execuções da linha 3 para um certo k fixo. Portanto:

$$\mathbb{E}(X_k) = \sum_{t=1}^{k} t \cdot \mathbb{P}(X_k = t) = \sum_{t=1}^{k} t \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^{k} t = \frac{1}{k} \cdot \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k+1}{2}$$

Seja X o número total de execuções da linha 3: $X = \sum_{k=2}^{n} X_k$. Portanto:

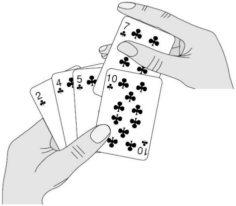
$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=2}^{n} X_k\right) = \sum_{k=2}^{n} \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=2}^{n} \frac{k+1}{2} = \frac{(n+4)(n-1)}{4} = \Theta(n^2)$$

Insertion Sort Probabilístico

Insertion-Sort-Prob (vetor A, inteiro n)

1 **rearranja** o vetor A de modo aleatório e uniforme

2 Insertion-Sort(A,n)



Algoritmo Las Vegas de ordenação (sempre produz a resposta esperada)

Tempo Esperado do Insertion Sort Probabilístico supondo todos os elementos diferentes entre si no vetor A: análise praticamente idêntica à do Tempo do Caso Médio do Insertion Sort Determinístico.

Tempo Esperado $\Theta(n^2)$

Cadeias de Markov (*Markov Chains*)

Um **processo estocástico discreto** é uma sequência $X_0, X_1, X_2, \ldots$ de v.a. que assumem valores em um conjunto finito (ou infinito enumerável). Se $X_t = i$, dizemos que o processo está no estado i no tempo t.

Uma **cadeia de Markov** é um processo estocástico discreto tal que $\mathbb{P}(X_t = a_t \mid X_{t-1} = a_{t-1}, \ldots, X_0 = a_0) \ = \ \mathbb{P}(X_t = a_t \mid X_{t-1} = a_{t-1})$, cujo valor não depende de t (*Memoryless/Markov property*).

Seja $P_{i,j} = \mathbb{P}(X_{t+1} = j \mid X_t = i)$.

Matriz de transição (1 passo):
$$P \ = \begin{bmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & \ldots & P_{0,j} & \ldots \\ P_{1,0} & P_{1,1} & \ldots & P_{1,j} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ P_{i,0} & P_{i,1} & \ldots & P_{i,j} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Lei da Probabilidade total: $\sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j} \ = \ 1$

Markov Chain - transição em m passos

Matriz de transição (m passos): Seja $P_{i,j}^{(m)} = \mathbb{P}(X_{t+m} = j \mid X_t = i)$.

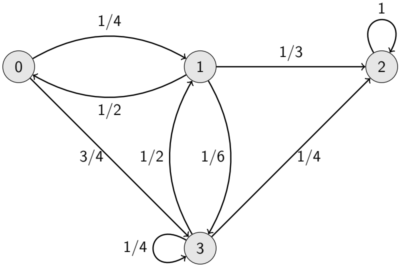
$$P_{i,j}^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{t+m} = j, X_{t+1} = k \mid X_t = i) \; = \; \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{t+m} = j \mid X_{t+1} = k, X_t =$$

$$P_{i,j}^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{i,k} \cdot P_{k,j}^{(m-1)}$$

Seja $P^{(m)}$ a matriz com valores $[\ P_{i,j}^{(m)}\ ]$. Logo $P^{(m)} = P \cdot P^{(m-1)}$.
Por indução, temos que $P^{(m)} = P^m$.

Matriz transição (m passos): $P^{(m)} = \begin{bmatrix} P_{0,0}^{(m)} & P_{0,1}^{(m)} & \cdots & P_{0,j}^{(m)} & \cdots \\ P_{1,0}^{(m)} & P_{1,1}^{(m)} & \cdots & P_{1,j}^{(m)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ P_{i,0}^{(m)} & P_{i,1}^{(m)} & \cdots & P_{i,j}^{(m)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = P^m$

Markov Chain - transição em *m* passos - exemplo

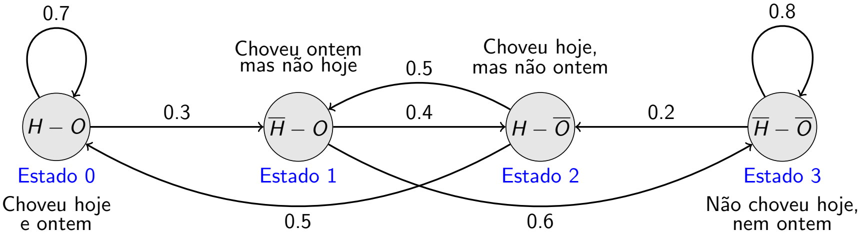


$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad P^3 = \begin{bmatrix} 3/16 & 7/48 & 29/64 & 41/192 \\ 5/48 & 5/24 & 79/144 & 5/36 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/16 & 13/96 & 107/192 & 47/192 \end{bmatrix}$$

$P^{(3)}_{0,3} = 41/192$: prob de ir de 0 a 3 em 3 passos.
Outro modo: caminhos possíveis 0103, 0133, 0313, 0333.

