

# Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos

<https://www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos/>

P. Feofiloff  
Y. Kohayakawa  
Y. Wakabayashi

12/7/2011



# Sumário

<b>1</b>	<b>Conceitos básicos</b>	<b>8</b>
1.1	Grafos	8
1.2	Alguns exemplos de grafos	9
1.3	Isomorfismo	12
1.4	Vizinhanças, cortes e graus	14
1.5	Caminhos e circuitos	16
1.6	Subgrafos	17
1.7	Grafos conexos e componentes	17
1.8	Grafos aleatórios	19
<b>2</b>	<b>Conjuntos estáveis, cliques e coberturas</b>	<b>20</b>
2.1	Conjuntos estáveis máximos	20
2.2	Delimitações inferiores	21
2.3	Delimitações superiores	23
2.4	O índice de estabilidade da maioria dos grafos	24
2.5	Cliques	26
2.6	Coberturas	27
2.7	Considerações computacionais	28
<b>3</b>	<b>Coloração de vértices</b>	<b>29</b>
3.1	Colorações mínimas	29
3.2	Algumas delimitações superiores	30
3.3	Algumas delimitações inferiores	31
3.4	Bicoloração e grafos bipartidos	33
3.5	O número cromático da maioria dos grafos	35
3.6	Considerações computacionais	36

<b>4 Emparelhamentos</b>	<b>37</b>
4.1 Emparelhamentos máximos . . . . .	37
4.2 Delimitação superior . . . . .	38
4.3 Emparelhamentos em grafos bipartidos . . . . .	39
4.4 Emparelhamentos em grafos arbitrários . . . . .	43
4.5 Considerações computacionais . . . . .	47
<b>5 Coloração de arestas</b>	<b>48</b>
5.1 Colorações mínimas . . . . .	48
5.2 Delimitação inferior . . . . .	49
5.3 Grafos bipartidos . . . . .	49
5.4 Delimitação superior . . . . .	51
5.5 Considerações computacionais . . . . .	53
<b>A Dicionário de termos técnicos</b>	<b>54</b>
<b>B Alfabeto grego</b>	<b>56</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>58</b>
<b>Índice Remissivo</b>	<b>59</b>

# Prefácio

Este texto é uma breve introdução à Teoria dos Grafos. Para embarcar nessa introdução, o leitor<sup>1</sup> só precisa ter alguma familiaridade com demonstrações matemáticas formais e com a notação básica da teoria dos conjuntos elementar.

A teoria dos grafos estuda objetos combinatórios — os *grafos* — que são um bom modelo para muitos problemas em vários ramos da matemática, da informática, da engenharia e da indústria. Muitos dos problemas sobre grafos tornaram-se célebres porque são um interessante desafio intelectual e porque têm importantes aplicações práticas.

Nesta breve introdução, vamos nos restringir a quatro temas intimamente relacionados: conjuntos estáveis, coloração de vértices, emparelhamentos e coloração de arestas. Muitos outros temas e problemas, podem ser encontrados nos livros de Bondy–Murty [BM76], Wilson [Wil79], Diestel [Die00], Bollobás [Bol98], Lovász [Lov93], Lovász–Plummer [LP86], Lucchesi [Luc79] e Biggs–Lloyd–Wilson [BLW76].

Mesmo numa breve introdução como esta, é inevitável esbarrar em questões de complexidade computacional, pois muitos dos problemas da teoria dos grafos têm motivação algorítmica. O leitor interessado em aprofundar seus conhecimentos nessa área pode consultar os livros de Garey–Johnson [GJ79], Harel [Har92] e Sipser [Sip97].

Estas notas foram preparadas para um mini-curso na II Bienal da SBM (Sociedade Brasileira de Matemática), realizada em Salvador em outubro de 2004. Uma versão corrigida do texto, bem como bibliografia adicional e apontadores para material na internet, podem ser encontrados em

<https://www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos/>

## Exercícios

O texto contém vários exercícios. Alguns são bastante simples e servem apenas para que o leitor confira seu entendimento do assunto. Outros levantam assuntos que não serão abordados no texto propriamente dito.

---

<sup>1</sup> No que segue, todas as ocorrências de “leitor” devem ser entendidas como “leitora e leitor”. Para nós, as leitoras são pelo menos tão importantes quanto os leitores.

**D** Os exercícios que julgamos difíceis têm prefixo **D**, os muito difíceis têm prefixo **DD**, e os problemas em aberto têm prefixo **A**. O prefixo dos exercícios particularmente fáceis é **F**. Todos os demais têm prefixo **E**.

**F** O leitor não deve sentir-se obrigado a resolver todos os exercícios de uma seção antes de começar a estudar a próxima.

## Recursos na teia WWW

Há muito material de teoria dos grafos na teia WWW. A lista abaixo é um tanto arbitrária: os sítios mencionados não são necessariamente os melhores nem os mais representativos.

- *Graph Theory*, de Stephen Locke: <http://www.math.fau.edu/locke/graphthe.htm>
- *Open Problems – Graph Theory and Combinatorics*, de Douglas West: <http://www.math.uiuc.edu/~west/openp/>
- *Graph Theory*, no MathWorld da Wolfram Research: <http://mathworld.wolfram.com/topics/GraphTheory.html>
- *Teoria dos Grafos*, na Wikipédia: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria\\_dos\\_grafos](https://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria_dos_grafos)
- *Graph Theory*, na Wikipedia: [https://en.wikipedia.org/wiki/Graph\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_theory)
- *The MacTutor History of Mathematics Archive*, sítio de história da matemática na St. Andrews University (Escócia): <http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/HistoryTopics.html>. Veja, em particular, a coleção de biografias de matemáticos em <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html>

## Os autores

Os autores do texto — Paulo Feofiloff, Yoshiharu Kohayakawa e Yoshiko Wakabayashi — são professores do Departamento de Ciência da Computação (<https://www.ime.usp.br/dcc/>) do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

## Agradecimentos

Agradecemos o apoio do MCT/CNPq (Projeto PRONEX Proc. CNPq 664107/1997-4), da FAPESP/CNPq (Projeto Temático/PRONEX Proc. FAPESP Proc. 2003/09925-

5) e do CNPq (Proc. 300334/93-1 e 304527/89-0). Também agradecemos aos organizadores da II Bienal da SBM pela boa vontade com que atenderam os sucessivos pedidos de prorrogação do prazo de entrega do texto.

São Paulo, novembro de 2004  
P. F., Y. K., Y. W.

# Capítulo 1

## Conceitos básicos

Este capítulo formaliza a definição de grafo<sup>1</sup> e introduz os conceitos de isomorfismo, caminho, circuito, subgrafo, conexão, componente e grafo aleatório. Esses conceitos são necessários para estudar os demais capítulos.

Sugerimos que o leitor faça uma primeira leitura superficial deste capítulo e avance imediatamente para o capítulo 2. Mais tarde, ele poderá voltar a este capítulo para rever pontos específicos quando houver necessidade.

### 1.1 Grafos

$V^{(2)}$  Para qualquer conjunto  $V$ , denotaremos por  $V^{(2)}$  o conjunto de todos os pares não-ordenados de elementos de  $V$ . Se  $V$  tem  $n$  elementos então  $V^{(2)}$  tem  $\binom{n}{2} := \frac{n(n-1)}{2}$  elementos. Os elementos de  $V^{(2)}$  serão identificados com os subconjuntos de  $V$  que têm cardinalidade 2. Assim, cada elemento de  $V^{(2)}$  terá a forma  $\{v, w\}$ , sendo  $v$  e  $w$  dois elementos distintos de  $V$ .

$(V, A)$  Um **grafo** é um par  $(V, A)$  em que  $V$  é um conjunto arbitrário e  $A$  é um subconjunto de  $V^{(2)}$ . Os elementos de  $V$  são chamados **vértices** e os de  $A$  são chamados **arestas**. Neste texto, vamos nos restringir a grafos em que o conjunto de vértices é finito.<sup>2</sup>

$vw$  Uma aresta como  $\{v, w\}$  será denotada simplesmente por  $vw$  ou por  $wv$ . Diremos que a aresta  $vw$  **incide** em  $v$  e em  $w$  e que  $v$  e  $w$  são as **pontas** da aresta. Se  $vw$  é uma aresta, diremos que os vértices  $v$  e  $w$  são **vizinhos** ou **adjacentes**.

De acordo com nossa definição, um grafo não pode ter duas arestas diferentes com o mesmo par de pontas (ou seja, não pode ter arestas “paralelas”). Também não pode ter uma aresta com pontas coincidentes (ou seja, não pode ter “laços”). Há quem goste de enfatizar esse aspecto da definição dizendo que o grafo é “simples”.

Muitas vezes é conveniente dar um nome ao grafo como um todo. Se o nome do

---

<sup>1</sup> A palavra “grafo” é um neologismo derivado da palavra *graph* em inglês. Ela foi usada pela primeira vez no sentido que nos interessa aqui pelo matemático inglês [James Joseph Sylvester](#) (1814 – 1897).

<sup>2</sup> Além disso, suporemos quase sempre, tacitamente, que  $V \neq \emptyset$ .



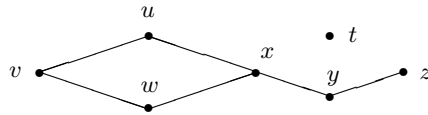


Figura 1.1: Esta figura é um desenho do grafo cujos vértices são  $t, u, v, w, x, y, z$  e cujas arestas são  $vw, uv, xw, xu, yz$  e  $xy$ .

grafo for  $G$ , o conjunto dos seus vértices será denotado por  $V(G)$  e o conjunto das suas arestas por  $A(G)$ . O número de vértices de  $G$  é denotado por  $n(G)$  e o número de arestas por  $m(G)$ ; portanto,

$$n(G) = |V(G)| \quad \text{e} \quad m(G) = |A(G)|.$$

O **complemento** de um grafo  $(V, A)$  é o grafo  $(V, V^{(2)} \setminus A)$ . O complemento de um grafo  $G$  será denotado por  $\overline{G}$ .

Um grafo  $G$  é **completo** se  $A(G) = V(G)^{(2)}$  e **vazio** se  $A(G) = \emptyset$ . A expressão “ $G$  é um  $K_n$ ” é uma abreviatura de “ $G$  é um grafo completo com  $n$  vértices”. A expressão “ $G$  é um  $\overline{K_n}$ ” é uma abreviatura de “ $G$  é um grafo vazio com  $n$  vértices”.

$V(G)$   
 $A(G)$   
 $n(G)$   
 $m(G)$

$\overline{G}$

$K_n$   
 $\overline{K_n}$

## 1.2 Alguns exemplos de grafos

**Exemplo 1.1** Os vértices do grafo são as casas de um tabuleiro de xadrez (generalizado) com  $t$  linhas e  $t$  colunas.<sup>3</sup> Dois vértices são adjacentes se uma dama do jogo de xadrez pode saltar de um deles para o outro em um só movimento. Esse é o grafo **dos movimentos da dama**, ou simplesmente o grafo **da dama**. Para deixar claras as dimensões do tabuleiro, podemos dizer que esse é o grafo **da dama  $t$ -por- $t$** . Quantos vértices e quantas arestas tem o grafo da dama 3-por-3?

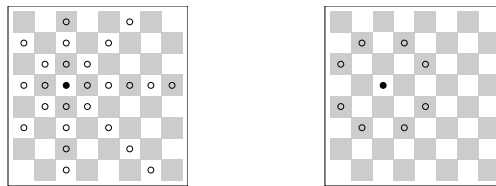


Figura 1.2: Tabuleiros de xadrez 8-por-8. A figura esquerda indica todos os vizinhos do vértice  $\bullet$  no grafo da dama (veja exemplo 1.1). A da direita indica todos os vizinhos do vértice  $\bullet$  no grafo do cavalo (veja exemplo 1.2).

<sup>3</sup> No tabuleiro usual,  $t$  vale 8.

**Exemplo 1.2** Por analogia com o exemplo anterior, definem-se o grafo **do rei**, o grafo **do bispo**, o grafo **do cavalo** e o grafo **da torre**  $t$ -por- $t$ . Quantos vértices e quantas arestas tem o grafo do cavalo 4-por-4?

**Exemplo 1.3** O grafo **das palavras** é definido assim: cada vértice é uma palavra da língua portuguesa e duas palavras são adjacentes se diferem em exatamente uma posição. Por exemplo, *rato* e *ralo* são adjacentes, enquanto *ralo* e *rota* não são. Faça uma figura da parte do grafo definida pelas palavras abaixo:

caiado cavado cavalo girafa girava ralo ramo rata rato remo  
reta reto rota vaiado varado virada virado virava

**Exemplo 1.4** Um **cubo** de dimensão  $k$ , ou  $k$ -**cubo**, é o grafo definido da seguinte maneira: os vértices do grafo são todas as seqüências  $b_1b_2 \cdots b_k$  em que cada  $b_i$  pertence a  $\{0, 1\}$ ; dois vértices são adjacentes se diferem em exatamente uma posição. Faça figuras dos cubos de dimensões 1, 2 e 3.

**Exemplo 1.5** O grafo **dos estados do Brasil** é definido assim: cada vértice é um dos estados da República Federativa do Brasil; dois estados são adjacentes se têm uma fronteira comum. Quantos vértices tem o grafo? Quantas arestas?

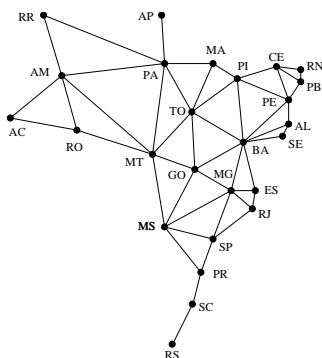


Figura 1.3: Adjacência entre estados do Brasil (veja exemplo 1.5).

**Exemplo 1.6** Seja  $M$  uma matriz simétrica com linhas e colunas indexadas por um conjunto  $V$ . Suponha que  $M_{vv} = 0$  para todo  $v$  em  $V$ . O grafo **da matriz**  $M$  é definido da seguinte maneira: o conjunto de vértices do grafo é  $V$  e dois vértices  $u$  e  $v$  são adjacentes se  $M_{uv} \neq 0$ .

**Exemplo 1.7** A **grade**  $p$ -por- $q$  é o grafo definido assim: o conjunto de vértices é o produto cartesiano  $\{1, 2, \dots, p\} \times \{1, 2, \dots, q\}$  e dois vértices  $(i, j)$  e  $(i', j')$  de  $V$  são adjacentes se  $i = i'$  e  $|j - j'| = 1$  ou se  $j = j'$  e  $|i - i'| = 1$ . (Veja a figura 1.4.) Quantas arestas tem a grade  $p$ -por- $q$ ?

**Exemplo 1.8** Seja  $V$  o conjunto de todos os subconjuntos de  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  que têm exatamente 2 elementos. Digamos que dois elementos  $v$  e  $w$  de  $V$  são adjacentes se  $v \cap w = \emptyset$ . Essa relação de adjacência sobre  $V$  define o grafo de Petersen<sup>4</sup> (veja figura 1.4).

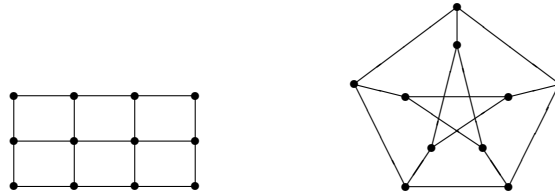


Figura 1.4: Uma grade 3-por-4 (veja exemplo 1.7) e um grafo de Petersen (veja exemplo 1.8).

**Exemplo 1.9** Os hidrocarbonetos conhecidos como alcanos têm fórmula química  $C_pH_{2p+2}$ , onde  $C$  e  $H$  representam moléculas de carbono e hidrogênio respectivamente. As moléculas de alcanos podem ser representadas por grafos como os da figura 1.5.

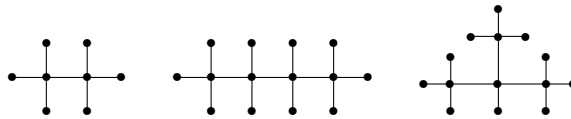


Figura 1.5: Etano ( $C_2H_6$ ), butano ( $C_4H_{10}$ ) e isobutano ( $C_4H_{10}$ ). Os vértices em que incide só aresta representam átomos de hidrogênio ( $H$ ); os demais representam átomos de carbono ( $C$ ). Veja o exemplo 1.9.

**Exemplo 1.10** Sejam  $U$  e  $W$  dois conjuntos mutuamente disjuntos e seja  $A$  o conjunto de todos os pares não-ordenados da forma  $uw$  com  $u \in U$  e  $w \in W$ . Dizemos que  $(U \cup W, A)$  é um **grafo bipartido completo**. Dizemos que esse grafo é um  $K_{p,q}$ , sendo  $p := |U|$  e  $q := |W|$ . (Veja uma generalização desse conceito na seção 3.4.)

