Lista 2 de Probabilidade e Processos Estocásticos

1. Qual o número esperado de lançamentos de moedas até que as duas últimas sejam Cara? E as três últimas?

2. Seja $\{X_n,\ n \geq 0\}$ uma cadeia de Markov com estados $1, 2, 3$ dado pela matriz P abaixo, onde $P_{i,j}$ (linha i e coluna j) é a probabilidade de ir do estado i para o estado j. Seja $X'_n = \min\{X_n, 2\}$ e seja $X''_n = \max\{X_n, 2\}$. A sequência $\{X'_n,\ n \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov? A sequência $\{X''_n,\ n \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov? Justifique.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Considere a seguinte matriz P e responda:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2/5 & 1/2 & 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 4/5 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Seja E_i o evento de, iniciando no estado i, a cadeia de Markov retornar ao estado i em algum momento futuro. Quem é mais provável? E_2 ou E_5? E_2 ou E_3?

(b) Iniciando no estado 6, qual o número esperado de vezes que o processo entrará nesse estado?

4. Uma partícula se movimenta entre $n + 1$ estados que estão situados em um círculo. A cada passo, a partícula se move no sentido horário com probabilidade p ou no sentido anti-horário com probabilidade $1 - p$. Iniciando em um estado qualquer, calcule a probabilidade de, antes do primeiro retorno àquele estado, a partícula ter visitado todos os outros estados.

5. Um homem possui n guarda-chuvas que ele usa para ir da casa ppara o trabalho e vice-versa. Se chove no início do dia, ele leva um guarda-chuva da casa para o trabalho (se em casa tiver um). Se chover no fim do dia, ele leva um guarda-chuva do trablho para casa (se no trabalho tiver um). Considerando que a probabilidade de chover é p (seja de manhã ou de noite), qual a probabilidade dele se molhar? Ou seja, qual a fração das viagens ele estará sem guarda-chuva?

6. Seja (X_n) uma cadeia de Markov tal que, se $X_{n-1} = k$, então $\mathbb{P}(X_n = k+1) = 1/2$ e $\mathbb{P}(X_n = k-1) = 1/2$. Considere que $X_0 = 0$. Sejam $a > b > 0 > c$ inteiros. Note que, se n é ímpar e b é par, ou vice-versa, então $\mathbb{P}(X_n = b) = 0$. Considere então que n e b são ambos pares ou ambos ímpares. Calcule a probabilidade $\mathbb{P}(X_n = b)$ de X_n ser igual a b. Dizemos que a cadeia tocou o eixo $y = a$ antes de n se $X_{n'}$ é maior ou igual a a para algum $0 < n' \leq n$. Calcule a probabilidade de $X_n = b$ e a cadeia tocar o eixo $y = a$ antes de n. Calcule a probabilidade de $X_n = b$ e a cadeia tocar o eixo $y = a$ e, após o primeiro toque no eixo $y = a$, não tocar o eixo $y = c$ (a cadeia pode tocar o eixo $y = c$ antes do primeiro toque no eixo $y = a$). **Dica:** Reflexão.

7. Seja $\{X_n,\ n \geq 0\}$ uma cadeia de Markov com estados $1, 2, 3, 4, 5, 6$ dada pela matriz P abaixo, onde $P_{i,j}$ (linha i e coluna j) é a probabilidade de ir do estado i para o estado j. Seja $X'_n = \min\{X_n, 4\}$ e seja $X''_n = \max\{X_n, 3\}$. A sequência $\{X'_n,\ n \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov? A sequência $\{X''_n,\ n \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov? Justifique.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2/5 & 1/2 & 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 4/5 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Sobre a cadeia da questão anterior, responda:

(a) Seja E_i o evento de, iniciando no estado i, a cadeia de Markov retornar ao estado i em algum momento futuro. Quem é mais provável? E_2 ou E_5? E_2 ou E_3?

(b) Iniciando no estado 6, qual o número esperado de vezes que o processo entrará nesse estado?

9. Seja (X_n) uma cadeia de Markov tal que, se $X_{n-1} = k$, então $\mathbb{P}(X_n = k+1) = 1/2$ e $\mathbb{P}(X_n = k-1) = 1/2$. Considere que $X_0 = 0$. Sejam $a > b > 0 > c$ inteiros. Note que, se n é ímpar e b é par, ou vice-versa, então $\mathbb{P}(X_n = b) = 0$. Considere então que n e b são ambos pares ou ambos ímpares. Calcule a probabilidade $\mathbb{P}(X_n = b)$ de X_n ser igual a b. Dizemos que a cadeia tocou o eixo $y = a$ antes de n se $X_{n'}$ é maior ou igual a a para algum $0 < n' \leq n$. Calcule a probabilidade de $X_n = b$ e a cadeia tocar o eixo $y = a$ antes de n. Calcule a probabilidade de $X_n = b$ e a cadeia tocar o eixo $y = a$ e, após o primeiro toque no eixo $y = a$, não tocar o eixo $y = c$ (a cadeia pode tocar o eixo $y = c$ antes do primeiro toque no eixo $y = a$). **Dica:** Reflexão.

10. Um cavalo do jogo de xadrez no tabuleiro padrão (8x8) sai de uma quina e se move aleatoriamente (respeitando os movimentos de cavalo). Qual o número esperado de movimentos até voltar para a mesma quina em que havia iniciado?