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{32}+\frac{1}{96}+\frac{1}{16}+\frac{3}{64} = \frac{41}{192}$$

Markov Chain - transição em *m* passos - exemplo



$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad P^2 = \begin{bmatrix} 0.49 & 0.21 & 0.12 & 0.18 \\ 0.20 & 0.20 & 0.12 & 0.48 \\ 0.35 & 0.15 & 0.20 & 0.30 \\ 0.10 & 0.10 & 0.16 & 0.64 \end{bmatrix}$$

Choveu na segunda e na terça. Qual a probabilidade de chover na quinta?

$$P_{0,0}^{(2)} + P_{0,2}^{(2)} \;=\; 0.49 + 0.12 \;=\; 0.61$$

Markov Chain - Classificação dos estados

Dizemos que o Estado j é **acessível** a partir do Estado i se:

$P^{(n)}_{i,j} > 0$ para algum $n \geq 0$.

Dizemos que os Estados i e j **se comunicam ($i \leftrightarrow j$)** se

i é acessível de j e j é acessível de i.

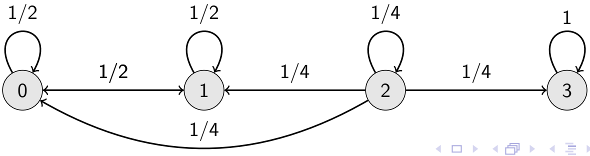
Propriedades: (Relação de Equivalência)

- **Reflexiva:** $i \leftrightarrow i$.
- **Simétrica:** se $i \leftrightarrow j$, então $j \leftrightarrow i$.
- **Transitiva:** se $i \leftrightarrow j$ e $j \leftrightarrow k$, então $i \leftrightarrow k$.

Partição dos Estados da Cadeia de Markov em Classes de Equivalência com relação à comunicabilidade. Mostrar 2 exemplos slides anteriores.

Uma cadeia é **irredutível** se possui apenas 1 classe.

Outro exemplo: 3 classes: $\{0, 1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$



Markov Chain - Estados Recorrentes $\times$ Estados Transientes

Seja f_{ij} a prob de, começando no Estado i, o processo visitar j em algum momento futuro. Ou seja, $1 - f_{ii}$ é a prob de nunca mais voltar.

Dizemos que o Estado i é **recorrente** se $f_{ii} = 1$. Caso contrário, $f_{ii} < 1$ e o estado é **transiente** (existe a prob $1 - f_{ii}$ de nunca mais voltar).

Se um estado i é transiente, o número X de vezes que o processo esteve em i, começando em i, é uma v.a. com distribuição geométrica: $\mathbb{P}(X = n) = f_{ii}^n \cdot (1 - f_{ii})$.

Proposição 4.3.1 (Ross):

Um Estado i é transiente **se e só se** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P_{i,i}^{(n)} < \infty$.

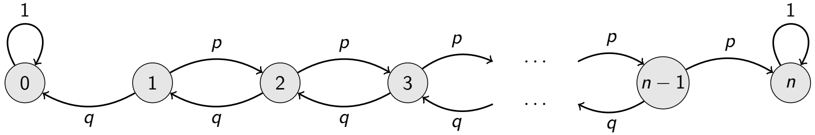
Corolário 4.3.1 (Ross):
Se o Estado i é recorrente e $i \leftrightarrow j$, então o Estado j é recorrente.

Observação: Toda cadeia de Markov finita tem um estado recorrente.

Markov Chain - Ruína do Jogador (*Gambler's Ruin*)

Probabilidade p de ganhar 1 real e prob $q = 1 - p$ de perder 1 real. Jogadas independentes. Qual a probabilidade de conseguir n reais começando com 1 real?

Modelar o problema como uma Cadeia de Markov:
$P_{0,0} = P_{n,n} = 1; \quad P_{i,i+1} = p; \quad P_{i,i-1} = q \quad$ para $i = 1, \ldots, n-1$.