$K_{p,q}$

**Exemplo 1.11** Seja  $V$  um conjunto de pontos no plano. Digamos que dois desses pontos são adjacentes se a distância entre eles é menor que 2. Essa relação de adjacência define o grafo **dos pontos no plano** (sobre o conjunto  $V$ ). Faça uma figura do grafo definido pelos pontos abaixo.

- |          |          |          |
|----------|----------|----------|
| $(0, 2)$ | $(1, 2)$ | $(2, 2)$ |
| $(0, 1)$ | $(1, 1)$ | $(2, 1)$ |
| $(0, 0)$ | $(1, 0)$ | $(2, 0)$ |

<sup>4</sup> Julius Petersen (1839 – 1910), matemático dinamarquês.

**Exemplo 1.12** Suponha dados  $k$  intervalos de comprimento finito, digamos  $I_1, \dots, I_k$ , na reta real. Digamos que dois intervalos  $I_i$  e  $I_j$  são adjacentes se  $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ . Essa relação de adjacência define um grafo com conjunto de vértices  $\{I_1, \dots, I_k\}$ . Esse é um grafo **de intervalos**. Faça uma figura do grafo definido pelos intervalos  $[0, 2]$ ,  $[1, 4]$ ,  $[3, 6]$ ,  $[5, 6]$  e  $[1, 6]$ .

**Exemplo 1.13** Seja  $\preceq$  uma relação de ordem parcial sobre um conjunto finito  $V$ . Portanto, a relação é transitiva (se  $x \preceq y$  e  $y \preceq z$  então  $x \preceq z$ ), anti-simétrica (se  $x \preceq y$  e  $y \preceq x$  então  $x = y$ ) e reflexiva ( $x \preceq x$  para todo  $x$ ). Digamos que dois elementos distintos  $x$  e  $y$  de  $V$  são adjacentes se forem comparáveis, ou seja, se  $x \preceq y$  ou  $y \preceq x$ . Essa relação de adjacência define o grafo **de comparabilidade** da relação  $\preceq$ .

**Exemplo 1.14** Um grafo é **planar** se pode ser desenhado no plano sem que as curvas que representam arestas se cruzem. Mostre que o grafo dos estados do Brasil (veja exemplo 1.5) é planar. Mostre que o grafo do 3-cubo (veja exemplo 1.4) é planar. Verifique que  $K_5$  não é planar.

**Exemplo 1.15** Duas arestas de um grafo  $G$  são **adjacentes** se têm uma ponta comum. Essa relação de adjacência define o **grafo das arestas** de  $G$ .<sup>5</sup> Se  $G'$  denota o grafo das arestas de  $G$  então  $V(G') = A(G)$  e cada aresta de  $G'$  é um par  $ab$  em que  $a$  e  $b$  são arestas adjacentes de  $G$ . (Veja a figura 1.6).

Faça uma figura do grafo das arestas de um  $K_3$  e de um  $K_{1,3}$  (veja exemplo 1.10). Faça uma figura do grafo das arestas de um  $K_4$ . Quantos vértices e quantas arestas tem o grafo das arestas de um  $K_n$ ?

Seja  $G$  o grafo das arestas de um  $K_5$ . Desenhe  $\overline{G}$ . Você já viu esse grafo neste texto?

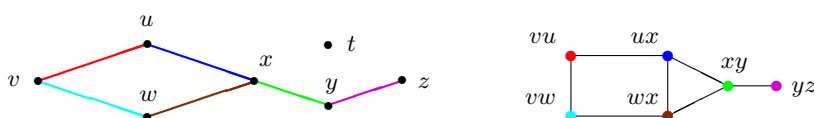


Figura 1.6: Um grafo (esquerda) e seu grafo das arestas (direita).

## 1.3 Isomorfismo

Um **isomorfismo** entre dois grafos  $G$  e  $H$  é uma bijeção  $f$  de  $V(G)$  em  $V(H)$  tal que dois vértices  $v$  e  $w$  são adjacentes em  $G$  se e somente se  $f(v)$  e  $f(w)$  são adjacentes em  $H$ .

<sup>5</sup> Na literatura em inglês, esse grafo é conhecido como *line graph* e denotado por  $L(G)$ . A expressão “grafo das arestas” não é padrão em português.

Dois grafos  $G$  e  $H$  são **isomorfos** se existe um isomorfismo entre eles. Em outras palavras, dois grafos são isomorfos se é possível alterar os nomes dos vértices de um deles de tal modo que os dois grafos fiquem iguais.

Para decidir se dois grafos  $G$  e  $H$  são isomorfos, basta examinar todas as bijeções de  $V(G)$  em  $V(H)$ . Se cada um dos grafos tem  $n$  vértices, esse algoritmo consome tempo proporcional a  $n!$ . Como  $n!$  cresce explosivamente com  $n$ , esse algoritmo é decididamente insatisfatório na prática. Infelizmente, não se conhece um algoritmo substancialmente melhor.<sup>6</sup>

## Exercícios

**E 1.16** Os dois grafos da figura 1.7 são isomorfos? Quais dos grafos da figura 1.8 são isomorfos entre si?

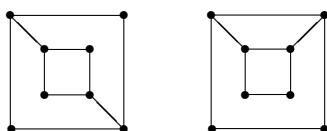


Figura 1.7: Os grafos são isomorfos? Veja exercício 1.16.

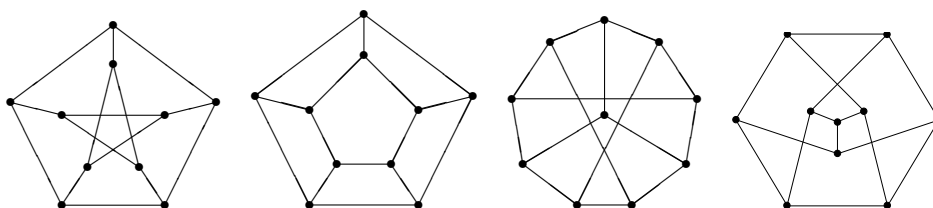


Figura 1.8: Os grafos são isomorfos? Veja exercício 1.16.

**E 1.17** Mostre que o grafo das arestas (veja exemplo 1.15) de um  $K_5$  é isomorfo ao complemento do grafo de Petersen (veja exemplo 1.8).

**E 1.18** Um **automorfismo** de um grafo  $G$  é um isomorfismo de  $G$  em  $G$ . Seja  $\Phi(G)$  o conjunto dos automorfismos de  $G$ . Mostre que  $\Phi(G)$  é um grupo sob a operação de composição. Mostre que  $\Phi(G) = \Phi(\overline{G})$ . Mostre que  $\Phi(K_n)$  é o grupo simétrico sobre  $n$  elementos. Descreva  $\Phi(K_{p,q})$  (veja exemplo 1.10).

<sup>6</sup> Veja os livros de Garey–Johnson [GJ79], Harel [Har92] e Sipser [Sip97].

## 1.4 Vizinhanças, cortes e graus

A **vizinhança** de um conjunto  $X$  de vértices de um grafo  $G$  é o conjunto de todos os vértices que têm algum vizinho em  $X$ .<sup>7</sup> Esse conjunto será denotado por

$$\Gamma_G(X)$$

$\Gamma(X)$  ou simplesmente por  $\Gamma(X)$ . A vizinhança de um vértice  $v$  é o conjunto  $\Gamma(\{v\})$ , que pode ser denotado simplesmente por  $\Gamma(v)$ .

O **corte** associado a (ou **cofronteira de**) um conjunto  $X$  de vértices é o conjunto de todas as arestas que têm uma ponta em  $X$  e outra em  $V(G) \setminus X$ . O corte associado a  $X$  será denotado por<sup>8</sup>

$$\nabla_G(X)$$

$\nabla(X)$  ou simplesmente por  $\nabla(X)$ .<sup>9</sup> É evidente que  $\nabla(\emptyset) = \nabla(V(G)) = \emptyset$ . Se  $v$  é um vértice, podemos escrever  $\nabla(v)$  no lugar de  $\nabla(\{v\})$ .

Um **corte** (ou **cociclo**) em um grafo é qualquer conjunto da forma  $\nabla(X)$ , onde  $X$  é um conjunto de vértices.

O **grau** de um vértice  $v$  é o número de arestas que incidem em  $v$ , ou seja, a cardinalidade do corte  $\nabla(v)$  (igual à cardinalidade de  $\Gamma(v)$ ). O grau de  $v$  em um grafo  $G$  será denotado por

$$g_G(v),$$

$g(v)$  ou simplesmente por  $g(v)$ . O **grau mínimo** de um grafo  $G$  é o número  $\delta(G) := \min\{g(v) : v \in V(G)\}$ . O **grau máximo** do grafo é o número  $\Delta(G) := \max\{g(v) : v \in V(G)\}$ .

Um grafo  $G$  é **regular** se todos os seus vértices têm o mesmo grau, ou seja, se  $\delta(G) = \Delta(G)$ . Um grafo é  **$k$ -regular** se  $g(v) = k$  para todo vértice  $v$ .

**Proposição 1.1** *Em todo grafo, a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas. Ou seja, todo grafo  $(V, A)$  satisfaz a identidade  $\sum_{v \in V} g(v) = 2|A|$ .*

PROVA: Uma aresta com pontas  $x$  e  $y$  contribui uma unidade para  $g(x)$  e uma unidade para  $g(y)$ . Portanto, cada aresta contribui exatamente duas unidades para a soma  $\sum_v g(v)$ .  $\square$

### Exercícios

**F 1.19** É verdade que  $|\Gamma(X)| = |\nabla(X)|$  para todo conjunto  $X$  de vértices?

<sup>7</sup> Nessa definição, a vizinhança de  $X$  pode não ser disjunta de  $X$ . Há quem prefira adotar uma definição ligeiramente diferente e dizer que a vizinhança de  $X$  é o conjunto dos vértices em  $V(G) \setminus X$  que têm algum vizinho em  $X$ .

<sup>8</sup> O nome do símbolo “ $\nabla$ ” é *nabla*. Dizem que a palavra designa uma harpa egípcia. O símbolo é usado em matemática para denotar um operador diferencial. Não confunda “ $\nabla$ ” com “ $\Delta$ ”.

<sup>9</sup> Há quem prefira escrever “ $\delta(X)$ ” no lugar do nosso “ $\nabla(X)$ ”.

**E 1.20** Mostre que todo grafo tem um número par de vértices de grau ímpar.

**E 1.21** Mostre que todo grafo com dois ou mais vértices tem pelo menos dois vértices de mesmo grau.

**E 1.22** Quantas arestas tem o grafo da dama 8-por-8 (veja exemplo 1.1)? Quantas arestas tem o grafo do cavalo 8-por-8?

**E 1.23** Quantas arestas tem o grafo das arestas de um grafo  $G$ ?

**E 1.24** Quais são os graus dos vértices de uma molécula de alcano (veja exemplo 1.9)?

**E 1.25** Mostre que  $\Delta(\overline{G}) = n(G) - \delta(G) - 1$  e  $\delta(\overline{G}) = n(G) - \Delta(G) - 1$  para todo grafo  $G$ .

**E 1.26** Mostre que se  $G$  é um grafo com  $\delta(G) > 0$  e  $m(G) < n(G)$  então  $G$  tem pelo menos dois vértices de grau 1.

**E 1.27** A **matriz de adjacências** de um grafo  $G$  é a matriz  $M$  com linhas e colunas indexadas por  $V(G)$  tal que  $M[u, v] = 1$  se  $uv \in A(G)$  e  $M[u, v] = 0$  em caso contrário. (Compare com o exemplo 1.6.) Qual a matriz de adjacências do grafo definido na figura 1.1? Qual a matriz de adjacências de um  $K_4$ ? Qual a matriz de adjacências de uma grade 3-por-4? Qual a matriz de adjacências de um 3-cubo? Quanto vale a soma dos elementos da linha  $u$  da matriz? Quanto vale a soma dos elementos da coluna  $v$ ?

**F 1.28** Seja  $A$  um conjunto finito. Defina as seguintes operações de soma e multiplicação por escalar para as partes de  $A$ : para quaisquer subconjuntos  $E$  e  $F$  de  $A$ , pomos

$$E + F := (E \setminus F) \cup (F \setminus E), \quad 1 \cdot E = E \quad \text{e} \quad 0 \cdot E = \emptyset.$$

Mostre que a tripla  $(2^A, +, \cdot)$  é um espaço vetorial sobre o corpo dos inteiros módulo 2.

**E 1.29** Dado um grafo  $G$ , seja  $\mathcal{D}(G)$  a coleção de todos os cortes de  $G$ , isto é,  $\mathcal{D}(G) := \{\nabla(X) : X \subseteq V(G)\}$ . Mostre que  $\mathcal{D}(G)$  é um subespaço vetorial do espaço  $(2^{A(G)}, +, \cdot)$  definido no exercício 1.28. Dizemos que  $\mathcal{D}(G)$  é o **espaço dos cortes** (ou **dos cociclos**) de  $G$ .

## 1.5 Caminhos e circuitos

Um **caminho** é qualquer grafo da forma  $(\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i < n\})$ . Em outras palavras, um caminho é um grafo  $C$  cujo conjunto de vértices admite uma permutação  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  tal que

$$\{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n\} = A(C).$$

Os vértices  $v_1$  e  $v_n$  são os **extremos** do caminho. O caminho que acabamos de descrever pode ser denotado simplesmente por  $v_1 v_2 \dots v_n$ . Por exemplo, o grafo  $(\{u, v, w, z\}, \{wz, vz, uw\})$  é um caminho, que pode ser denotado por  $uwzv$ .

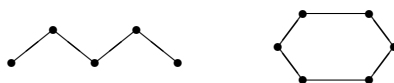


Figura 1.9: Um caminho e um circuito.

Um **circuito**<sup>10</sup> é um grafo da forma  $(\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i < n\} \cup \{v_n v_1\})$ , com  $n \geq 3$ . Em outras palavras, um circuito é um grafo  $O$  com  $n(O) \geq 3$  cujo conjunto de vértices admite uma permutação  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  tal que

$$\{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n\} \cup \{v_n v_1\} = A(O).$$

Esse circuito pode ser denotado simplesmente por  $v_1 v_2 \dots v_n v_1$ .

O **comprimento** de um caminho ou circuito é o número de arestas do grafo. É claro que um caminho de comprimento  $k$  tem  $k + 1$  vértices e um circuito de comprimento  $k$  tem  $k$  vértices. Um **triângulo**, **quadrado**, **pentágono** e **hexágono** é o mesmo que um circuito de comprimento 3, 4, 5 e 6 respectivamente.

Um caminho ou circuito é **par** se tem comprimento par, e **ímpar** se tem comprimento ímpar.

### Exercícios

**E 1.30** Mostre que o complemento de um caminho de comprimento 3 é um caminho de comprimento 3. Mostre que o complemento de um circuito de comprimento 5 é um circuito de comprimento 5.

**E 1.31** Mostre que todo corte de um circuito tem cardinalidade par. Isto é, mostre que, para qualquer conjunto  $X$  de vértices de um circuito  $O$ , o corte  $\nabla_O(X)$  tem cardinalidade par.

<sup>10</sup> Alguns livros dizem “ciclo” no lugar do nosso “circuito”.



## 1.6 Subgrafos

Um **subgrafo** de um grafo  $G$  é qualquer grafo  $H$  tal que  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $A(H) \subseteq A(G)$ . Um subgrafo  $H$  de  $G$  é **próprio** se  $V(H) \neq V(G)$  ou  $A(H) \neq A(G)$ .

O subgrafo de  $G$  **induzido** por um subconjunto  $X$  de  $V(G)$  é o grafo  $(X, B)$  em que  $B$  é o conjunto de todas as arestas de  $G$  que têm ambas as pontas em  $X$ . Esse subgrafo é denotado por

$$G[X].$$

 $G[X]$ 

Para qualquer subconjunto  $X$  de  $V(G)$ , denotaremos por  $G - X$  o subgrafo  $G[V(G) \setminus X]$ . Se  $v$  é um vértice de  $G$  então  $G - v$  é uma abreviatura de  $G - \{v\}$ .

 $G - X$  $G - v$ 

Se  $a$  é uma aresta de  $G$  então  $G - a$  é o grafo  $(V(G), A(G) \setminus \{a\})$ . A propósito, se  $\{x, y\}$  é um elemento de  $V(G)^{(2)}$ , denota-se por  $G + xy$  o grafo  $(V(G), A(G) \cup \{xy\})$ .

 $G - a$  $G + xy$ 

Se um caminho  $v_1 \cdots v_n$  é subgrafo de  $G$ , dizemos simplesmente que  $v_1 \cdots v_n$  é um caminho **em**  $G$  ou que  $G$  **contém** o caminho  $v_1 \cdots v_n$ . Por exemplo, se dissermos que  $uvwz$  é um caminho em  $G$ , devemos entender que  $(\{u, v, w, z\}, \{uv, vw, wz\})$  é um subgrafo de  $G$ . Convenção análoga vale para circuitos que são subgrafos de  $G$ .

