

Lista 1 de Probabilidade e Processos Estocásticos

1. Considere o problema de calcular a probabilidade do aniversário de uma pessoa ser em uma determinada data. Defina o espaço amostral e a função de probabilidade para os seguintes casos: (a) Ignorando o dia 29 de fevereiro, e (b) Considerando o dia 29 de fevereiro e considerando que ele ocorre de 4 em 4 anos. Considerando o item (b), qual a probabilidade de duas pessoas escolhidas ao acaso terem o mesmo dia de aniversário?
2. Em uma população com N elementos, existem $M \leq N$ que são especiais. Um experimento é feito tomando uma amostra com n elementos distintos dessa população. Seja X a variável aleatória que mede a diferença entre o número de elementos especiais e o número de elementos comuns. Calcule a esperança e a variância de X . Quanto são esses valores para o caso em que $M = N/2$?
3. Suponha que uma moeda não viciada é lançada N vezes. Um *grupo* é uma sequência de lançamentos consecutivos com mesmo valor. Por exemplo, se os lançamentos foram CCCKCCCKKKKKC, temos os seguintes 5 grupos: CCC, K, CCC, KKKKK, C. Qual o número esperado de grupos? Qual o número esperado de grupos de tamanho 1?
4. Sabendo que $E[(X - 1)^2] = a > 0$ e que $E[(X - 2)^2] = b > 0$, calcule esperança e variância de X em função de a e b .
5. Determine explicitamente (ou seja, mostre o número) a probabilidade de se obter 55 ou mais coroas ao lançar 100 vezes uma moeda. Compare este valor com as Desigualdades de Markov, Chebyshev e Chernoff. Faça o mesmo para 550 coroas em 1000 lançamentos.
6. Uma urna contém b bolas brancas e a bolas azuis. As bolas são retiradas ao acaso e sem reposição. Justifique.
 - (a) Calcule a probabilidade que a primeira bola azul seja retirada na $(k + 1)$ -ésima vez.
 - (b) Encontre a probabilidade (incondicional) de que a última bola retirada seja azul.
 - (c) Encontre a probabilidade de que a última, a penúltima e a antepenúltima sejam azuis.
7. O mundo tem hoje em dia 7,5 bilhões de pessoas. A distribuição populacional entre os continentes é a seguinte: Ásia 57%, África 17%, América 14%, Europa 11% e Oceania 1%. Faz-se um sorteio aleatório e uniforme de uma pessoa do mundo. Justifique as respostas.
 - (a) Qual a esperança e desvio padrão do número de pessoas da América selecionadas em 1000 sorteios **com reposição**?
 - (b) Qual a esperança e desvio padrão do número de pessoas da América selecionadas em 1000 sorteios **sem reposição**?
 - (c) Qual o valor esperado de sorteios **com reposição** até se obter alguém da Oceania?
 - (d) Qual o valor esperado de sorteios **com reposição** até se obter 100 pessoas da Oceania?
8. Considerando ainda a questão anterior, responda os itens abaixo e justifique mostrando as contas:
 - (a) Qual o valor esperado de sorteios **sem reposição** até se obter alguém da Oceania?
 - (b) Qual o valor esperado de sorteios **sem reposição** até se obter 100 pessoas da Oceania?
9. O número X de partículas radioativas emitidas por um reator segue uma distribuição de Poisson com taxa λ . Cada partícula pode ser do tipo α ou do tipo β . A probabilidade de uma partícula ser do tipo α é p . Denote por Y o número de partículas do tipo α e por Z o número de partículas do tipo β , de modo que $X = Y + Z$.
 - (a) Encontre a distribuição de Y e de Z .
 - (b) Mostre que Y e Z são independentes.

Dica 1:

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda) \implies \mathbb{P}(X = n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}.$$

Dica 2: Fórmula de Taylor:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$