3 classes: $\{0\}$ recorrente, $\{n\}$ recorrente, $\{1, \ldots, n-1\}$ transiente.

Seja R_i a prob de, começando com i reais, atingir n reais antes de 0:
$R_0 = 0; \quad R_n = 1; \quad R_i = p \cdot R_{i+1} + q \cdot R_{i-1}$ para $i = 1, \ldots, n-1$.

Objetivo: Calcular R_1. Generalizar para R_i.

Markov Chain - Ruína do Jogador (*Gambler's Ruin*)

Seja R_i a prob de, começando com i reais, atingir n reais antes de 0:
$R_0 = 0$; $R_n = 1$; $R_i = p \cdot R_{i+1} + q \cdot R_{i-1}$ para $i = 1, \ldots, n-1$.

Objetivo: Calcular R_1. Generalizar para R_i.

$$R_{i+1} - R_i = \left(\frac{q}{p}\right) \cdot (R_i - R_{i-1}) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 \cdot (R_{i-1} - R_{i-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^i \cdot (R_1 - R_0) = \left(\frac{q}{p}\right)^i \cdot R_1$$

$$\Rightarrow R_{i+1} = R_i + \left(\frac{q}{p}\right)^i R_1 \Rightarrow R_i = R_1 \cdot \left[1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right]$$

Se $p = 1/2$: $R_i = i \cdot R_1$. Se $p \neq 1/2$: $R_i = \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)} \cdot R_1$.

Como $R_n = 1$, então:

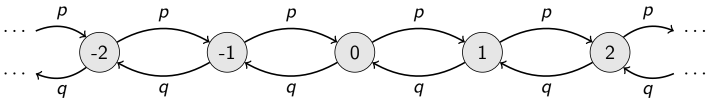
Se $p = 1/2$: $R_n = n \cdot R_1$. Se $p \neq 1/2$: $R_n = \frac{1-(q/p)^n}{1-(q/p)} \cdot R_1$. **Portanto:**

Se $p = 1/2$: $R_1 = 1/n$. Se $p \neq 1/2$: $R_1 = \frac{1-(q/p)}{1-(q/p)^n}$. **Finalmente:**

Se $p = 1/2$: $R_i = i/n$. Se $p \neq 1/2$: $R_i = \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^n}$.

Markov Chain - Passeio Aleatório (*Random Walk*)

$P_{i,i+1} = p; \quad P_{i,i-1} = q = 1 - p; \quad$ onde $i \in \mathbb{Z}$.



Todos os estados **se comunicam**. Logo, todos são recorrentes ou todos são transientes. O estado 0 é recorrente **se e só se** $\sum_{n=0}^{\infty} P_{0,0}^{(n)} = \infty$.

$$P_{0,0}^{(2n+1)} = 0, \ \forall n. \qquad P_{0,0}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n = \frac{(2n)!}{n!n!}[p(1-p)]^n \approx \frac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{\pi \cdot n}},$$

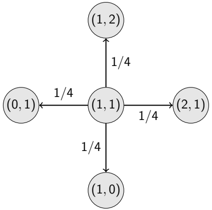
usando Stirling: $n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$. Note que $4p(1-p) \leq 1, \ \forall p \in [0,1]$.

Igualdade $4p(1-p) = 1$ se e só se $p = 1/2$.

Logo, $\sum_{n=0}^{\infty} P_{0,0}^{(2n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{\pi \cdot n}} = \infty$ **se e só se** $p = 1/2$.

Conclusão: Se $p = 1/2$, todos os estados são recorrentes.
Se $p \neq 1/2$, todos os estados são transientes.

Markov Chain - Random Walk em 2 dimensões



$$P_{1,1}^{(2n)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(2n)! \cdot (1/4)^{2n}}{i! \cdot i! \cdot (n-i)! \cdot (n-i)!} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{n-i}$$

alertIdentidade de Vandermonde.

$$P_{1,1}^{(2n)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \binom{2n}{n} \approx \frac{((2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2\pi 2n})^2}{4^{2n} (n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n})^4} = \frac{1}{n \cdot \pi}$$

Portanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{1,1}^{(2n)} = \infty \qquad \Rightarrow \qquad \text{Todos os estados são Recorrentes}$$

Symmetric Random Walk: 1|2 dimensões (todos estados são recorrentes)
$\geq$ 3 dimensões (todos estados são transientes)

Markov Chain - Distribuição Estacionária e Periodicidade

Vetor de probabilidade $\pi^{(t)} = [\pi_1^{(t)}, \ldots, \pi_n^{(t)}]$: Matriz linha $1 \times n$ tal que $\pi_i^{(t)}$ é a probabilidade do processo estar no estado i no tempo t.