### Exercícios

**E 1.32** Seja  $G'$  o grafo das arestas de um grafo  $G$ . Mostre que  $G'$  não contém  $K_{1,3}$  (veja exemplo 1.10) como subgrafo induzido. (Em outras palavras, mostre que não existe subconjunto  $X$  de  $V(G')$  tal que  $G'[X]$  é um  $K_{1,3}$ .)

**E 1.33** Uma **floresta** é um grafo sem circuitos. Mostre que um grafo  $G$  é uma floresta se e somente se cada uma de suas arestas é um corte, ou seja, para cada aresta  $a$  existe um subconjunto  $X$  de  $V(G)$  tal que  $\nabla(X) = \{a\}$ .

**E 1.34** Digamos que um grafo é **par** se todos os seus vértices têm grau par. Dado um grafo  $G$ , seja  $\mathcal{O}(G)$  a coleção dos conjuntos das arestas de todos os subgrafos pares de  $G$ . Mostre que  $\mathcal{O}(G)$  é um subespaço vetorial do espaço  $(2^{A(G)}, +, \cdot)$  definido no exercício 1.28. Dizemos que  $\mathcal{O}(G)$  é o **espaço dos ciclos** de  $G$ .

**E 1.35** Seja  $G$  um grafo e considere os espaços  $\mathcal{O}(G)$  e  $\mathcal{D}(G)$  definidos nos exercícios 1.34 e 1.29 respectivamente. Mostre que  $|O \cap D| \equiv 0 \pmod{2}$  para todo membro  $O$  de  $\mathcal{O}(G)$  e todo membro  $D$  de  $\mathcal{D}(G)$ . (Sugestão: Mostre que  $O$  pode ser escrito como uma união disjunta de circuitos, ou seja, que existem circuitos  $O_1, \dots, O_k$  dois a dois disjuntos nas arestas tais que  $O = A(O_1) \cup \dots \cup A(O_k)$ .)

## 1.7 Grafos conexos e componentes

Um grafo é **conexo** se, para qualquer par  $\{v, w\}$  de seus vértices, existe um caminho com extremos  $v$  e  $w$ . Por exemplo, o grafo do bispo (veja 1.2) não é conexo (a menos que o tabuleiro tenha uma só linha e uma só coluna).

**Proposição 1.2** Um grafo  $G$  é conexo se e somente se  $\nabla(X) \neq \emptyset$  para todo subconjunto próprio e não-vazio  $X$  de  $V(G)$ .

PROVA: Suponha que  $X$  é um subconjunto próprio e não-vazio de  $V(G)$ . Seja  $x$  um elemento de  $X$  e  $y$  um elemento de  $V(G) \setminus X$ . Se  $G$  é conexo então existe um caminho  $C$  em  $G$  com extremos  $x$  e  $y$ . Pelo menos uma das arestas de  $C$  estará, necessariamente, em  $\nabla(X)$ .

Suponha agora que  $\nabla(X) \neq \emptyset$  para todo subconjunto próprio e não-vazio  $X$  de  $V(G)$ . Seja  $v$  um vértice qualquer de  $G$  e seja  $\mathcal{C}$  o conjunto de todos os caminhos em  $G$  que têm um extremo em  $v$ . Seja  $X$  o conjunto dos extremos de todos os elementos de  $\mathcal{C}$ . É evidente que  $X \neq \emptyset$  mas  $\nabla(X) = \emptyset$ . Assim, em virtude de nossas hipóteses, devemos concluir  $X = V(G)$ . Isso mostra que, para qualquer vértice  $w$ , existe um caminho de  $v$  a  $w$ . Portanto,  $G$  é conexo.  $\square$

Um subgrafo conexo  $H$  de um grafo  $G$  é **maximal** se  $H$  não é subgrafo próprio de algum subgrafo conexo de  $G$ . Um **componente** (ou **componente conexo**) de um grafo  $G$  é qualquer subgrafo conexo maximal de  $G$ . É claro que cada vértice de um grafo pertence a um e um só componente. É claro também que um grafo é conexo se e somente se tem um único componente.

## Exercícios

**F 1.36** Verifique que o grafo do cavalo 3-por-3 (veja exemplo 1.2) tem dois componentes: um caminho de comprimento 0 e um circuito de comprimento 8.

**F 1.37** Quantos componentes tem o grafo do bispo  $t$ -por- $t$  (veja exemplo 1.2)?

**E 1.38** Seja  $G$  um grafo tal que  $\Delta(G) \leq 2$ . Mostre que cada componente de  $G$  é um caminho ou um circuito.

**E 1.39** Seja  $G$  um grafo com  $\delta(G) \geq \lfloor n(G)/2 \rfloor$ .<sup>11</sup> Mostre que  $G$  é conexo.

**E 1.40** Seja  $G$  um grafo com  $\delta(G) \geq 3$ . Mostre que  $G$  tem um circuito par.

**E 1.41** Mostre que todo grafo  $G$  satisfaz a desigualdade  $m(G) \geq n(G) - c(G)$ , onde  $c(G)$  é o número de componentes de  $G$ .

**E 1.42** Uma **árvore** é uma floresta (veja exercício 1.33) conexa. (Os grafos discutidos no exemplo 1.9 são árvores.) Mostre que um grafo conexo  $G$  é uma floresta se e somente se, para cada aresta  $a$ , o grafo  $G - a$  não é conexo.

<sup>11</sup> Para qualquer número real  $x$ , denotamos por  $\lfloor x \rfloor$  o único inteiro  $i$  tal que  $i \leq x < i + 1$ .

## 1.8 Grafos aleatórios

Seja  $\mathcal{G}(n)$  a coleção de todos os grafos com conjunto de vértices  $V := \{1, \dots, n\}$ .<sup>12</sup> É claro que

$$|\mathcal{G}(n)| = 2^N, \text{ com } N = \binom{n}{2}.$$

Qualquer propriedade invariante sob isomorfismo (como, por exemplo, a propriedade de ser conexo) define uma subcoleção de  $\mathcal{G}(n)$ . Assim, convém confundir os conceitos de “propriedade” e “subcoleção” de  $\mathcal{G}(n)$ . Diremos que **quase todo grafo** tem determinada propriedade  $\mathcal{P}(n)$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\mathcal{P}(n)|}{|\mathcal{G}(n)|} = 1.$$

Uma forma de se estudar o conjunto  $\mathcal{G}(n)$  é baseada na introdução de uma medida de probabilidade nesse conjunto. Seja  $p$  um número no intervalo  $(0, 1)$  e escolha cada elemento de  $V^{(2)}$ , independentemente, com probabilidade  $p$ . Se  $A$  é o conjunto dos pares escolhidos, então  $(V, A)$  é um **grafo aleatório** em  $\mathcal{G}(n)$ . A probabilidade de que o grafo  $(V, A)$  assim construído seja idêntico a um determinado elemento de  $\mathcal{G}(n)$  que tenha  $m$  arestas é

$$p^m (1 - p)^{N-m}.$$

Se  $p = \frac{1}{2}$  então todos os  $2^N$  grafos em  $\mathcal{G}(n)$  são equiprováveis: a probabilidade de obter qualquer um deles é  $1/2^N$ .

---

<sup>12</sup> Qualquer outro conjunto de cardinalidade  $n$  poderia ser usado no lugar de  $\{1, \dots, n\}$ .

## Capítulo 2

# Conjuntos estáveis, cliques e coberturas

Um conjunto de vértices de um grafo é **estável**<sup>1</sup> se seus elementos são dois a dois não-adjacentes, ou seja, se nenhuma aresta tem ambas as pontas no conjunto. Em outras palavras, um conjunto  $X$  de vértices de um grafo  $G$  é estável se o grafo induzido  $G[X]$  é vazio.

Eis um exemplo. Digamos que meu grafo  $G$  representa a planta de uma cidade: os vértices são as esquinas e as arestas são os trechos de ruas que ligam as esquinas. Quero instalar uma rede de postos de gasolina na cidade. A legislação exige que cada posto fique numa esquina e impede que dois postos fiquem em esquinas adjacentes. Quantos postos no máximo posso instalar na cidade?

Um conjunto estável  $X$  é **maximal** se não faz parte de um conjunto estável maior, ou seja, se  $X$  não é subconjunto próprio de outro conjunto estável. É muito fácil encontrar um conjunto estável maximal: comece com um conjunto estável  $X$  e examine os demais vértices um a um; se o vértice examinado for adjacente a algum dos que estão em  $X$ , descarte-o; caso contrário, acrescente-o a  $X$ . É bem mais difícil — e mais interessante — encontrar um conjunto estável máximo.

### 2.1 Conjuntos estáveis máximos

Um conjunto estável  $X$  é **máximo** se  $|X| \geq |Y|$  para todo conjunto estável  $Y$ . A cardinalidade de um conjunto estável máximo de um grafo  $G$  é denotada por

$$\alpha(G).$$

Vamos nos referir a esse número como **índice de estabilidade** do grafo.

É claro que todo conjunto estável máximo é maximal, mas a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, todo  $K_{1,9}$  (veja exemplo 1.10) tem um conjunto estável maximal de cardinalidade 1 mas o seu índice de estabilidade é 9.

---

<sup>1</sup> Há quem diga “conjunto independente” no lugar do nosso “conjunto estável”.

Eis alguns exemplos. O índice de estabilidade de um  $K_n$  é 1, enquanto o índice de estabilidade de um  $\overline{K_n}$  é  $n$ . Se  $G$  é o grafo da dama 8-por-8 (veja exemplo 1.1) então  $\alpha(G) \geq 7$ , pois é possível colocar 7 damas no tabuleiro de modo que elas não se ataquem mutuamente.<sup>2</sup>

Este capítulo estuda a relação entre o índice de estabilidade e outros parâmetros do grafo. A intuição sugere, por exemplo, que  $\alpha$  é tanto maior quanto menores forem os graus dos vértices. É possível comprovar essa intuição?

## Exercícios

F 2.1 Mostre que, em geral, um conjunto estável máximo num grafo não é único.

E 2.2 Encontre um conjunto estável máximo num circuito de comprimento  $n$ . Encontre um conjunto estável máximo num caminho com  $n$  vértices.

E 2.3 Encontre um conjunto estável máximo na grade  $p$ -por- $q$  (veja exemplo 1.7).

E 2.4 Seja  $G_t$  o grafo da dama  $t$ -por- $t$  (veja exemplo 1.1). Mostre que  $\alpha(G_8) = 8$ . Calcule  $\alpha(G_5)$ ,  $\alpha(G_6)$  e  $\alpha(G_7)$ .

D 2.5 Seja  $G_t$  o grafo da dama  $t$ -por- $t$  (veja exemplo 1.1). Calcule  $\alpha(G_t)$  para todo  $t \geq 9$ .

E 2.6 Encontre um conjunto estável máximo nos grafos do cavalo, do bispo, da torre e do rei (veja exemplo 1.2).

## 2.2 Delimitações inferiores

Para obter uma delimitação inferior de  $\alpha$ , basta encontrar um conjunto estável razoavelmente grande. A delimitação abaixo, por exemplo, usa um conjunto estável *maximal* arbitrário. Ela comprova a intuição de que conjuntos estáveis maximais são tanto maiores quanto menores forem os graus dos vértices.

**Delimitação 2.1** Para todo grafo  $G$  tem-se  $\alpha(G) \geq \frac{n(G)}{\Delta(G) + 1}$ .

PROVA: É suficiente mostrar que todo conjunto estável maximal tem pelo menos  $\frac{n}{\Delta+1}$  vértices. Para qualquer conjunto estável  $X$  tem-se

$$|\nabla(X)| = \sum_{x \in X} g(x).$$

---

<sup>2</sup> É possível colocar mais que 7 damas no tabuleiro?

Suponha agora que  $X$  é maximal. Então cada vértice em  $V(G) \setminus X$  é vizinho de algum vértice em  $X$ , donde  $|V(G) \setminus X| \leq |\nabla(X)|$ . Logo,

$$|V(G) \setminus X| \leq \sum_{x \in X} g(x) \leq |X| \cdot \Delta(G).$$

Segue daí que  $n(G) = |X| + |V(G) \setminus X| \leq |X| \cdot (1 + \Delta(G))$ . Resta apenas observar que  $\alpha(G) \geq |X|$ .  $\square$

A delimitação 2.1 admite uma generalização muito interessante:

**Delimitação 2.2** Para todo grafo  $G$  tem-se  $\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{g(v) + 1}$ .

$h()$  PROVA: Adote a abreviatura  $h_G(\cdot) := (g_G(\cdot) + 1)^{-1}$ . Queremos mostrar que  $\alpha(G) \geq \sum_v h_G(v)$ .

A prova é uma indução em  $n(G)$ . É fácil verificar que a desigualdade vale quando  $n(G) \leq 2$ . Suponha agora que  $n(G) > 2$  e que o resultado é válido para grafos com menos que  $n(G)$  vértices. Seja  $x$  um vértice de grau mínimo e seja  $Y$  o conjunto dos vizinhos de  $x$ , isto é,  $Y := \Gamma(x)$ . Essa escolha de  $x$  garante que

$$\begin{aligned} h_G(x) + \sum_{y \in Y} h_G(y) &\leq h_G(x) + |Y| \cdot h_G(x) \\ &= h_G(x) + g_G(x) h_G(x) \\ &= (1 + g_G(x)) h_G(x) \\ &= 1. \end{aligned}$$

$Z$  Seja  $H$  o subgrafo induzido pelo complemento de  $\{x\} \cup Y$ , isto é,  $H := G[Z]$  com  $Z := V(G) \setminus (Y \cup \{x\})$ . Por hipótese de indução,  $\alpha(H) \geq \sum_{z \in Z} h_H(z)$ . Como  $g_H(z) \leq g_G(z)$  e portanto  $h_H(z) \geq h_G(z)$  para todo  $z$  em  $Z$ , temos

$$\alpha(H) \geq \sum_{z \in Z} h_G(z).$$

Para todo conjunto estável  $S$  em  $H$ , o conjunto  $S \cup \{x\}$  é estável em  $G$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \alpha(G) &\geq 1 + \alpha(H) \\ &\geq 1 + \sum_{z \in Z} h_G(z) \\ &\geq h_G(x) + \sum_{y \in Y} h_G(y) + \sum_{z \in Z} h_G(z) \\ &= \sum_{v \in V(G)} h_G(v), \end{aligned}$$

como queríamos provar.  $\square$

As delimitações discutidas acima são justas: nos grafos completos, por exemplo, tem-se  $\alpha = \lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil$ .<sup>3</sup> (Veja também o exercício 2.8). Mas  $\alpha$  pode ficar arbitrariamente longe de  $n/(\Delta + 1)$  e mesmo de  $\sum 1/(g(v) + 1)$ : num  $K_{p,p}$ , por exemplo (veja exemplo 1.10), temos  $\alpha = p$  enquanto  $\sum 1/(g(v) + 1) < 2$ .

<sup>3</sup> Para qualquer número real  $x$ , denotamos por  $\lceil x \rceil$  o único inteiro  $j$  tal que  $j - 1 < x \leq j$ .

## Exercícios

**F 2.7** Deduza a delimitação 2.1 da delimitação 2.2.

**E 2.8** Seja  $G$  uma união de grafos completos cujos conjuntos de vértices são disjuntos dois a dois. Mostre que  $\alpha(G) = \sum_v (g(v) + 1)^{-1}$ .

**E 2.9** Seja  $G$  o grafo dos estados do Brasil (veja exemplo 1.5). Deduza da delimitação 2.1 que  $\alpha(G) \geq 3$ . Deduza da delimitação 2.2 que  $\alpha(G) \geq 7$ . Encontre o valor exato de  $\alpha(G)$ .

**E 2.10** Aplique as proposições 2.1 e 2.2 ao grafo da dama (veja exemplo 1.1).

**E 2.11** Dados inteiros  $n \geq 1$  e  $m \geq 0$ , seja  $f_n(m)$  o valor mínimo da expressão  $(x_1 + 1)^{-1} + \dots + (x_n + 1)^{-1}$ , onde  $x_1, \dots, x_n$  são inteiros não-negativos tais que  $x_1 + \dots + x_n = 2m$ . (Compare com a delimitação 2.2.) Mostre que  $f_n(m)$  é atingido quando  $|x_i - x_j| \leq 1$  para todo  $i$  e  $j$ . (Sugestão: Verifique antes que  $(a + 1)^{-1} + (b + 1)^{-1} \geq (a + 2)^{-1} + b^{-1}$  quando  $0 \leq a < b$ .) Mostre que  $f_n(m') > f_n(m)$  para inteiros  $n \geq 1$  e  $0 \leq m' < m$ . (Este exercício é uma preparação para o exercício 2.12.)

**E 2.12** Seja  $n$  um inteiro positivo e sejam  $a, k$  e  $r$  inteiros não-negativos tais que  $n = ak + r$  e  $0 \leq r < a$ . Seja  $S$  o grafo que resulta da união de  $r$  cópias do  $K_{k+1}$  e  $a - r$  cópias do  $K_k$  (as cópias são duas a duas disjuntas nos vértices). Observe que

$$n(S) = n, \quad m(S) = r \binom{k+1}{2} + (a - r) \binom{k}{2} \quad \text{e} \quad \alpha(S) = a.$$

Mostre que  $\alpha(G) > \alpha(S)$  para qualquer grafo  $G$  tal que  $n(G) = n$  e  $m(G) < m(S)$ .<sup>4</sup> (Sugestão: veja o exercício 2.11.)

