

Lista 3 de Probabilidade e Processos Estocásticos

1. Considere a seguinte variação do problema da coleção de cupons. Cada caixa de cereal contém um cupom de uma coleção de $2n$ cupons. Os cupons são organizados em n pares, de modo que os cupons 1 e 2 formam um par, os cupons 3 e 4 formam um par, e assim por diante. A coleção é considerada completa quando possuímos pelo menos um cupom de cada par.

- a. Qual o número médio de caixas de cereal que devem ser compradas para completar a coleção?
- b. Generalize o resultado anterior para a situação em que existem kn cupons, organizados em n grupos com k cupons cada. Novamente, a coleção é considerada completa quando possuímos pelo menos um cupom de cada grupo.

2. Um modelo simples para o mercado de ações sugere que, a cada dia, uma ação com preço q aumenta o seu valor para qr , onde $r > 1$, com probabilidade p , e diminui seu valor para q/r com probabilidade $1 - p$, independentemente do seu comportamento nos dias anteriores. Suponha que em um determinado dia o preço de uma ação é igual a 1, e seja X_d o preço dessa ação após d dias. Calcule

- a. $E[X_d]$
- b. $Var(X_d)$

3. Seja $0 < p < 1$ um real fixo. Sejam $X_1, X_2, X_3 \dots$ variáveis aleatórias independentes tais que $X_n \sim Binomial(n, p)$. Mostre que as seguintes afirmações ocorrem com probabilidade 1

- (a) Um número infinito dos X_n assume valor exatamente igual a np .
- (b) Somente um número finito dos X_n assume valor menor ou igual a $np/2$.