- $\pi^{(t)} = \pi^{(t-1)} \cdot P$. Ou seja, $\pi_i^{(t)} = \sum_{k=1}^{n} \pi_k^{(t-1)} \cdot P_{k,i}$
- $\Rightarrow \quad \pi^{(t)} = \pi^{(0)} \cdot P^t$, onde P é matriz de transição da Cadeia de Markov.

Distribuição limite (ou estacionária): Qualquer vetor π tq $\pi = \pi \cdot P$.
- **Intuição:** Se o vetor de prob for igual a π em algum momento, o vetor de prob do processo será sempre π. $\sum_{i=0}^{n} \pi_i = 1$

Tempo de travessia (hitting time) T_{ij}**:** Tempo (número de passos) esperado para alcançar o estado j iniciando no estado i. $T_{ij} > 0$.

Periodicidade do estado i**:** $\min\{p : n \text{ é múltiplo de } p \Rightarrow P_{i,i}^{n} > 0, \ \forall n\}$. Estados de uma mesma classe tem a mesma periodicidade.

Uma cadeia é **aperiódica** se todo estado é aperiódico (periodicidade=1).

Exemplo: Random Walk tem período 2 em cada estado. Triângulo direcionado com probabilidades 1 tem periódo 3 em cada estado.

Markov Chain - Teorema Ergódico

Teorema Fundamental das Cadeias de Markov:
Toda Cadeia de Markov finita, irredutível e aperiódica satisfaz:

(a) Todos os estados são recorrentes e aperiódicos

(b) Existe uma única distribuição estacionária π tq $\pi_i > 0, \ \forall i$

(c) $f_{ii} = 1$ e $T_{ii} = 1/\pi_i$ para todo estado i

(d) Para qualquer vetor $\pi^{(0)}$ de prob inicial,

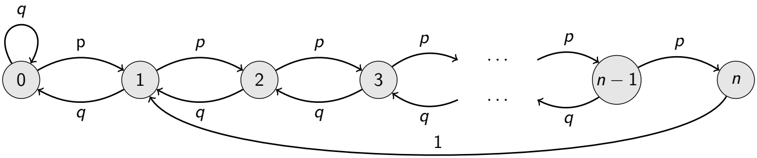
$$\lim_{t \to \infty} \pi^{(t)} = \pi \quad \text{(Convergência exponencialmente rápida)}$$

(e) Seja $N(i,t)$ o número de vezes que i é visitado em t passos.

$$\lim_{t \to \infty} \frac{N(i,t)}{t} = \pi_i$$

Markov Chain - Glória do Jogador (*Gambler's Glory*)

Probabilidade p de ganhar 1 real e prob $q = 1 - p$ de perder 1 real.
Mas, se perder tudo, consegue 1 real com um padrinho rico e recomeça.
Se ganhar n reais, dá $n - 1$ ao padrinho e recomeça.
Qual o tempo esperado para conseguir n reais começando com 1 real?



1 classe: todos os estados são recorrentes e aperiódicos.

Objetivo: Calcular o tempo esperado $T_{1,n}$ p/ ir de 1 até n.

- Método 1: Calcular $\pi_n \Rightarrow \frac{1}{\pi_n} = T_{n,n} = 1 + T_{1,n}$
- Método 2: Calcular $T_{1,n}$ diretamente em função de outros $T_{i,n}$.
- Método 3: Fazer a conta na marra: analisar cada caminho possível de 1 até n e calcular sua probabilidade.
- Método 4: Experimental p/ $T_{1,n}$. MCMC (Monte Carlo Markov Chain).
- Método 5: Experimental p/ π_n. Convergência rápida ao limite.

Markov Chain - Glória do Jogador (*Gambler's Glory*)

Método 1: Calcular $\pi_n \;\Rightarrow\; \frac{1}{\pi_n} = T_{n,n} = 1 + T_{1,n}$

Info: $\pi = \pi \cdot P$ e $\sum_{i=0}^{n} \pi_i = 1$. Portanto:

$$
\begin{aligned}
\pi_n &= p \cdot \pi_{n-1} & \Rightarrow\;& \pi_{n-1} = \frac{1}{p} \cdot \pi_n \\
\pi_{n-1} &= p \cdot \pi_{n-2} & \Rightarrow\;& \pi_{n-2} = \frac{1}{p^2} \cdot \pi_n \\
\pi_{n-2} &= p \cdot \pi_{n-3} + q \cdot \pi_{n-1} & \Rightarrow\;& \pi_{n-3} = \frac{1}{p^3}(1 - pq) \cdot \pi_n
\end{aligned}
$$

Simplificação: $p = 1/2$. **Exercício 1:** terminar p/ p qualquer.