## 2.3 Delimitações superiores

Para estabelecer uma delimitação superior de  $\alpha$ , é preciso provar que *todos* os conjuntos estáveis do grafo são pequenos. Eis uma delimitação superior simples (e muito pobre):

**Delimitação 2.3** Para todo grafo  $G$  tem-se  $\alpha(G) \leq \frac{m(G)}{\delta(G)}$ .

**PROVA:** Para qualquer conjunto estável  $X$ , temos  $m(G) \geq |\nabla(X)| = \sum_{x \in X} g(x) \geq |X| \cdot \delta(G)$ . Logo,  $|X| \leq m(G)/\delta(G)$ .  $\square$

<sup>4</sup> Pode-se provar que  $S$  é o único grafo (a menos de isomorfismo) com  $n$  vértices,  $m(S)$  arestas e índice de estabilidade  $a$ . Este fato é um conhecido teorema de [Paul Turán](#) (1910 – 1976). O complemento de  $S$  é conhecido como **grafo de Turán**.

Uma delimitação superior pode ser usada, às vezes, para comprovar a maximalidade de um conjunto estável. Se  $X$  é um conjunto estável de cardinalidade  $\lfloor m/\delta \rfloor$  então a delimitação acima garante que  $X$  é máximo. Por exemplo, se  $X$  é um conjunto estável com  $p$  vértices em um circuito de comprimento  $2p + 1$ , então  $X$  é máximo porque  $|X| = \lfloor (2p + 1)/2 \rfloor = \lfloor m/\delta \rfloor$ .

Infelizmente,  $\alpha$  fica muito longe de  $m/\delta$  em geral. Em um  $K_n$ , por exemplo, tem-se  $\alpha = 1$  enquanto  $m/\delta = n/2$ .

## Exercícios

**D 2.13** Prove que  $\alpha(G) \leq n(G) - \frac{1}{2}p(G)$ , sendo  $p(G)$  o posto da matriz de adjacências de  $G$  (veja exercício 1.27). Por definição, o posto de uma matriz  $M$  é o número de máximo de colunas linearmente independentes em  $M$ .

**DD 2.14** Mostre que  $\alpha(G) \leq \vartheta(G)$  para todo grafo  $G$ . Aqui,  $\vartheta(G)$  é o número<sup>5</sup>  $\max_X e'Xe$ , sendo o máximo tomado sobre todas as matrizes  $X$  indexadas por  $V(G) \times V(G)$  que são simétricas positivas semidefinidas ( $X \succeq 0$ ),<sup>6</sup> têm traço unitário ( $\sum_i X_{ii} = 1$ ) e têm componentes nulas nas arestas ( $X_{ij} = 0$  para todo  $ij$  em  $A(G)$ ). O símbolo  $e$  denota o vetor de componentes unitários ( $e_i = 1$  para todo  $i$  em  $V(G)$ ) e  $e'$  é o transposto de  $e$ .<sup>7</sup>

## 2.4 O índice de estabilidade da maioria dos grafos

O índice de estabilidade de quase todo grafo (veja seção 1.8) é surpreendentemente baixo se comparado com o número de vértices do grafo:

**Teorema 2.4** *Por menor que seja o número positivo  $\varepsilon$ , temos*

$$\alpha(G) < (2 + \varepsilon) \log_2 n$$

*para quase todo grafo  $G$  em  $\mathcal{G}(n)$ .*

*k* **PROVA:** Seja  $k$  o número  $\lceil (2 + \varepsilon) \log_2 n \rceil$  e denote por  $\mathcal{Q}(n, k)$  o conjunto dos grafos em  $\mathcal{G}(n)$  para os quais  $\alpha \geq k$ . Resta mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\mathcal{Q}(n, k)|}{|\mathcal{G}(n)|} = 0. \quad (2.1)$$

*K* Seja  $X$  um subconjunto de  $V$  com  $k$  elementos. Há uma correspondência biunívoca entre os grafos em  $\mathcal{G}(n)$  nos quais  $X$  é estável e os subconjuntos de  $V^{(2)} \setminus X^{(2)}$ . Logo,  $X$  é estável em  $2^{N-K}$  dos grafos, sendo  $K := \binom{k}{2}$ . Como  $V$  tem  $\binom{n}{k} \leq n^k$

<sup>5</sup> Esse número é conhecido como “função teta de Lovász”.

<sup>6</sup> Uma matriz  $X$  é **positiva semidefinida** se existe uma matriz quadrada  $Y$  tal que  $X = YY'$ , onde  $Y'$  denota a transposta de  $Y$ .

<sup>7</sup> Esta é uma das melhores delimitações superiores que se conhece para  $\alpha$ . Veja os livros de Aigner–Ziegler [AZ98, p.173] e Schrijver [Sch03, p.1152].



subconjuntos de cardinalidade  $k$ , temos

$$|\mathcal{Q}(n, k)| \leq n^k 2^{N-K}, \quad \text{e portanto} \quad \frac{|\mathcal{Q}(n, k)|}{|\mathcal{G}(n)|} \leq n^k 2^{-k(k-1)/2}.$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} 2 \log_2(|\mathcal{Q}(n, k)|/|\mathcal{G}(n)|) &\leq 2k \log_2 n - k(k-1) \\ &= k(1 + 2 \log_2 n - k) \\ &\leq [(2 + \varepsilon) \log_2 n] (1 + 2 \log_2 n - (2 + \varepsilon) \log_2 n) \\ &= [(2 + \varepsilon) \log_2 n] (1 - \varepsilon \log_2 n). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \varepsilon \log_2 n) = -\infty$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{|\mathcal{Q}(n, k)|}{|\mathcal{G}(n)|} = -\infty,$$

e isso prova (2.1).  $\square$

Por exemplo, se  $\varepsilon = 0,2$  então, em virtude de (2.2), temos  $|\mathcal{Q}(1024, 22)| \leq 2^{220-231} |\mathcal{G}(1024)|$  e portanto uma fração de pelo menos  $1 - 2^{-11}$  (mais que 99,9%) dos grafos em  $\mathcal{G}(1024)$  têm  $\alpha < 22$ .

## Exercícios

**E 2.15** Prove que, por menor que seja o número positivo  $\eta$ , temos  $\alpha(G) < n/(2 \log_2 n + 1 + \eta)$  para quase todo grafo  $G$  em  $\mathcal{G}(n)$ . (Sugestão: acompanhe a demonstração do teorema 2.4, tomando  $\varepsilon = (1 + \eta)/\log_2 n$ .)

**E 2.16** Fixe um grafo  $H$  (o grafo de Petersen, por exemplo). Prove que quase todo grafo  $G$  em  $\mathcal{G}(n)$  contém um subgrafo induzido isomorfo a  $H$ . (Suponha que  $H$  tem  $h$  vértices. Escolha partes duas a duas disjuntas  $U_1, \dots, U_m$  de  $V(G)$ , com  $m = \lfloor n/h \rfloor$  e  $|U_i| = h$ . Qual é a probabilidade de *nenhum*  $U_i$  induzir uma cópia de  $H$ ?)

**E 2.17** Prove que quase todo grafo  $G$  em  $\mathcal{G}(n)$  tem diâmetro  $\leq 2$ , isto é, prove que quase todo  $G$  em  $\mathcal{G}(n)$  é tal que, para quaisquer vértices distintos  $u$  e  $v$ , existe em  $G$  um caminho de comprimento no máximo 2 com extremos  $u$  e  $v$ . (Na verdade, quase todo  $G$  em  $\mathcal{G}(n)$  é tal que quaisquer dois vértices  $u$  e  $v$  de  $G$  são extremos de um caminho de comprimento exatamente 2.)

**D 2.18** Prove que quase todo grafo em  $\mathcal{G}(n)$  é conexo.

## 2.5 Cliques

Uma **clique**<sup>8</sup> ou **conjunto completo** num grafo é qualquer conjunto de vértices dois a dois adjacentes. Em outras palavras,  $X$  é uma clique se o grafo induzido  $G[X]$  é completo. Há uma relação óbvia entre cliques e conjuntos estáveis:

**Observação 2.5** *Um conjunto  $X$  de vértices é uma clique em um grafo  $G$  se e somente se  $X$  é estável no grafo complementar  $\overline{G}$ .*

A cardinalidade de uma clique máxima de um grafo  $G$  é denotada por

$$\omega(G).$$

De acordo com a observação acima,  $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$  para todo grafo  $G$ .

### Exercícios

**E 2.19** Encontre uma clique máxima no grafo da dama (veja exemplo 1.1), ou seja, disponha o maior número possível de damas no tabuleiro de modo que elas se ataquem mutuamente. Encontre cliques máximas nos grafos do cavalo, do bispo, da torre e do rei (veja exemplo 1.2).

**E 2.20** Encontre uma clique máxima no grafo dos estados do Brasil (veja exemplo 1.5).

**F 2.21** Mostre que  $\omega(G) \leq \Delta(G) + 1$  para todo grafo  $G$ .

**E 2.22** Deduza delimitações inferiores e superiores para  $\omega(G)$  a partir das delimitações 2.1 e 2.2.

**E 2.23** Seja  $G'$  o grafo das arestas de um grafo  $G$  (veja o exemplo 1.15). Mostre que, para cada vértice  $v$  de  $G$ , o conjunto  $\nabla_G(v)$  é uma clique em  $G'$ . Mostre que o conjunto das arestas de qualquer triângulo em  $G$  é uma clique em  $G'$ . Mostre que  $\Delta(G) = \omega(G')$  se  $\Delta(G) \neq 2$ . Mostre que  $2 \leq \omega(G') \leq 3$  se  $\Delta(G) = 2$ .

**D 2.24** Mostre que  $\omega(G) \geq 3$  para todo grafo  $G$  com mais que  $n(G)^2/4$  arestas. (Veja o exercício 2.12.)

---

<sup>8</sup> A palavra *clique* é um neologismo emprestado do inglês. Uma clique é uma “panelinha”, um grupo exclusivo, um conjunto de pessoas que se conhecem entre si e têm algum interesse comum. Nesse contexto, a palavra não tem nenhuma relação com “estalido”.

**D 2.25** A intuição sugere que, em todo grafo,  $\omega$  é grande se  $\alpha$  for pequeno e vice-versa. Ramsey<sup>9</sup> mostrou que isso de fato é assim para grafos suficientemente grandes. Seja  $r(s, t)$  o menor número natural tal que todo grafo  $G$  com  $n(G) \geq r(s, t)$  tem  $\alpha(G) \geq s$  ou  $\omega(G) \geq t$ . Mostre que

$$r(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}.$$

(Sugestão: mostre que  $r(s, t) \leq r(s-1, t) + r(s, t-1)$  para quaisquer  $s \geq 2$  e  $t \geq 2$ .)<sup>10</sup>

**E 2.26** Seja  $\varepsilon$  um número real positivo fixo e, para todo inteiro  $n \geq 2$ , ponha  $k = \lceil (2 + \varepsilon) \log_2 n \rceil$ . Prove a seguinte delimitação para os números de Ramsey (veja exercício 2.25): existe  $n_0$  tal que  $r(k, k) > n$  para todo  $n \geq n_0$ . (Sugestão: Siga os passos da prova do teorema 2.4.)

**E 2.27** Prove a seguinte delimitação para os números de Ramsey (veja exercício 2.25):  $r(k, k) > 2^{k/2}$  para todo inteiro  $k \geq 2$ . (Essa delimitação é um pouco mais “limpa” que a do exercício 2.26; a idéia central da prova é a mesma.)

## 2.6 Coberturas

Uma **cobertura** de um grafo é qualquer conjunto de vértices que contenha pelo menos uma das pontas de cada aresta. Em outras palavras, um conjunto  $X$  de vértices é uma cobertura se toda aresta do grafo tem pelo menos uma de suas pontas em  $X$ . Há uma relação simples entre coberturas e conjuntos estáveis:

**Observação 2.6** *Em qualquer grafo  $G$ , um conjunto  $X$  de vértices é uma cobertura se e somente se  $V(G) \setminus X$  é um conjunto estável.*

A cardinalidade de uma cobertura mínima de um grafo  $G$  é denotada por<sup>11</sup>

$$\beta(G).$$

Se um guarda postado em um vértice do grafo é capaz de vigiar todas as arestas que incidem no vértice, então  $\beta$  é o número mínimo de guardas necessário para vigiar todas as arestas do grafo.

Segue imediatamente da observação acima que  $\beta(G) = n(G) - \alpha(G)$  para todo grafo  $G$ .

<sup>9</sup> Frank P. Ramsey (1903 – 1930), lógico, matemático, e economista inglês.

<sup>10</sup> A determinação do valor exato do número de Ramsey  $r(s, t)$  é um problema difícil ainda longe de estar resolvido.

<sup>11</sup> O símbolo tradicional para esse número é “ $\beta_0$ ”. Mas nesse texto parece mais apropriado e consistente escrever “ $\beta$ ”.

## Exercícios

F 2.28 Prove a observação 2.6.

E 2.29 Encontre uma cobertura mínima no grafo do cavalo e no grafo do bispo (veja exemplo 1.2).

## 2.7 Considerações computacionais

Para encontrar um conjunto estável máximo num grafo  $G$ , basta examinar todos os subconjuntos de  $V(G)$ . Esse algoritmo consome tempo proporcional a  $2^{n(G)}$ . Como  $2^n$  cresce explosivamente com  $n$ , esse algoritmo é decididamente insatisfatório na prática.<sup>12</sup> Infelizmente, não se conhece um algoritmo que seja substancialmente mais rápido. Suspeita-se mesmo que não existe um algoritmo rápido para essa tarefa.<sup>13</sup>

Tão importante quanto a tarefa de encontrar um conjunto estável máximo é a tarefa de *certificar* a maximalidade de um conjunto estável dado. Para mostrar que um dado conjunto estável  $X$  em um grafo  $G$  é máximo, podemos simplesmente compará-lo com todos os conjuntos estáveis de  $G$ . Mas isso consome tempo proporcional a  $2^{n(G)}$ , o que é inaceitável na prática. Às vezes, uma delimitação superior de  $\alpha(G)$  pode ser usada para certificar a maximalidade de  $X$  (veja observação depois da prova de delimitação 2.3), mas não se conhece uma delimitação suficientemente “poderosa” para certificar um conjunto estável máximo em *qualquer* grafo.

---

<sup>12</sup> Basta dizer que  $2^{500}$  é maior que o número de átomos do universo, de acordo com os cosmólogos.

<sup>13</sup> Veja os livros de Garey–Johnson [GJ79], Harel [Har92] e Sipser [Sip97].

# Capítulo 3

## Coloração de vértices

Uma coloração do conjunto de vértices de um grafo é uma atribuição de cores aos vértices tal que vértices adjacentes recebem cores diferentes. Essa definição pode ser formalizada da seguinte maneira: uma **coloração dos vértices** de um grafo  $G$  é uma partição<sup>1</sup> de  $V(G)$  em conjuntos estáveis. Se  $\{X_1, \dots, X_k\}$  é uma coloração dos vértices de  $G$ , diremos que cada  $X_i$  é uma **cor** da coloração e  $k$  é o **número de cores**.

Imagine que cada vértice do grafo é uma das substâncias químicas que uma certa indústria precisa manter armazenadas. Duas substâncias são adjacentes se podem reagir entre si. Uma coloração dos vértices desse grafo aloca cada substância a um armazém de tal modo que substâncias adjacentes fiquem em armazéns diferentes.

### 3.1 Colorações mínimas

É muito fácil produzir uma coloração dos vértices de um grafo: basta atribuir uma cor diferente a cada vértice! É bem mais difícil encontrar uma coloração com poucas cores.

Uma coloração de vértices é **mínima** se o número de cores é o menor possível, ou seja, se não existe outra coloração com menos cores. O **número cromático** de um grafo  $G$  é o número de cores em uma coloração mínima dos vértices de  $G$ . Esse número é denotado por

$$\chi(G).$$

Se  $\chi(G) \leq k$ , diz-se que  $G$  é **colorível com  $k$  cores**; diz-se também que  $G$  é  **$k$ -colorível**.

Este capítulo estuda a relação entre o número cromático e outros parâmetros do grafo. Ele comprova, por exemplo, a intuição de que  $\chi$  é tanto menor quanto menores os graus dos vértices e tanto maior quanto maiores as cliques.

---

<sup>1</sup> Uma **partição** de um conjunto  $V$  é uma coleção  $\{X_1, \dots, X_k\}$  de subconjuntos não-vazios de  $V$  tal que  $X_1 \cup \dots \cup X_k = V$  e  $X_i \cap X_j = \emptyset$  sempre que  $i \neq j$ .

## Exercícios

**E 3.1** Exiba um grafo com duas colorações mínimas diferentes.

**E 3.2** Mostre que os conjuntos estáveis que compõem uma coloração mínima não são necessariamente máximos. Mais precisamente, exiba uma coloração mínima  $\{X_1, \dots, X_k\}$  em que nenhum dos conjuntos estáveis  $X_i$  é máximo.

**E 3.3** Qual o número cromático do grafo dos estados do Brasil (veja exemplo 1.5)?

**E 3.4** Qual o número cromático do grafo de Petersen (veja exemplo 1.8)?

**E 3.5** Encontre uma coloração mínima dos vértices do grafo da dama  $t$ -por- $t$  (veja o exercício 1.1). Trate inicialmente dos casos  $t = 2, \dots, 6$ .

**E 3.6** Encontre colorações mínimas dos vértices dos grafos do cavalo, do bispo, da torre e do rei (veja exercício 1.2).

**D 3.7** Prove que  $\chi(G) \leq \lambda_{\max}(G) + 1$ , onde  $\lambda_{\max}(G)$  é o maior autovalor da matriz de adjacências de  $G$  (veja exercício 1.27).<sup>2</sup>

**D 3.8** Um museu de arte tem uma grande sala cujo contorno é um polígono fechado, não necessariamente convexo, com  $n$  lados. Queremos postar guardas em alguns dos vértices do polígono de modo que cada ponto da sala possa ser visto por pelo menos um dos guardas (o ângulo de visão de cada guarda só é limitado pelas paredes da sala). Mostre que  $\lfloor n/3 \rfloor$  guardas são suficientes. Mostre que  $\lfloor n/3 \rfloor$  guardas são necessários para certos polígonos.<sup>3</sup>

**DD 3.9** Mostre que  $\chi(G) \leq 4$  para todo grafo planar  $G$  (veja o exemplo 1.14).<sup>4</sup>

## 3.2 Algumas delimitações superiores

Para obter uma delimitação superior do número cromático de um grafo basta mostrar a existência de uma coloração com poucas cores. Eis uma delimitação superior muito simples, que confirma a intuição de que um grafo com poucas arestas tem número cromático pequeno:

**Delimitação 3.1** Para todo grafo  $G$  tem-se  $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m(G) + \frac{1}{4}}$ .

<sup>2</sup> Veja o livro de Biggs [Big74].

<sup>3</sup> Veja o livro de Aigner-Ziegler [AZ98, p.165].

<sup>4</sup> Este é o célebre Teorema das Quatro Cores.

PROVA: Seja  $\{X_1, \dots, X_k\}$  uma coloração mínima. Então, para todo  $i$  e todo  $j$  distinto de  $i$ , existe uma aresta com uma ponta em  $X_i$  e outra em  $X_j$ . Assim,  $m(G) \geq \binom{k}{2} = (k^2 - k)/2$ . Logo,  $k \leq (1 + \sqrt{8m + 1})/2$ .  $\square$

Considere agora uma delimitação mais sofisticada. Ela confirma a intuição de que  $\chi$  é tanto menor quanto menor o grau máximo do grafo.

**Delimitação 3.2** Para todo grafo  $G$  tem-se  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

PROVA: Nossa prova é uma indução no número de vértices. Se  $n(G) = 1$ , a proposição é obviamente verdadeira. Suponha agora que  $n(G) > 1$ . Seja  $x$  um vértice qualquer e  $H$  o grafo  $G - x$ . Por hipótese de indução,  $\chi(H) \leq \Delta(H) + 1$ . Seja  $\{X_1, \dots, X_k\}$  uma coloração mínima de  $H$ . Como  $\Delta(H) \leq \Delta(G)$ , temos

$$k \leq \Delta(G) + 1.$$

Se essa desigualdade é estrita, então  $\{\{x\}, X_1, \dots, X_k\}$  é uma coloração de  $G$  com não mais que  $\Delta(G) + 1$  cores. Suponha agora que  $k = \Delta(G) + 1$ . Como  $g_G(x) \leq \Delta(G) = k - 1$ , o vértice  $x$  é adjacente a não mais que  $k - 1$  cores diferentes. Portanto, existe  $i$  tal que  $X_i \cup \{x\}$  é um conjunto estável. Se substituirmos  $X_i$  por  $X_i \cup \{x\}$  em  $\{X_1, \dots, X_k\}$  teremos uma coloração de  $G$  com  $\Delta(G) + 1$  cores.  $\square$

Embora existam grafos (os completos e os circuitos ímpares, por exemplo) em que  $\chi = \Delta + 1$ , a diferença entre  $\chi$  e  $\Delta$  pode ser arbitrariamente grande (este é o caso, por exemplo, dos grafos  $K_{1,n}$  definidos no exemplo 1.10).

## Exercícios

**D 3.10** Mostre que  $\chi(G) \leq \Delta(G)$  para todo grafo não-regular  $G$ . Mostre algo mais geral: se  $G$  é conexo mas não é um grafo completo nem um circuito ímpar então  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ . (Esse fato é conhecido como Teorema de Brooks<sup>5</sup>.)

## 3.3 Algumas delimitações inferiores

Para obter uma delimitação inferior do número cromático de um grafo é preciso mostrar que *todas* as coloração exigem muitas cores. Eis uma delimitação inferior simples:

**Delimitação 3.3** Para todo grafo  $G$  tem-se  $\chi(G) \geq \frac{n(G)}{\alpha(G)}$ .

PROVA: Seja  $\{X_1, \dots, X_k\}$  uma coloração dos vértices de  $G$ . É claro que  $k \geq \chi(G)$  e  $|X_i| \leq \alpha(G)$  para cada  $i$ . Portanto,  $n(G) = |X_1| + \dots + |X_k| \leq k \cdot \alpha(G)$ . Segue daí que  $k \geq n(G)/\alpha(G)$ .  $\square$

<sup>5</sup> Publicado em 1941 por R. L. Brooks.

Eis outra delimitação inferior, simples mas útil:

**Delimitação 3.4** Para todo grafo  $G$  tem-se  $\chi(G) \geq \omega(G)$ .

PROVA: A desigualdade decorre do seguinte fato óbvio: para qualquer coloração  $\{X_1, \dots, X_k\}$  dos vértices e qualquer clique  $C$  tem-se

$$k \geq |C|.$$

Essa desigualdade vale, em particular, se a coloração é mínima e a clique é máxima. Logo,  $\chi \geq \omega$ .  $\square$

A delimitação inferior 3.4 tem a seguinte consequência interessante: se um grafo  $G$  tem uma coloração de vértices e uma clique de mesma cardinalidade então a coloração é mínima (e a clique é máxima). Assim, para tornar evidente a minimalidade de uma determinada coloração  $\{X_1, \dots, X_k\}$ , é suficiente exibir uma clique com  $k$  vértices.

Considere, por exemplo, o grafo da dama 4-por-4 (veja exemplo 1.1). É fácil encontrar uma coloração do grafo com 5 cores e uma clique com 5 vértices. Portanto, a coloração é mínima e a clique é máxima. Algo semelhante ocorre no grafo da torre  $t$ -por- $t$ .

Infelizmente, a desigualdade da delimitação 3.4 é estrita para muitos grafos. A diferença entre  $\chi$  e  $\omega$  (e até o quociente  $\chi/\omega$ ) podem ser arbitrariamente grandes, embora exemplos desse fenômeno não sejam simples (veja exercício 3.16).

## Exercícios

**E 3.11** O grafo de Catlin<sup>6</sup> é definido da seguinte maneira: comece com um pentágono  $P$ ; troque cada vértice  $v$  de  $P$  por um triângulo  $T_v$  (os triângulos correspondentes a vértices diferentes são disjuntos); finalmente, troque cada aresta  $vw$  de  $P$  por 9 arestas ligando cada vértice de  $T_v$  com cada vértice de  $T_w$ . Encontre uma coloração mínima do grafo de Catlin. Use a delimitação 3.3 para mostrar que sua coloração é, de fato, mínima.

**E 3.12** Mostre que  $\chi(G) = \omega(G)$  se  $G$  é um grafo de intervalos (veja exemplo 1.12). (Sugestão: Faça indução no número de intervalos. Comece por retirar o intervalo cujo extremo direito está mais à esquerda.)

**E 3.13** Mostre que  $\chi(G) = \omega(G)$  se  $G$  é um grafo de comparabilidade (veja exemplo 1.13). (Sugestão: Retire do grafo o conjunto dos vértices que são maximais na ordem parcial. Aplique indução.)

<sup>6</sup> Construído em 1979 por P. A. Catlin.



**E 3.14** Mostre que  $\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$  se  $G$  é um grafo de comparabilidade (veja exemplo 1.13). (Este resultado é conhecido como teorema de Dilworth<sup>7</sup>.)

**E 3.15** Seja  $G$  o grafo do bispo  $t$ -por- $t$  (veja exemplo 1.2). Mostre que  $\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$ .

**D 3.16** Seja  $G_2$  um grafo completo com 2 vértices. A partir desse grafo, a seqüência  $G_3, G_4, \dots, G_k, \dots$  de **grafos de Mycielski**<sup>8</sup> é definida recursivamente como segue. Para cada  $k$  maior que 2, seja  $V_k = \{v_1, \dots, v_n\}$  o conjunto de vértices de  $G_k$ . Seja  $W_{k+1} = \{w_0, w_1, \dots, w_n\}$  um conjunto disjunto de  $V_k$ . O grafo  $G_{k+1}$  tem conjunto de vértices  $V_k \cup W_{k+1}$  e é tal que  $G_{k+1}[V_k] = G_k$  e, para cada  $i \geq 1$ ,  $w_i$  é adjacente em  $G_{k+1}$  a  $w_0$  e a cada um dos vizinhos de  $v_i$  em  $G_k$ . A figura 3.1 ilustra  $G_2, G_3$  e  $G_4$ . Mostre que  $\omega(G_k) = 2$  para cada  $k$ . Mostre que  $\chi(G_k) \geq k$  para cada  $k$ . (Veja o livro de Bondy–Murty [BM76].)

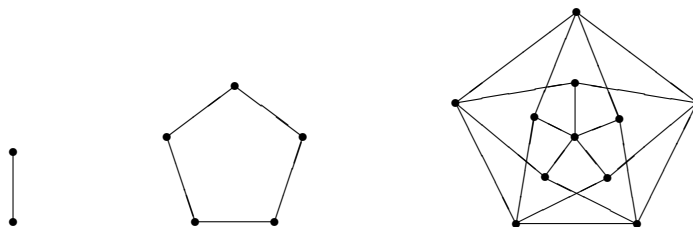


Figura 3.1: Os três primeiros grafos de Mycielski ( $G_2, G_3$  e  $G_4$ ). O terceiro,  $G_4$ , também é conhecido como grafo de Grötzsch. Veja exercício 3.16.

## 3.4 Bicoloração e grafos bipartidos

Um grafo  $G$  é **bicolorível** se  $\chi(G) \leq 2$ , ou seja, se existem conjuntos estáveis  $U$  e  $W$  tais que  $U \cup W = V(G)$  e  $U \cap W = \emptyset$ . Um tal par de conjuntos estáveis é uma **bicoloração** do grafo.

Grafos bicoloríveis são abundantes na natureza. Considere, por exemplo, o grafo cujos vértices são os operários e as máquinas de uma oficina, sendo cada operário adjacente às máquinas que sabe operar.

Grafos bicoloríveis admitem uma caracterização simples e elegante em termos de circuitos ímpares:

**Teorema 3.5** *Um grafo  $G$  é bicolorível se e somente se não tem circuitos ímpares.*

<sup>7</sup> Robert Palmer Dilworth (1914 – 1993), matemático americano.

<sup>8</sup> Construída em 1955 por J. Mycielski.

PROVA: Suponha que  $G$  admite uma bicoloração  $\{U, W\}$ . Os vértices de qualquer circuito estão alternadamente em  $U$  e  $W$  e portanto o circuito é par.

A prova da afirmação recíproca é uma indução no número de arestas do grafo. Se  $m(G) = 0$  então é evidente que  $G$  é bicolorível. Suponha agora que  $m(G) > 0$  e  $G$  não tem circuitos ímpares. Seja  $xy$  uma aresta de  $G$ . Como  $G - xy$  não tem circuitos ímpares, a hipótese de indução garante que  $G - xy$  admite uma bicoloração, digamos  $\{U, W\}$ . Se  $x$  e  $y$  não estão ambos em  $U$  nem ambos em  $W$ , então  $\{U, W\}$  é uma bicoloração de  $G$ . Suponha no que segue que  $x$  e  $y$  estão ambos em  $U$  ou ambos em  $W$ , digamos ambos em  $U$ .

Imagine, por um momento, que  $x$  e  $y$  pertencem ao mesmo componente do grafo  $G - xy$ . Seja  $C$  um caminho em  $G - xy$  com extremos  $x$  e  $y$ . Como  $\{U, W\}$  é uma bicoloração de  $G - xy$ , os vértices de  $C$  estão alternadamente em  $U$  e  $W$  e portanto  $C$  é par. Mas então o circuito  $C + xy$  é ímpar, o que contradiz nossa hipótese sobre a inexistência de circuitos ímpares. Concluimos assim que  $x$  e  $y$  pertencem a componentes distintos de  $G - xy$ .

Seja  $H$  o componente de  $G - xy$  que contém  $x$ . Se trocarmos as cores dos vértices de  $H$ , os vértices  $x$  e  $y$  terão cores distintas e portanto o grafo  $G$  estará bicolorido. Essa bicoloração de  $G$  terá a forma

$$\{U' \cup W'', U'' \cup W'\},$$

onde  $U' := U \cap V(H)$ ,  $U'' := U \setminus V(H)$ ,  $W' := W \cap V(H)$  e  $W'' := W \setminus V(H)$ .  $\square$

O teorema explica por que certos grafos não são bicoloríveis: o único motivo para a inexistência de uma bicoloração é a presença de um circuito ímpar. Por outro lado, um circuito ímpar é um certificado simples e convincente (veja o primeiro parágrafo da prova do teorema) do caráter não-bicolorível do grafo. O teorema é, portanto, uma boa caracterização de grafos bicoloríveis.

Antes de encerrar a seção, é preciso fazer um esclarecimento sobre terminologia. Os termos “bipartido” e “bipartição” são freqüentemente usados como sinônimos de “bicolorível” e “bicoloração” respectivamente.<sup>9</sup> Se  $\{U, W\}$  é uma bipartição do grafo, diz-se que o grafo é  $(U, W)$ -**bipartido**.

## Exercícios

E 3.17 Mostre que o grafo do cavalo (veja exemplo 1.2) é bipartido.

E 3.18 Mostre que o  $k$ -cubo (veja exemplo 1.4) é bicolorível.

E 3.19 Mostre que toda grade (veja exemplo 1.7) é um grafo bicolorível.

E 3.20 Verifique se os grafos da figura 3.2 são bicoloríveis.

<sup>9</sup> A rigor, um grafo é **bipartido** somente se estiver munido de uma bicoloração fixa (note que bicolorações não são únicas em geral). Essa bicoloração é a **bipartição** do grafo.

**F 3.21** Mostre que  $\chi(G) = \omega(G)$  para todo grafo bicolorível  $G$ .

**F 3.22** Seja  $G$  um grafo bicolorível conexo (veja seção 1.7). Mostre que  $G$  tem uma única bicoloração. Em outras palavras, se  $\{U, W\}$  e  $\{U', W'\}$  são bicolorações de  $G$  então  $U = U'$  (e portanto  $W = W'$ ) ou  $U = W'$  (e portanto  $W = U'$ ).

**D 3.23** Mostre que  $m(G) \leq n(G)^2/4$  para todo grafo bicolorível  $G$ . (Isso é um caso especial do exercício 2.24.)

**A 3.24** Encontre uma boa caracterização da classe  $\{G : \chi(G) \leq 3\}$  dos grafos tricoloríveis.

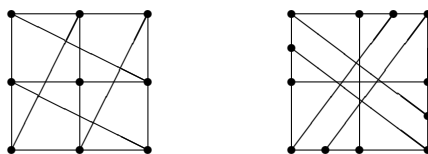


Figura 3.2: Exercício 3.20. Esses grafos são bicoloríveis?

## 3.5 O número cromático da maioria dos grafos

O número cromático de quase todos os grafos (veja seção 1.8) é surpreendentemente alto se comparado com o número de vértices do grafo:

**Teorema 3.6** *Por menor que seja o número positivo  $\varepsilon$ , temos*

$$\chi(G) > \frac{1}{2 + \varepsilon} \frac{n}{\log_2 n}$$

*para quase todo grafo  $G$  em  $\mathcal{G}(n)$ .*

**PROVA:** De acordo com a delimitação 3.3, o número cromático de todo grafo  $G$  satisfaz a desigualdade

$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}.$$

De acordo com o teorema 2.4, para qualquer  $\varepsilon > 0$  e para quase todo  $G$  em  $\mathcal{G}(n)$ , temos  $\alpha(G) < (2 + \varepsilon) \log_2 n$ . Isso prova o resultado.  $\square$

Por exemplo, se  $\varepsilon = 0,2$  então  $|\mathcal{Q}(1024, 22)| \leq 2^{-11} |\mathcal{G}(1024)|$  e portanto uma fração de pelo menos  $1 - 2^{-11}$  (mais que 99,9%) dos grafos em  $\mathcal{G}(1024)$  têm  $\chi \geq 47 = \lceil \frac{1024}{22} \rceil$ .