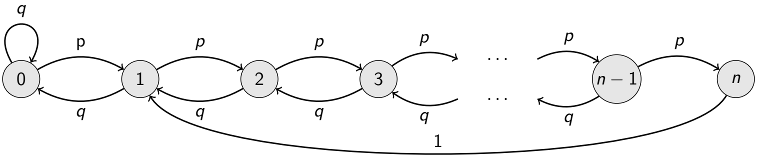
$$
\begin{aligned}
\pi_n &= (1/2) \cdot \pi_{n-1} & \Rightarrow\;& \pi_{n-1} = 2 \cdot \pi_n \\
\pi_{n-1} &= (1/2) \cdot \pi_{n-2} & \Rightarrow\;& \pi_{n-2} = 4 \cdot \pi_n \\
\pi_{n-2} &= (1/2) \cdot \pi_{n-3} + (1/2) \cdot \pi_{n-1} & \Rightarrow\;& \pi_{n-3} = 6 \cdot \pi_n \\
\pi_{n-3} &= (1/2) \cdot \pi_{n-4} + (1/2) \cdot \pi_{n-2} & \Rightarrow\;& \pi_{n-4} = 8 \cdot \pi_n \\
\pi_{n-4} &= (1/2) \cdot \pi_{n-5} + (1/2) \cdot \pi_{n-3} & \Rightarrow\;& \pi_{n-5} = 10 \cdot \pi_n \\
& & \ldots & \\
\pi_{i+1} &= (1/2) \cdot \pi_i + (1/2) \cdot \pi_{i+2} & \Rightarrow\;& \pi_i = 2(n - i) \cdot \pi_n \\
& & \ldots & \\
\pi_2 &= (1/2) \cdot \pi_1 + (1/2) \cdot \pi_3 & \Rightarrow\;& \pi_1 = 2(n - 1) \cdot \pi_n \\
\pi_0 &= (1/2)\pi_0 + (1/2)\pi_1 & \Rightarrow\;& \pi_0 = \pi_1 = 2(n - 1) \cdot \pi_n
\end{aligned}
$$

Markov Chain - Glória do Jogador (*Gambler's Glory*)

Método 1: Calcular $\pi_n \;\Rightarrow\; \frac{1}{\pi_n} = T_{n,n} = 1 + T_{1,n}$

Simplificação: $p = 1/2$. **Exercício 1:** terminar p/ p qualquer.

$$1 = \sum_{i=0}^{n} \pi_i = \pi_n - 2\pi_n + \sum_{i=1}^{n} 2i \cdot \pi_n = \pi_n\left(-1 + n(n+1)\right) \;\Rightarrow\; \pi_n = \frac{1}{n^2+n-1}$$



Portanto, do Teorema Fundamental das Cadeias de Markov:

$$T_{n,n} = \frac{1}{\pi_n} = n^2+n-1 \quad\Rightarrow\quad T_{1,n} = T_{n,n} - 1 = n^2+n-2 = (n+2)(n-1)$$

Markov Chain - Glória do Jogador (*Gambler's Glory*)

Método 2: Calcular $T_{1,n}$ diretamente em função de outros $T_{i,n}$.

Info: Esperança condicional: $\mathbb{E}(X) = \sum_i \mathbb{E}(X|Y=i) \cdot \mathbb{P}(Y=i)$.

Seja T_i o tempo esperado para chegar em n a partir de i, inclusive.
Formalmente, $T_i = T_{i,n}$ se $i \neq n$ e $T_n = 0$, cc.;
$T_i \;=\; 1 \;+\; p \cdot T_{i+1} + q \cdot T_{i-1}$
$T_0 = 1 + p \cdot T_1 + q \cdot T_0 \quad \Rightarrow \quad T_1 - T_0 = -1/p$

Objetivo: Calcular T_1. Generalizar para T_i.

$$(T_{i+1} - T_i) = \left(\frac{q}{p}\right) \cdot (T_i - T_{i-1}) \;-\; \frac{1}{p}$$

Simplificação: $p = 1/2$. **Exercício 2:** terminar p/ p qualquer.

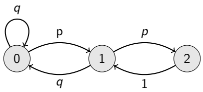
$$(T_{i+1} - T_i) = (T_1 - T_0) - 2i \;\Rightarrow\; T_{i+1} = T_i - 2(i+1) \;\Rightarrow\; T_n = T_i - 2\sum_{k=i+1}^{n} k$$

$$T_i \;=\; (n+i+1)(n-i) \quad\Rightarrow\quad T_1 \;=\; (n+2)(n-1)$$

Markov Chain - Glória do Jogador (*Gambler's Glory*)

Método 3: Fazer a conta na marra: analisar cada caminho possível de 1 a n e calcular prob. Dificuldade: num caminhos é exponencial !!

Exemplo:



$n = 2 \;\Rightarrow\; T_{1,n} = (2+2)(2-1) \;=\; 4$

1 tam 1 (12)
0 tam 2
1 tam 3 (1012)
1 tam 4 (10012)
2 tam 5 (100012, 101012)
3 tam 6 (1000012, 1001012, 1010012)
5 tam 7 (10000012, 10001012, 10010012, 10100012, 10101012)

8 tam 8 (100000012, 100001012, 100010012, 100100012, 101000012, 100101012, 101001012, 101010012)

Fibonacci $F(k-2)$ caminhos de tam. $k \geq 2$. **Exercício 3 !!**

$$T_{1,2} \;=\; 1 \cdot \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot F(k-2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \;=\; 4$$

Exercício 4 !!

desmos

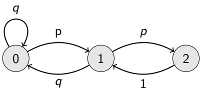
$$1 \cdot \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{1000} n \cdot F(n-2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \quad = 4$$

desmos

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right)^{x} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{(1-\sqrt{5})}{2}\right)^{x}$$

Markov Chain - Glória do Jogador (*Gambler's Glory*)

Método 4: Experimental p/ $T_{1,n}$. MCMC (Monte Carlo Markov Chain)



$$n = 2 \;\Rightarrow\; T_{1,n} = (2+2)(2-1) \;=\; 4$$

```cpp
int main() {
    // Gerando seed pseudo-aleatória
    srand((unsigned long) time(nullptr));

    int repeticoes = 100000;
    int tempo = 0;
    int soma = 0;
    int x = 1;
    double p;

    for (int i = 0; i < repeticoes; ++i) {
        x = 1;
        tempo = 0;
        //cout << x;
        while (x!=2) {
            tempo++;
            p = (double)rand() / (double)RAND_MAX;
            if (x==0) {
                if (p < 0.5) x=1;
            } else if (x==1) {
                if (p < 0.5) x=0; else x=2;
            }
            //cout << x;
        }
        //cout << " --- " << tempo << "\n";
        soma += tempo;
    }
    cout << "Tempo medio = " << (double)soma/(double)repeticoes;
    return 0;
```

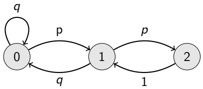
```
12 --- 1
10012 --- 4
10012 --- 4
101012 --- 5
1000101000012 --- 12
100000100012 --- 11
10012 --- 4
12 --- 1
10012 --- 4
12 --- 1
1012 --- 3
12 --- 1
101000100012 --- 11
12 --- 1
12 --- 1
12 --- 1
10012 --- 4
10000010100010001001010001012 --- 28
12 --- 1
12 --- 1
12 --- 1
10012 --- 4
12 --- 1
10012 --- 4
10000012 --- 7
Tempo medio = 4.00514
execution time : 16.335 s
```

Exercício 5: Fazer p/ $n = 3, \ldots, 100$, listar tempos médios e comparar.

Markov Chain - Glória do Jogador (*Gambler's Glory*)

Método 5: Experimental p/ π_n. Convergência rápida ao limite.

$$\frac{1}{\pi_n} = T_{n,n} = 1 + T_{1,n}.$$



$n = 2 \Rightarrow T_{1,n} = (2+2)(2-1) = 4$

```
int main() {
    // Gerando seed pseudo-aleatória
    srand((unsigned long) time(nullptr));

    double pi0, pi1, pi2;
    pi0 = pi1 = pi2 = 1.0/3.0;
    cout << pi0 << "\t" << pi1 << "\t" << pi2 << "\n";

    int repeticoes = 60;
    for (int i = 0; i < repeticoes; ++i) {
        double x0 = pi0/2 + pi1/2;
        double x1 = pi0/2 + pi2;
        double x2 = pi1/2;
        pi0 = x0; pi1 = x1; pi2 = x2;
        cout << pi0 << "\t" << pi1 << "\t" << pi2 << "\n"
    }
    return 0;
```

0.333333	0.333333	0.333333
0.333333	0.5	0.166667
0.416667	0.333333	0.25
0.375	0.458333	0.166667
0.416667	0.354167	0.229167
0.385417	0.4375	0.177083
0.411458	0.369792	0.21875
0.390625	0.424479	0.184896
0.407552	0.380208	0.21224
0.39388	0.416016	0.190104
0.404948	0.387044	0.208008
0.395996	0.410482	0.193522
0.403239	0.39152	0.205241
0.39738	0.40686	0.19576
0.400009	0.399978	0.200014
0.399997	0.400008	0.199995
0.4	0.4	0.2

Exercício 6: Fazer p/ $n = 3, \ldots n = 100$, listar tempos médios. Comparar com os valores dos slides anteriores.