Pode-se mostrar (embora isso não seja fácil)<sup>10</sup> que a delimitação inferior dada pelo teorema 3.6 é bastante justa: por menor que seja o número  $\varepsilon$  no intervalo aberto  $(0, 2)$ , tem-se

$$\chi(G) < \frac{1}{2 - \varepsilon} \frac{n}{\log_2 n}$$

para quase todo grafo  $G$  em  $\mathcal{G}(n)$ .

### 3.6 Considerações computacionais

Para encontrar uma coloração mínima dos vértices de um grafo, basta examinar todas as partições do conjunto de vértices.<sup>11</sup> Esse algoritmo consome tempo superior a  $2^n$  para analisar um grafo com  $n$  vértices, o que é decididamente insatisfatório na prática. (Veja o que dissemos na seção 2.7 a respeito da computação do conjunto estável máximo de um grafo.) Infelizmente, não se conhece um algoritmo substancialmente melhor; suspeita-se mesmo que um algoritmo substancialmente melhor não existe.<sup>12</sup>

Outra questão computacional relevante é o da *certificação* de uma coloração mínima dada: que objeto é suficiente exibir para provar a minimalidade da coloração? Infelizmente, não se conhece (exceto no caso da bicoloração) um certificado que seja substancialmente melhor que a comparação da coloração dada com cada uma das demais colorações do grafo.

<sup>10</sup> Este é um teorema célebre publicado em 1988 por B. Bollobás.

<sup>11</sup> O número  $B(n)$  de partições de um conjunto com  $n$  elementos é conhecido como **número de Bell**. Os números de Bell satisfazem a recorrência  $B(n + 1) = \sum_{k=0}^n B(k) \binom{n}{k}$  e crescem bem mais que  $2^n$ .

<sup>12</sup> Veja os livros de Garey–Johnson [GJ79], Harel [Har92] e Sipser [Sip97].

# Capítulo 4

## Emparelhamentos

Duas arestas de um grafo  $G$  são **adjacentes** se têm uma ponta comum.<sup>1</sup> Um **emparelhamento** num grafo é um conjunto de arestas duas a duas não-adjacentes. Em outras palavras, um emparelhamento é um conjunto  $E$  de arestas tal que  $|E \cap \nabla(v)| \leq 1$  para cada vértice  $v$ .

Eis uma ilustração do conceito de emparelhamento. Suponha que um projeto de engenharia consiste em um grande número de tarefas e que cada tarefa deve ser executada por um time dois operários compatíveis. Gostaríamos de executar o maior número possível de tarefas simultaneamente. A mão de obra disponível pode ser representada por um grafo cujos vértices são os operários e cujas arestas são os pares de operários compatíveis. Um emparelhamento nesse grafo é uma coleção de times que podem atuar simultaneamente.

Um emparelhamento é um tipo particular de conjunto estável: um conjunto  $E$  de arestas de um grafo  $G$  é um emparelhamento se e somente se  $E$  é estável no grafo das arestas de  $G$  (veja o exemplo 1.15). Este capítulo vai mostrar que sabemos bem mais sobre emparelhamentos que sobre conjuntos estáveis.

### 4.1 Emparelhamentos máximos

Um emparelhamento  $E$  é **maximal** se não for parte de um emparelhamento maior, ou seja, se  $E$  não for subconjunto próprio de outro emparelhamento. Encontrar um emparelhamento maximal num grafo é fácil: comece com um emparelhamento arbitrário  $F$  e examine as arestas restantes uma a uma; toda vez que encontrar uma aresta que não é adjacente a nenhuma das que já estão em  $F$ , acrescente-a a  $F$ . É bem mais difícil — e mais interessante — procurar por um emparelhamento máximo.

Um emparelhamento  $E$  é **máximo** se  $|E| \geq |F|$  para todo emparelhamento  $F$ . Denotaremos por

$$\alpha'(G)$$

---

<sup>1</sup> Há quem diga que duas arestas sem ponta comum são **independentes**.

a cardinalidade de um emparelhamento máximo em um grafo  $G$ .<sup>2</sup> Segue imediatamente da observação que fizemos acima que  $\alpha'(G) = \alpha(G')$ , onde  $G'$  é o grafo das arestas de  $G$ .

Um tipo particular de emparelhamento máximo merece atenção especial. Um emparelhamento é **perfeito** se satura  $V(G)$ . Dizemos que um emparelhamento **satura** um conjunto de vértices se satura cada vértice do conjunto e dizemos que um emparelhamento  $E$  **satura** um vértice  $v$  se  $\nabla(v) \cap E \neq \emptyset$ .

É evidente que todo emparelhamento perfeito é máximo. É evidente também que um emparelhamento  $E$  é perfeito se e somente se  $|E| = \frac{1}{2}n(G)$ .

Nem todo grafo tem um emparelhamento perfeito. Isso levanta as seguintes perguntas: Que grafos têm emparelhamentos perfeitos? Que propriedades estruturais de um grafo garantem a existência de um emparelhamento perfeito?

## Exercícios

**F 4.1** Mostre que nem todo emparelhamento maximal é máximo.

**F 4.2** Encontre emparelhamentos máximos em grafos completos, em circuitos e em caminhos.

**F 4.3** Mostre que nem todo grafo tem um emparelhamento perfeito.

**E 4.4** Encontre um emparelhamento máximo na grade  $p$ -por- $q$  (veja exemplo 1.7). Em que condições uma grade  $p$ -por- $q$  tem um emparelhamento perfeito?

**E 4.5** Exiba um emparelhamento perfeito no  $k$ -cubo (veja exemplo 1.4).

**E 4.6** Dois jogadores, digamos  $A$  e  $B$ , se alternam escolhendo vértices num grafo  $G$ . Primeiro,  $A$  escolhe um vértice  $v_0$ . Em seguida,  $B$  escolhe um vértice  $v_1$  adjacente a  $v_0$ . Depois,  $A$  escolhe um vértice  $v_2$  adjacente a  $v_1$  mas diferente de  $v_0$  e de  $v_1$ . E assim por diante. O jogador que não puder fazer um movimento na sua vez, perde o jogo. (Esse jogo é conhecido como *slither*.) Prove que  $B$  tem uma estratégia vencedora se  $G$  tem um emparelhamento perfeito. Prove que  $A$  tem uma estratégia vencedora em caso contrário.

## 4.2 Delimitação superior

É claro que  $\alpha'(G) \leq \frac{1}{2}n(G)$  em todo grafo  $G$ . Mas há uma delimitação superior bem mais interessante:

**Delimitação 4.1** Em qualquer grafo  $G$  tem-se  $\alpha'(G) \leq \beta(G)$ .

<sup>2</sup> Alguns livros escrevem " $\alpha_1$ " ou " $\mu$ " ou ainda " $\nu$ " no lugar do nosso " $\alpha'$ ".

PROVA: A desigualdade decorre da seguinte observação, simples mas fundamental: para qualquer emparelhamento  $E$  e qualquer cobertura  $C$  tem-se

$$|E| \leq |C|.$$

Para justificar essa relação basta observar que há uma injeção de  $E$  em  $C$ : a injeção leva cada aresta  $a$  em uma ponta de  $a$  que está em  $C$  (se  $a$  tiver ambas as pontas em  $C$ , escolha uma delas).

Prova alternativa: considere o grafo  $H := (V(G), E)$  e observe que  $|E| \leq \sum_{v \in C} g_H(v) \leq |C|$ , onde a primeira desigualdade vale porque  $C$  é uma cobertura e a última porque  $E$  é um emparelhamento.  $\square$

A prova da delimitação 4.1 tem a seguinte consequência: se  $|E| = |C|$  então  $E$  é um emparelhamento máximo (e  $C$  uma cobertura mínima). Portanto, para comprovar a maximalidade de um emparelhamento com  $k$  arestas basta exibir uma cobertura com  $k$  vértices. Como veremos adiante, um tal par equicardinal  $(E, C)$  existe em todo grafo bipartido. Infelizmente, para muitos grafos não-bipartidos, um emparelhamento máximo é estritamente menor que qualquer cobertura. Como é possível caracterizar, nesses casos, a maximalidade de um emparelhamento? Discutiremos uma resposta na seção 4.4.

## Exercícios

E 4.7 Exiba um grafo  $G$  tal que  $\alpha'(G) = \beta(G)$ .

E 4.8 Exiba um grafo em que todo emparelhamento é estritamente menor que qualquer cobertura.

E 4.9 Seja  $G$  o grafo do cavalo  $t$ -por- $t$  (veja exemplo 1.2) com  $t \geq 3$ . Mostre que  $\alpha'(G) = \lfloor t^2/2 \rfloor = \beta(G)$ . (Compare com o exercício 2.29.)

E 4.10 Para que valores de  $t$  o grafo do cavalo  $t$ -por- $t$  (veja exemplo 1.2) tem um emparelhamento perfeito?

## 4.3 Emparelhamentos em grafos bipartidos

O estudo dos emparelhamentos de um grafo fica mais simples se o grafo não tem circuitos ímpares. Por isso (veja teorema 3.5), a presente seção restringe a atenção a grafos bipartidos.

### Emparelhamentos que saturam um dos lados

Em que condições um grafo bipartido tem um emparelhamento perfeito? Uma pergunta um pouco mais geral e mais interessante: em que condições um grafo  $(U, W)$ -bipartido admite um emparelhamento que satura  $U$ ?

O seguinte exemplo é o protótipo do nosso problema: dado um conjunto  $U$  de moças e um conjunto  $W$  de rapazes, queremos casar cada moça com um dos rapazes que ela conhece (sem violar a lei da monogamia). Em que condições isso é possível?

Há uma condição necessária muito simples e natural para que nosso problema tenha solução:

**Proposição 4.2** *Se um grafo  $(U, W)$ -bipartido tem um emparelhamento que satura  $U$  então  $|\Gamma(X)| \geq |X|$  para todo subconjunto  $X$  de  $U$ .*

PROVA: Seja  $G$  o grafo em questão e  $E$  um emparelhamento que satura  $U$ . Seja  $H$  o grafo  $(V(G), E)$ . Para qualquer subconjunto  $X$  de  $U$  tem-se  $|\Gamma_G(X)| \geq |\Gamma_H(X)| = |X|$ .  $\square$

Essa condição necessária tem a seguinte consequência imediata: para mostrar que um grafo  $(U, W)$ -bipartido não tem um emparelhamento que satura  $U$ , basta exibir um subconjunto  $X$  de  $U$  tal que  $|\Gamma(X)| < |X|$ .

A prova da recíproca da proposição 4.2 foi publicada em 1935 por Hall<sup>3</sup>:

**Teorema 4.3 (Hall)** *Para qualquer grafo  $(U, W)$ -bipartido, se  $|\Gamma(X)| \geq |X|$  para todo subconjunto  $X$  de  $U$  então o grafo tem um emparelhamento que satura  $U$ .*

PROVA: Seja  $G$  o grafo em questão e suponha que  $|\Gamma_G(X)| \geq |X|$  para todo subconjunto  $X$  de  $U$ . A prova prossegue por indução na cardinalidade de  $U$ . Se  $|U| = 1$  então é claro que o grafo tem um emparelhamento que satura  $U$ . Suponha agora que  $|U| > 1$  e que o resultado vale para todo grafo  $(U', W')$ -bipartido em que  $|U'| < |U|$ . Considere as alternativas a seguir.

ALTERNATIVA 1:  $|\Gamma_G(X)| > |X|$  para todo subconjunto próprio e não-vazio  $X$  de  $U$ . Escolha uma aresta  $uw$ , com  $u$  em  $U$ . Seja  $U' := U \setminus \{u\}$ ,  $W' := W \setminus \{w\}$  e  $G' := G[U' \cup W']$ . É claro que  $G'$  é  $(U', W')$ -bipartido. Observe que

$$|\Gamma_{G'}(X)| = |\Gamma_G(X) \setminus \{w\}| \geq |X|$$

para todo subconjunto  $X$  de  $U'$ . Assim, por hipótese de indução,  $G'$  admite um emparelhamento, digamos  $E'$ , que satura  $U'$ . Finalmente,  $E' \cup \{uw\}$  é um emparelhamento em  $G$  que satura  $U$ .

ALTERNATIVA 2:  $|\Gamma_G(Y)| = |Y|$  para algum subconjunto próprio e não-vazio  $Y$  de  $U$ . Seja  $H$  o subgrafo de  $G$  induzido por  $Y \cup \Gamma_G(Y)$ . É claro que  $H$  é  $(Y, \Gamma_G(Y))$ -bipartido e

$$|\Gamma_H(X)| = |\Gamma_G(X)| \geq |X|$$

para todo subconjunto  $X$  de  $Y$ . A hipótese de indução garante, então, a existência em  $H$  de um emparelhamento  $F$  que satura  $Y$ . Agora considere o subgrafo  $G' :=$

$F$

<sup>3</sup> Philip Hall (1904 – 1982), matemático inglês.



$G[U' \cup W']$ , onde  $U' := U \setminus Y$  e  $W' := W \setminus \Gamma_G(Y)$ . É claro que  $G'$  é  $(U', W')$ -bipartido. Suponha, por um instante, que  $|\Gamma_{G'}(X')| < |X'|$  para algum subconjunto  $X'$  de  $U'$ . Então

$$\begin{aligned} |\Gamma_G(X' \cup Y)| &= |\Gamma_{G'}(X') \cup \Gamma_G(Y)| \\ &\leq |\Gamma_{G'}(X')| + |\Gamma_G(Y)| \\ &< |X'| + |Y| \\ &= |X' \cup Y|. \end{aligned}$$

Essa desigualdade contradiz as hipóteses da presente alternativa. Concluímos assim que  $|\Gamma_{G'}(X')| \geq |X'|$  para todo subconjunto  $X'$  de  $U'$ . Portanto podemos supor, por hipótese de indução, que  $G'$  tem um emparelhamento  $E'$  que satura  $U'$ . Finalmente, é claro que  $F \cup E'$  é um emparelhamento em  $G$  que satura  $U$ .  $\square$

A expressão “teorema de Hall” é muitas vezes usada para designar a união da proposição 4.2 com o teorema 4.3. Essa união constitui uma boa caracterização dos grafos  $(U, W)$ -bipartidos dotados de um emparelhamento que satura  $U$ .

teorema  
de Hall

## Emparelhamentos máximos em grafos bipartidos

A subseção anterior preparou o terreno para a caracterização dos emparelhamentos máximos em grafos bipartidos. Em 1931, König<sup>4</sup> demonstrou a delimitação inferior de  $\alpha'$  que complementa a delimitação superior 4.1:

**Teorema 4.4 (König)** *Em todo grafo bipartido  $G$  tem-se  $\alpha'(G) \geq \beta(G)$ .*

PROVA: Seja  $\{U, W\}$  uma bipartição de  $G$ . Basta provar que existe um emparelhamento tão grande quanto uma cobertura. Seja  $C$  uma cobertura mínima e defina os conjuntos

$C$

$$U_C := U \cap C, \quad W_C := W \cap C, \quad U_{\bar{C}} := U \setminus C \text{ e } W_{\bar{C}} := W \setminus C.$$

Seja  $H$  o subgrafo de  $G$  induzido por  $U_C \cup W_{\bar{C}}$ . É evidente que  $H$  é  $(U_C, W_{\bar{C}})$ -bipartido. Como mostraremos a seguir, a minimalidade de  $C$  garante que  $H$  satisfaz a hipótese do teorema de Hall.

$H$

Seja  $X$  um subconjunto qualquer de  $U_C$ . O conjunto  $(C \setminus X) \cup \Gamma_H(X)$  é uma cobertura de  $G$ , pois toda aresta que tem uma ponta em  $X$  também tem uma ponta em  $\Gamma_H(X)$ . Como a cardinalidade dessa cobertura é  $|C| - |X| + |\Gamma_H(X)|$ , a minimalidade de  $C$  exige que tenhamos

$$|\Gamma_H(X)| \geq |X|.$$

<sup>4</sup> Dénes König (1884 – 1944), matemático húngaro e autor do primeiro livro sobre a teoria dos grafos (*Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Akademischen Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1936).

O teorema 4.3 permite concluir agora que  $H$  tem um emparelhamento  $F$  que satura  $U_C$ . Um argumento simétrico mostra que o subgrafo  $H'$  de  $G$  induzido por  $W_C \cup U_{\bar{C}}$  tem um emparelhamento  $F'$  que satura  $W_C$ . Para concluir, observe que  $F \cup F'$  é um emparelhamento em  $G$  e que

$$|F \cup F'| = |F| + |F'| = |U_C| + |W_C| = |C|,$$

como queríamos provar.  $\square$

A combinação da delimitação 4.1 com o teorema 4.4 é conhecida como “teorema de König” ou “teorema de König–Egerváry”<sup>5</sup>. O teorema pode ser enunciado assim: em todo grafo bipartido  $G$ ,

$$\alpha'(G) = \beta(G),$$

ou seja, um emparelhamento máximo tem a mesma cardinalidade que uma cobertura mínima. Essa igualdade min-max é uma manifestação do teorema da dualidade em programação linear (veja por exemplo, o livro de Chvátal [Chv83]).