Markov Chain - 2-SAT - algoritmo probabilístico polinomial

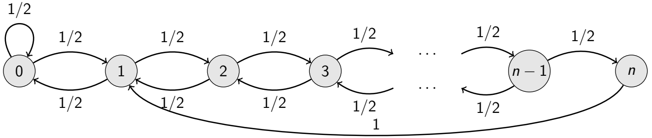
Problema k-SAT de decisão: Dada uma fórmula lógica na FNC onde cada cláusula tem no máximo k literais, existe uma atribuição às variáveis que satisfaça a fórmula?

Exemplo 2-SAT: $(x_1 \vee x_2) \ \wedge \ (x_1 \vee \overline{x_2}) \ \wedge \ (\overline{x_1} \vee x_2)$
Exemplo 2-SAT: $(x_1 \vee x_2) \ \wedge \ (x_1 \vee \overline{x_2}) \ \wedge \ (\overline{x_1} \vee x_2) \ \wedge \ (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$
Literatura: k-SAT é poli $O(n^3)$ p/ $k \leq 2$, mas NP-Completo p/ $k \geq 3$.
Existem algoritmos mais rápidos p/ $k \leq 2$, mas são mais complicados.

Algoritmo probabilístico poli $O(n^2)$ p/ 2-SAT usando Cadeia de Markov.
A partir de uma atribuição qualquer às variáveis, repita $\leq 2 \cdot n(n+1)$ vezes:
• Se há cláusula insatisfeita, tome um literal uniform aleatório dela, mudando valor na atribuição. Caso contrário, retorne a atribuição. One sided error.

Análise por Cadeia de Markov: Suponha que a fórmula seja satisfatível e considere uma atribuição fixa que a satisfaz como sendo os valores "corretos" das variáveis.

Objetivo: obter n valores "corretos" ou alcançar outra atribuição que satisfaz fórmula.



Markov Chain - 2-SAT - algoritmo probabilístico polinomial

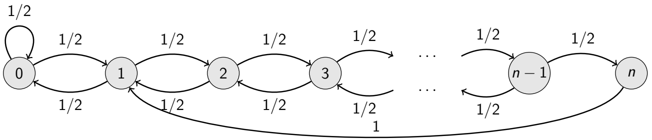
Algoritmo probabilístico poli $O(n^2)$ p/ 2-SAT usando Cadeia de Markov.

A partir de uma atribuição qualquer às variáveis, repita $\leq 2 \cdot n(n+1)$ vezes:

- Se há cláusula insatisfeita, tome um literal uniform aleatório dela, mudando valor na atribuição. Caso contrário, retorne a atribuição. One sided error.

Análise por Cadeia de Markov: Suponha que a fórmual seja satisfatível e considere uma atribuição fixa que a satisfaz como sendo os valores "corretos" das variáveis.

Objetivo: obter n valores "corretos" ou alcançar outra atribuição que satisfaz fórmula.



Em cláusula insatisfeita, pelo menos 1 literal não está c/ valor correto. Prob $\geq 1/2$ de obter mais um valor correto e prob $\leq 1/2$ de diminuir o número de valores corretos.

Número esperado de passos: $\mathbb{E}(X) = n^2 + n - 2$. Repetindo $2n(n+1)$ vezes, temos pela Desigualdade de Markov que a probabilidade de não obter n valores corretos se a fórmula for satisfatível é $\mathbb{P}(X \geq 2 \cdot \mathbb{E}(X)) \leq 1/2$.

Markov Chain - 3SAT - algoritmo probab exponencial

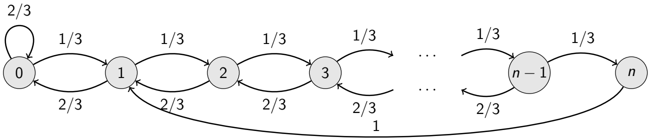
Algoritmo probabilístico expo $O(??)$ p/ 3-SAT usando Cadeia de Markov.

A partir de uma atribuição qualquer às variáveis, repita no máximo ??? vezes:

- Se há cláusula insatisfeita, tome um literal uniform aleatório dela, mudando valor na atribuição. Caso contrário, retorne a atribuição. One sided error.

Análise por Cadeia de Markov: Suponha que a fórmual seja satisfatível e considere uma atribuição fixa que a satisfaz como sendo os valores "corretos" das variáveis.

Objetivo: obter n valores "corretos" ou alcançar outra atribuição que satisfaz fórmula.



Em cláusula insatisfeita, pelo menos 1 literal não está c/ valor correto. Prob $\geq 1/3$ de obter mais um valor correto e prob $\leq 2/3$ de diminuir o número de valores corretos.

Número esperado de passos: $\mathbb{E}(X) =??$. Repetindo $2 \cdot \mathbb{E}(X)$ vezes, temos pela Desigualdade de Markov que a probabilidade de não obter n valores corretos se a fórmula for satisfatível é $\mathbb{P}(X \geq 2 \cdot \mathbb{E}(X)) \leq 1/2$. **Exercício !!**

Markov Chain - Cadeias de Markov em Grafos

Periodicidade do estado i: $\max\{d : P_{i,i}^{n} = 0, \forall n$ não divisível por $d\}$.
Estados de uma mesma classe tem a mesma periodicidade.

Estado i é aperiódico se **(a)** $P_{i,i} > 0$ (laço) ou **(b)** $P_{i,i}^{(k)} > 0$ e $P_{i,i}^{(\ell)} > 0$ para k e ℓ primos entre si ($mdc(k, \ell) = 1$).

Seja G um grafo finito não-direcionado conexo. Seja M_G a cadeia de Markov induzida por G com matriz de transição com valores $P_{u,v} = 1/d(u)$ se v é vizinho de u, e 0 caso contrário, onde $d(u)$ é o grau de u em G.

$\sum_{v=1}^{n} P_{u,v} \; = \; d(u)/d(u) = 1$, onde n é o número de vértices de G.

Lema 6.3/4 (Motwani): $T_{v,v} \; = \; \frac{2m}{d(v)} = \frac{1}{\pi_v}$, se G é não-bipartido.

Prova: G é conexo não-bipartido. Logo M_G tem ciclos ímpares (e pares) p/ cada vértice. Logo, cada estado (vértice) tem periodicidade 1 e M_G é aperiódica.

$\pi_v \; = \; d(v)/2m$ é solução de $\pi = \pi \cdot P$ e $\sum_v \pi_v = 1$. Como M_G é finita, recorrente e aperiódica, a solução é única pelo Teorema Fundamental.

$$(\pi \cdot P)_v = \sum_u \pi_u \cdot P_{u,v} = \sum_{u \in Adj(v)} \left(\frac{d(u)}{2m}\right) \cdot \left(\frac{1}{d(u)}\right) = \sum_{u \in Adj(v)} \frac{1}{2m} = \frac{d(v)}{2m} = \pi_v$$

$$\sum_{v \in V(G)} \pi_v \; = \; \sum_{v \in V(G)} \frac{d(v)}{2m} \; = \; \frac{1}{2m} \sum_{v \in V(G)} d(v) \; = \; \frac{1}{2m} \cdot 2m \; = \; 1$$

Markov Chain - Cadeias de Markov em Grafos

Seja G um grafo finito não-direcionado conexo. Seja M_G a cadeia de Markov induzida por G com matriz de transição com valores $P_{u,v} = 1/d(u)$ se v é vizinho de u, e 0 caso contrário, onde $d(u)$ é o grau de u em G.

Lema 6.3/4 (Motwani): $T_{v,v} = \frac{2m}{d(v)} = \frac{1}{\pi_v}$ se G é não-bipartido.

Lema 6.6 (Motwani): $T_{u,v} + T_{v,u} = 2m \cdot R(u,v) \leq 2m \cdot d(u,v)$, onde $u \neq v$, $R(u,v)$ é a resistência efetiva entre u e v, e $d(u,v)$ é a distância entre u e v (num arestas em um menor caminho).

Para calcular a Resistência efetiva $R(u,v)$, considera-se que cada aresta do grafo representa 1 Ω (ohm) de resistência e que 1A (ampère) de corrente é introduzido em u e removido de v (ou vice-versa).

$R(u,v) \leq \ell/k$ se existem k caminhos entre u e v (disjuntos nas arestas) com tamanho no máximo ℓ (num arestas).