## Exercícios

**F 4.11** Mostre que o grafo da figura 4.1 não tem um emparelhamento que sature os cinco vértices que estão na parte superior da figura.

**E 4.12** Suponha dada uma coleção  $\{C_1, \dots, C_k\}$  de subconjuntos de um certo conjunto  $W$ . Imagine que cada elemento de  $W$  é uma pessoa e cada  $C_i$  é o conjunto dos membros de um clube. Queremos escolher um conjunto de representantes distintos dos clubes, ou seja, um conjunto  $w_1, \dots, w_k$  de pessoas tal que  $w_i \in C_i$  para cada  $i$  e  $w_i \neq w_j$  sempre que  $i \neq j$ . Mostre que um tal conjunto de representantes distintos existe se e somente se  $|\bigcup_{i \in I} C_i| \geq |I|$  para todo subconjunto  $I$  de  $\{1, \dots, k\}$ .

**E 4.13** Seja  $G$  um grafo  $(U, W)$ -bipartido tal que  $|U| = |W|$ . Seja  $M$  a matriz indexada por  $U \times W$  e definida por  $M[u, w] = 1$  se  $uw$  é uma aresta de  $G$  e  $M[u, w] = 0$  caso contrário. (Portanto,  $M$  é uma submatriz da matriz de adjacências de  $G$ , definida no exercício 1.27.) O **permanente** da matriz  $M$  é o número<sup>6</sup>

$$\text{perm}(M) := \sum_{\pi} \left( \prod_{u \in U} M[u, \pi(u)] \right),$$

onde a soma se estende a todas as bijeções  $\pi : U \rightarrow W$ . Mostre que o permanente de  $M$  é igual ao número de emparelhamentos perfeitos em  $G$ .<sup>7</sup>

<sup>5</sup> Eugene Egerváry, matemático húngaro.

<sup>6</sup> O permanente tem definição semelhante ao do determinante: no determinante, cada produto  $\prod M[u, \pi(u)]$  é precedido do sinal da permutação  $\pi$ . Existem algoritmos rápidos para calcular o determinante de uma matriz quadrada. No entanto, não se conhece um algoritmo rápido para o cálculo do permanente. Suspeita-se mesmo que um tal algoritmo não existe.

<sup>7</sup> Essa relação entre permanentes e emparelhamentos foi útil para a descoberta de vários dos teoremas estudados neste capítulo (veja o livro de Lovász–Plummer [LP86]).

**E 4.14** Mostre que todo grafo bipartido regular não-vazio tem um emparelhamento perfeito.

**E 4.15** Mostre que todo grafo bipartido  $G$  tem um emparelhamento que satura todos os vértices de grau  $\Delta(G)$ .

**E 4.16** Exiba emparelhamentos máximos e coberturas mínimas nos grafos das figuras 4.1 e 4.2.

**E 4.17** Prove que  $\alpha'(G) = n(G) - \alpha(G)$  para todo grafo bipartido  $G$ .

**E 4.18** Prove que  $\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$  para todo grafo bipartido  $G$ .

**E 4.19** Nossa prova do teorema de König 4.4 depende do teorema de Hall 4.3. Mas os dois teoremas são equivalentes. Deduza o teorema de Hall do teorema de König.

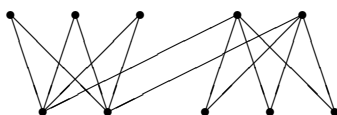


Figura 4.1: Algum emparelhamento satura os cinco vértices na parte superior da figura? Veja exercício 4.11.

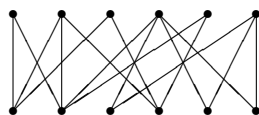


Figura 4.2: Encontre um emparelhamento máximo e uma cobertura mínima. Veja exercício 4.16.

## 4.4 Emparelhamentos em grafos arbitrários

Podemos tratar agora de emparelhamentos em grafos arbitrários (em particular, grafos não-bipartidos). A exemplo do que fizemos na seção anterior, vamos iniciar o estudo com a caracterização de emparelhamentos perfeitos.

### Emparelhamentos perfeitos

A caracterização de emparelhamentos perfeitos em grafos arbitrários exige uma generalização não-trivial do teorema de Hall.

Um componente de um grafo é **ímpar** se tem um número ímpar de vértices. O número de componentes ímpares de um grafo  $G$  será denotado neste capítulo por  $i(G)$ . Há uma condição necessária muito simples para a existência de um emparelhamento perfeito:

 $i(G)$ 

**Proposição 4.5** *Se um grafo  $G$  tem um emparelhamento perfeito então*

$$i(G - S) \leq |S|$$

*para todo conjunto  $S$  de vértices.*

PROVA: Suponha que  $G$  tem um emparelhamento perfeito  $E$  e sejam  $G_1, \dots, G_k$  os componentes ímpares de  $G - S$ . Para cada  $i$ , defina  $V_i := V(G_i)$ . Como  $|V_i|$  é ímpar, temos necessariamente

$$\nabla_G(V_i) \cap E \neq \emptyset.$$

É evidente que cada aresta em  $\nabla_G(V_i)$  tem uma ponta em  $S$ . Para cada  $i$ , escolha uma aresta em  $\nabla_G(V_i) \cap E$  e seja  $s_i$  a ponta dessa aresta em  $S$ . Agora observe que  $i(G - S) = k = |\{s_1, \dots, s_k\}| \leq |S|$ .  $\square$

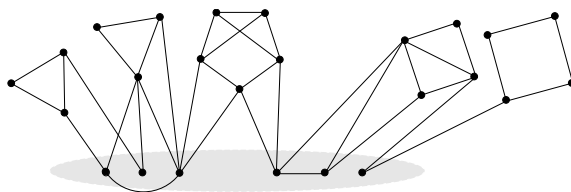


Figura 4.3: Ilustração da condição necessária para a existência de um emparelhamento perfeito. A figura sugere um grafo  $G$  e um conjunto  $S$  (oval cinza) de vértices. O grafo  $G - S$  tem três componentes ímpares e dois pares. Veja a proposição 4.5.

Em virtude da proposição 4.5, um conjunto  $S$  de vértices tal que  $i(G - S) > |S|$  constitui um certificado da inexistência de emparelhamento perfeito. Surpreendentemente, todo grafo desprovido de emparelhamento perfeito possui um tal certificado. Esse fato foi demonstrado em 1947 por Tutte<sup>8</sup>:

**Teorema 4.6 (Tutte)** *Se  $i(G - S) \leq |S|$  para todo conjunto  $S$  de vértices de um grafo  $G$  então  $G$  tem um emparelhamento perfeito.*

ESBOÇO DA PROVA: A prova é uma indução no número de vértices do grafo. Se  $n(G) = 1$  então o resultado é vacuamente verdadeiro (pois  $G$  não satisfaz as

<sup>8</sup> William T. Tutte (1917 – 2002), matemático inglês que viveu muito tempo no Canadá.

hipóteses). Suponha agora que  $n(G) > 1$  e que o resultado é verdadeiro para grafos com menos que  $n(G)$  vértices. Suponha que  $G$  satisfaz as hipóteses e seja  $S_*$  um subconjunto maximal de  $V(G)$  tal que

$$i(G - S_*) = |S_*|.$$

(O conjunto  $S_*$  está bem definido pois  $i(G - s) = 1$  para todo vértice  $s$ .) Sejam  $G_1, \dots, G_k$  os componentes ímpares de  $G - S_*$ , com  $k = i(G - S_*)$ . Sejam  $H_1, \dots, H_l$  os componentes pares de  $G - S_*$ . A maneira como escolhemos  $S_*$  garante o sucesso dos três passos que passamos a descrever.

1. Seja  $F$  o grafo com conjunto de vértices  $\{G_1, \dots, G_k\} \cup S_*$  cujas arestas são todos os pares  $G_i s$  para os quais existe em  $G$  uma aresta da forma  $vs$ , com  $v$  em  $V(G_i)$  e  $s$  em  $S_*$ . O grafo  $F$  é  $(\{G_1, \dots, G_k\}, S_*)$ -bipartido e prova-se que satisfaz as hipóteses do teorema de Hall 4.3. Portanto,  $F$  tem um emparelhamento que satura  $\{G_1, \dots, G_k\}$ .

2. Para cada  $i$  e cada vértice  $v$  em  $G_i$ , prova-se que  $G_i - v$  satisfaz as hipóteses do teorema que estamos procurando provar. Logo,  $G_i - v$  tem um emparelhamento perfeito por hipótese de indução.

3. Prova-se que cada  $H_i$  satisfaz as hipóteses do teorema que estamos procurando provar. Assim, cada  $H_i$  tem um emparelhamento perfeito por hipótese de indução.

Se tomarmos a união dos emparelhamentos descritos em 1, 2 e 3 acima, teremos um emparelhamento perfeito em  $G$ .  $\square$

A expressão “teorema de Tutte” é freqüentemente usada para designar a união da proposição 4.5 com o teorema 4.6. O teorema constitui uma boa caracterização dos grafos dotados de emparelhamentos perfeitos.

teorema de Tutte

## Emparelhamentos máximos

A caracterização dos emparelhamentos máximos em grafos arbitrários está intimamente relacionada com o teorema de Tutte. É conveniente introduzir o seguinte parâmetro  $\gamma$ :<sup>9</sup> para todo grafo  $G$ , seja  $\gamma(G)$  o valor mínimo da expressão

$$\frac{1}{2} n(G) - \frac{1}{2} (i(G - S) - |S|)$$

para todos os subconjuntos  $S$  de  $V(G)$ . Não é difícil estabelecer a seguinte delimitação superior:

**Delimitação 4.7** Para todo grafo  $G$ , tem-se  $\alpha'(G) \leq \gamma(G)$ .

Para provar essa delimitação, basta mostrar que, para todo  $S$ , qualquer emparelhamento deixa de saturar pelo menos  $i(G - S) - |S|$  vértices. Os detalhes da prova são um bom exercício.

<sup>9</sup> A letra “ $\gamma$ ” parece adequada nesse texto, mas não é notação padrão.

Berge<sup>10</sup> mostrou em 1958 a delimitação inferior que complementa 4.7:

**Teorema 4.8 (Berge)** *Para todo grafo  $G$ , tem-se  $\alpha'(G) \geq \gamma(G)$ .*

Para provar o teorema, basta mostrar que existe um emparelhamento  $E^*$  e um conjunto  $S_*$  tais que  $E^*$  deixa de saturar  $i(G - S_*) - |S_*|$  vértices no máximo. Infelizmente, não temos espaço nesse texto para exibir os detalhes da prova. Ela pode ser encontrada nos livros de Diestel [Die00] e Lovász–Plummer [LP86], por exemplo.

A combinação da delimitação 4.7 com o teorema 4.8 é conhecida como “teorema de Tutte–Berge” e pode ser formulada assim: *em qualquer grafo  $G$ ,*

$$\alpha'(G) = \gamma(G).$$

teorema  
de Tutte–  
Berge

## Exercícios

**F 4.20** Suponha que um grafo  $G$  satisfaz a condição  $i(G - S) \leq |S|$  para todo conjunto  $S$  de vértices. Prove, sem usar o teorema 4.6, que  $n(G)$  é par.

**E 4.21** Seja  $G$  um grafo e  $S$  um subconjunto de  $V(G)$ . Mostre que  $i(G - S) \leq i(H - S)$  para qualquer subgrafo  $H$  de  $G$  tal que  $V(H) = V(G)$ .

**E 4.22** Na prova do teorema de Tutte 4.6, mostre que cada grafo  $H_i$  satisfaz a condição  $i(H_i - S) \leq |S|$  para cada conjunto  $S$  de vértices.

**E 4.23** Na prova do teorema de Tutte 4.6, mostre que, para cada  $i$  e cada vértice  $v$  em  $G_i$ , o grafo  $G_i - v$  satisfaz a condição  $i((G_i - v) - S) \leq |S|$  para cada conjunto  $S$  de vértices.

**E 4.24** Na prova do teorema de Tutte 4.6, mostre que o grafo  $F$  satisfaz as hipóteses do teorema de Hall 4.3:  $|\Gamma_F(X)| \geq |X|$  para cada subconjunto  $X$  de  $\{G_1, \dots, G_k\}$ .

**E 4.25** Deduza o teorema de Hall 4.3 do teorema de Tutte 4.6.

**E 4.26** Seja  $G$  um grafo 3-regular sem cortes de tamanho 1 (ou seja, sem conjuntos  $X$  de vértices tais que  $|\nabla(X)| = 1$ ). Mostre que  $G$  tem um emparelhamento perfeito. Mostre que nem todo grafo 3-regular tem um emparelhamento perfeito.

**E 4.27** Prove a delimitação 4.7.

**E 4.28** Deduza o teorema de König 4.4 do teorema de Berge 4.8.

---

<sup>10</sup> Claude Berge (1926 – 2002), matemático francês.

## 4.5 Considerações computacionais

Existem algoritmos rápidos<sup>11</sup> (e muito interessantes) para encontrar um emparelhamento máximo num grafo. O algoritmo específico para grafos bipartidos produz um emparelhamento e uma cobertura de mesma cardinalidade.<sup>12</sup> O algoritmo mais geral aceita qualquer grafo e produz um emparelhamento e um conjunto de vértices que satisfazem a relação estabelecida no teorema 4.8.<sup>13</sup>

---

<sup>11</sup> Os algoritmos consomem tempo limitado por um polinômio no número de vértices do grafo.

<sup>12</sup> Veja os livros de Lovász–Plummer [LP86, p.12], Bondy–Murty [BM76, p.80] e Diestel [Die00, p.30].

<sup>13</sup> O algoritmo foi descoberto em 1965 por Jack Edmonds. Veja o livro de Lovász–Plummer [LP86, p.358].

# Capítulo 5

## Coloração de arestas

Uma coloração do conjunto das arestas de um grafo é uma atribuição de cores às arestas tal que arestas adjacentes recebem cores diferentes. É conveniente formalizar a definição da seguinte maneira: uma **coloração das arestas** de um grafo  $G$  é uma partição de  $A(G)$  em emparelhamentos. Se  $\{E_1, \dots, E_k\}$  é uma tal partição, diremos que cada emparelhamento  $E_i$  é uma **cor** e  $k$  é o **número de cores**.

Uma coloração de arestas é um tipo particular de coloração de vértices. De fato, qualquer coloração das arestas de um grafo  $G$  é uma coloração dos vértices do grafo das arestas de  $G$  (veja o exemplo 1.15). Como mostraremos no restante deste capítulo, sabe-se muito mais sobre a coloração de arestas que sobre a coloração de vértices de um grafo arbitrário.

### 5.1 Colorações mínimas

É fácil encontrar uma coloração das arestas de um grafo: basta pintar cada aresta com uma cor diferente! É mais difícil obter uma coloração com poucas cores.

Uma coloração de arestas é **mínima** se o número de cores é o menor possível, ou seja, se não existe outra coloração que use menos cores. O **índice cromático** de um grafo é o número de cores de uma coloração de arestas mínima. O índice cromático de um grafo  $G$  é denotado por

$$\chi'(G).$$

Segue imediatamente da observação que fizemos ao final da introdução deste capítulo que  $\chi'(G) = \chi(G')$ , onde  $G'$  é grafo das arestas de  $G$ .

#### Exercícios

E 5.1 Mostre que  $\chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$  para todo grafo  $G$ .

E 5.2 Exiba um grafo com duas colorações mínimas diferentes.

E 5.3 Mostre que os emparelhamentos que compõem uma coloração mínima não



são necessariamente máximos. Mais precisamente, exiba uma coloração mínima  $\{E_1, \dots, E_k\}$  em que nenhum dos emparelhamentos  $E_i$  é máximo.

## 5.2 Delimitação inferior

Eis uma delimitação inferior simples mas importante do índice cromático:<sup>1</sup>

**Delimitação 5.1** *Em todo grafo  $G$  tem-se  $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ .*

PROVA: A desigualdade decorre da seguinte observação: para qualquer coloração de arestas com  $k$  cores e qualquer vértice  $v$  tem-se  $k \geq g(v)$ .  $\square$

Essa delimitação inferior tem a seguinte consequência imediata: se uma coloração de arestas usa apenas  $\Delta$  cores então ela é mínima. Portanto, para comprovar a minimalidade de uma coloração basta exibir um vértice cujo grau seja igual ao número de cores.

Como veremos abaixo, todo grafo bipartido admite uma coloração com apenas  $\Delta$  cores. Mas a coloração de muitos grafos não-bipartidos exige mais que  $\Delta$  cores. Que objeto é suficiente exibir, nesses casos, para certificar a minimalidade de uma coloração? Infelizmente, não temos uma boa resposta para essa pergunta.

### Exercícios

E 5.4 Exiba uma coloração mínima das arestas de uma grade  $p$ -por- $q$  (veja exemplo 1.7).

E 5.5 Mostre que  $\chi'(G) = 4$  se  $G$  é o grafo de Petersen.

E 5.6 Mostre que todo grafo bipartido  $k$ -regular admite uma coloração das arestas com apenas  $k$  cores. (Sugestão: veja o teorema de Hall 4.3.)

E 5.7 Mostre que  $\chi'(G) > \Delta(G)$  se  $G$  é um grafo regular não-vazio com número ímpar de vértices.

E 5.8 Mostre que  $\chi'(G) > \Delta(G)$  se  $n(G)$  é ímpar e  $m(G) > \frac{1}{2} \Delta(G) (n(G) - 1)$ .

## 5.3 Grafos bipartidos

O índice cromático de grafos bipartidos tem uma delimitação superior que complementa a delimitação inferior 5.1. Ela foi estabelecida em 1916 por König<sup>2</sup>:

<sup>1</sup> Essa delimitação pode ser vista como consequência da proposição 3.4 aliada ao exercício 2.23.

<sup>2</sup> Dénes König (1884 – 1944), matemático húngaro.

**Teorema 5.2 (König)** Para todo grafo bipartido  $G$  tem-se  $\chi'(G) \leq \Delta(G)$ .

PROVA: Nossa prova é uma indução no número de arestas de  $G$ . Se  $m(G) = 0$ , a proposição é obviamente verdadeira. Suponha agora que  $m(G) > 0$ . Seja  $xy$  uma aresta de  $G$ . Por hipótese de indução, o grafo  $G - xy$  admite uma coloração  $\{E_1, \dots, E_k\}$  com  $k \leq \Delta(G - xy)$  cores. É claro que  $k \leq \Delta(G)$ . Se  $k < \Delta(G)$  então  $\{E_1, \dots, E_k, \{xy\}\}$  é a coloração de  $G$  desejada. Suponha no que segue que  $k = \Delta(G)$ .

Como  $g_G(x) \leq k$ , alguma cor  $E_j$  está ausente em  $x$ , ou seja,  $E_j \cap \nabla_G(x) = \emptyset$ . Analogamente, alguma cor  $E_i$  está ausente em  $y$ . Se  $i = j$  então  $E_i \cup \{xy\}$  é um emparelhamento e portanto se acrescentarmos  $xy$  a  $E_i$  teremos uma coloração de  $G$  com  $\Delta(G)$  cores.

$C$  Suponha agora que  $i \neq j$ . Seja  $C$  o componente do grafo  $(V(G), E_i \cup E_j)$  que contém  $x$ . Como  $E_i$  e  $E_j$  são emparelhamentos e  $E_j$  está ausente em  $x$ ,  $C$  é um caminho e suas arestas estão alternadamente em  $E_i$  e  $E_j$ . Suponha por um instante que  $y$  está em  $C$ . Então  $y$  é um extremo de  $C$ , pois  $E_i$  está ausente em  $y$ . Logo, o comprimento de  $C$  é par e assim  $C + xy$  é um circuito ímpar. Mas  $G$  não tem circuitos ímpares, em virtude do teorema 3.5. Assim, podemos garantir que

$y$  não está em  $C$ .

Considere agora os conjuntos  $F_i := E_i \oplus A(C)$  e  $F_j := E_j \oplus A(C)$ .<sup>3</sup> É fácil verificar que  $F_i \cup \{xy\}$  e  $F_j$  são emparelhamentos mutuamente disjuntos. Portanto, se trocarmos  $E_i$  por  $F_i \cup \{xy\}$  e  $E_j$  por  $F_j$ , teremos uma coloração das arestas de  $G$  com  $\Delta(G)$  cores.  $\square$

A combinação da delimitação inferior 5.1 com a delimitação superior 5.2 dá uma boa caracterização das colorações mínimas de arestas em grafos bipartidos. Ela pode ser reformulada assim:

$$\chi'(G) = \Delta(G)$$

para todo grafo bipartido  $G$ .

## Exercícios

**E 5.9** Exiba colorações mínimas das arestas dos grafos representados nas figuras 4.1 e 4.2.

**E 5.10** Uma escola pode ser representada por um grafo  $(U, W)$ -bipartido: cada vértice em  $U$  é um professor, cada vértice em  $W$  é uma turma de alunos e um professor é adjacente às turmas para as quais deve dar aulas. Uma semana letiva é dividida em períodos (segunda-feira das 8h às 10h, segunda-feira das 10h às 12h, etc.) e cada

<sup>3</sup>  $X \oplus Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \equiv (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$ . Esta é a **diferença simétrica** entre os conjuntos  $X$  e  $Y$ .

período é representado por uma cor. Uma coloração das arestas do grafo é uma programação das aulas da semana. Quantos períodos são necessários e suficientes para cumprir o programa de aulas?<sup>4</sup>

## 5.4 Delimitação superior

É um tanto surpreendente que  $\Delta + 1$  cores são suficientes para colorir as arestas de *qualquer* grafo. Esse fato foi descoberto em 1964 por Vizing<sup>5</sup> (e redescoberto em 1966 por Gupta<sup>6</sup>):

**Teorema 5.3 (Vizing)** *Em todo grafo  $G$  tem-se  $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ .*<sup>7</sup>

PROVA: Nossa prova é uma indução no número de arestas de  $G$ . Se  $m(G) = 0$ , a proposição é trivialmente verdadeira. Suponha agora que  $m(G) > 0$ . Seja  $xy$  uma aresta de  $G$ . Por hipótese de indução, o grafo  $G - xy$  admite uma coloração com não mais que  $\Delta(G - xy) + 1$  cores. Digamos que  $\{E_0, \dots, E_k\}$  é uma tal coloração. É claro que  $k \leq \Delta(G - xy) \leq \Delta(G)$ . Se  $k < \Delta(G)$  então  $\{E_0, \dots, E_k, \{xy\}\}$  é a coloração de  $G$  desejada. No que segue, vamos supor que  $k = \Delta(G)$  e mostrar que  $G$  admite uma coloração com  $k + 1$  cores.

Diremos que uma cor  $E_i$  está **presente** em  $v$  se  $E_i \cap \nabla(v) \neq \emptyset$  e **ausente** em  $v$  em caso contrário. Como temos  $\Delta(G) + 1$ , alguma cor está ausente em cada vértice do grafo.

Um **leque** é uma seqüência  $(xy_0, \dots, xy_j)$  de elementos de  $\nabla(x)$ , distintos dois a dois, dotada da seguinte propriedade: para  $h = 1, \dots, j$ , a cor de  $xy_h$  está ausente em  $y_{h-1}$ .

Seja  $(xy_0, \dots, xy_j)$  um leque maximal. Como  $j < \Delta(G) = k$ , podemos ajustar a notação (permutando  $E_0, \dots, E_k$  se necessário) de modo que

$$xy_h \in E_h \quad \text{e} \quad E_h \text{ está ausente em } y_{h-1}$$

para  $h = 1, \dots, j$ . Temos dois casos a considerar:

**CASO 1:** *alguma cor está ausente em  $y_j$  e em  $x$ .* Podemos supor, sem perda de generalidade, que a cor ausente em  $x$  e  $y_j$  é  $E_0$ . Para  $h = 1, \dots, j$ ,

$$\text{troque } E_h \text{ por } (E_h \setminus \{xy_h\}) \cup \{xy_{h-1}\}.$$

Isso produz uma coloração de  $G - xy_j$ . Agora, aplique a cor  $E_0$  à aresta  $xy_j$ , ou seja, troque  $E_0$  por  $E_0 \cup \{xy_j\}$ . Isso produz a coloração de  $G$  desejada.

**CASO 2:** *toda cor ausente em  $y_j$  está presente em  $x$ .* Seja  $E_i$  uma cor ausente

<sup>4</sup> Este é o “problema da grade de horários” (*timetabling problem*).

<sup>5</sup> Vadim G. Vizing (1937–), matemático russo.

<sup>6</sup> Ram Prakash Gupta.

<sup>7</sup> Convém não confundir a desigualdade  $\chi' \leq \Delta + 1$  com a desigualdade  $\chi \leq \Delta + 1$  discutida no teorema 3.2: as razões para a validade de uma e de outra são muito diferentes.

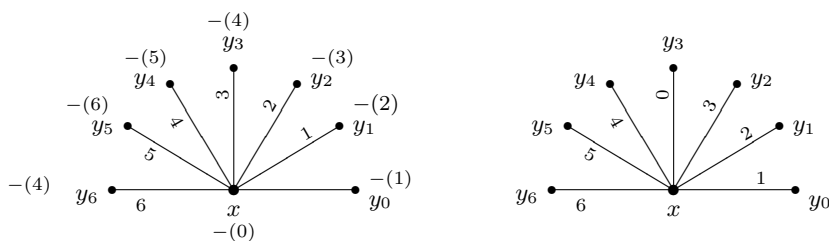


Figura 5.1: Ilustração da prova do teorema de Vizing 5.3. As cores são  $E_0, \dots, E_k$ . Um rótulo  $p$  junto a uma aresta indica que a aresta está em  $E_p$  (a aresta  $xy_0$  não tem cor). Um rótulo  $-(p)$  junto a um vértice indica que  $E_p$  está ausente no vértice. A figura ilustra o subcaso 2A da prova, com  $j = 6$  e  $i = 4$ . O leque à esquerda mostra a coloração no início do subcaso 2A; o leque à direita mostra a coloração no fim do subcaso.

em  $y_j$ . Em virtude da maximalidade do leque,  $i \in \{1, \dots, j-1\}$ . Podemos supor, sem perder generalidade, que  $E_0$  está ausente em  $x$ . Seja  $H$  o grafo induzido por  $E_0 \cup E_i$ :

$$H := (V(G), E_0 \cup E_i).$$

Os componentes desse grafo são caminhos e circuitos. Ademais,  $g_H(x) \leq 1$ ,  $g_H(y_{i-1}) \leq 1$  e  $g_H(y_j) \leq 1$ , uma vez que  $E_0$  está ausente em  $x$  e  $E_i$  está ausente em  $y_{i-1}$  e em  $y_j$ . Assim, os componentes de  $H$  que contêm  $x$ ,  $y_{i-1}$  e  $y_j$  são caminhos. Um dos dois subcasos a seguir se verifica:

**SUBCASO 2A:**  $x$  e  $y_{i-1}$  estão em dois componentes distintos de  $H$ . Seja  $C$  o componente de  $H$  que contém  $y_{i-1}$ . Troque as cores  $E_0$  e  $E_i$  nesse componente. Mais formalmente, seja

$$F_0 := E_0 \oplus A(C) \quad \text{e} \quad F_i := E_i \oplus A(C)$$

e seja  $F_h := E_h$  para todo  $h$  distinto de 0 e de  $i$ . Observe que  $\{F_0, \dots, F_k\}$  é uma coloração de  $G - xy_0$  e  $F_0$  está ausente em  $x$  e em  $y_{i-1}$ . Ademais,  $(xy_0, \dots, xy_{i-1})$  é um leque com relação à nova coloração. Portanto, uma troca de cores análoga à descrita no caso 1 produz uma coloração de  $G$ . Mais especificamente, basta trocar  $F_h$  por  $(F_h \setminus \{xy_h\}) \cup \{xy_{h-1}\}$  para  $h = 1, \dots, i-1$  e trocar  $F_0$  por  $F_0 \cup \{xy_{i-1}\}$  para obter a coloração de  $G$  desejada.

**SUBCASO 2B:**  $x$  e  $y_{i-1}$  estão num mesmo componente de  $H$ . Nesse caso,  $x$  e  $y_j$  estão em componentes diferentes de  $H$ . Seja  $C$  o componente de  $H$  que contém  $y_j$ . Seja  $F_0 := E_0 \oplus A(C)$ ,  $F_i := E_i \oplus A(C)$  e  $F_h := E_h$  para todo  $h$  distinto de 0 e de  $i$ . Observe que  $\{F_0, \dots, F_k\}$  é uma coloração de  $G - xy_0$  e que  $F_0$  está ausente em  $x$  e em  $y_j$ . Como  $y_{i-1}$  não está em  $C$ , a cor  $F_i$  está ausente em  $y_{i-1}$ , e portanto a seqüência  $(xy_0, \dots, xy_j)$  é um leque com relação à nova coloração. Assim, uma troca de cores análoga à descrita no caso 1 produz uma coloração de  $G$ . Mais especificamente, basta trocar  $F_h$

por  $(F_h \setminus \{xy_h\}) \cup \{xy_{h-1}\}$  para  $h = 1, \dots, j$  e trocar  $F_0$  por  $F_0 \cup \{xy_j\}$  para obter a coloração de  $G$  desejada.

Isso encerra a prova.  $\square$

Se combinarmos o teorema 5.3 com a delimitação 5.1, poderemos dizer que o índice cromático todo grafo é conhecido a menos de uma unidade:

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$$

para qualquer grafo  $G$ .

## Exercícios

**E 5.11** Para todo  $n > 1$ , mostre que  $\chi'(K_n) = n$  se  $n$  é ímpar e  $\chi'(K_n) = n - 1$  se  $n$  é par.

**DD 5.12** Mostre que  $\chi'(G) = 3$  para todo grafo 3-regular  $G$  planar (veja exemplo 1.14).<sup>8</sup>

**A 5.13** Encontre uma boa caracterização da classe de grafos  $\{G : \chi'(G) = \Delta(G)\}$ .

## 5.5 Considerações computacionais

A prova do teorema 5.2 induz um algoritmo rápido<sup>9</sup> de coloração das arestas de qualquer grafo bipartido com  $\Delta$  cores. Para grafos arbitrários, a prova do teorema 5.3 induz um algoritmo rápido de coloração com  $\Delta + 1$  cores. Infelizmente, não se conhece um algoritmo rápido capaz de determinar se o índice cromático  $\chi'$  de um dado grafo vale  $\Delta$  ou  $\Delta + 1$ . Suspeita-se mesmo que não existe um algoritmo rápido para essa tarefa.<sup>10</sup>

<sup>8</sup> Este fato é equivalente ao célebre Teorema das Quatro Cores.

<sup>9</sup> O consumo de tempo do algoritmo é limitado por um polinômio no número de vértices do grafo.

<sup>10</sup> Veja os livros de Garey–Johnson [GJ79], Harel [Har92] e Sipser [Sip97].

# Apêndice A

## Dicionário de termos técnicos

Boa parte da literatura da teoria dos grafos está escrita em inglês. A tradução dos termos técnicos para o português não está muito bem estabelecida. O presente texto adota a seguinte correspondência:

inglês	português
<i>almost every</i>	quase todo
<i>bipartite</i>	bipartido
<i>bipartition</i>	bipartição
<i>bishop (in chess)</i>	bispo (do xadrez)
<i>chess</i>	xadrez
<i>chromatic number</i>	número cromático
<i>chromatic index</i>	índice cromático
<i>circuit</i>	circuito
<i>clique</i>	clique
<i>clique number</i>	cardinalidade de clique máxima
<i>coboundary</i>	cofronteira, corte
<i>colorable</i>	colorível
<i>connected</i>	conexo
<i>cut</i>	corte, cofronteira
<i>cycle</i>	ciclo, circuito
<i>degree</i>	grau
<i>edge</i>	aresta
<i>eigenvalue</i>	autovalor
<i>empty</i>	vazio
<i>even</i>	par
<i>forest</i>	floresta
<i>graph</i>	grafo
<i>grid</i>	grade
<i>independence number</i>	índice de estabilidade
<i>independent set</i>	conjunto estável
<i>induced</i>	induzido
<i>isomorphic</i>	isomorfo
<i>isomorphism</i>	isomorfismo
<i>king (in chess)</i>	rei (do xadrez)

inglês	português
<i>knight (in chess)</i>	cavalo (do xadrez)
<i>length</i>	comprimento
<i>line graph</i>	grafo das arestas
<i>lower bound</i>	delimitação inferior
<i>matching</i>	emparelhamento
<i>maximal</i>	maximal
<i>maximum</i>	máximo
<i>minimal</i>	minimal
<i>minimum</i>	mínimo
<i>neighbor</i>	vizinho
<i>neighborhood</i>	vizinhança
<i>null</i>	vazio, nulo
<i>odd</i>	ímpar
<i>path</i>	caminho
<i>pawn (in chess)</i>	peão (do xadrez)
<i>polygon</i>	circuito
<i>queen (in chess)</i>	dama (do xadrez)
<i>random graph</i>	grafo aleatório
<i>rank</i>	posto
<i>rook (in chess)</i>	torre (do xadrez)
<i>set</i>	conjunto
<i>spanning subgraph</i>	subgrafo gerador
<i>stability number</i>	índice de estabilidade
<i>stable</i>	estável
<i>tree</i>	árvore
<i>two-colorable</i>	bicolorível
<i>upper bound</i>	delimitação superior
<i>vertex</i>	vértice
<i>vertex cover</i>	cobertura

# Apêndice B

## Alfabeto grego

A teoria dos grafos, como outras áreas da matemática, recorre freqüentemente ao alfabeto grego:

$\alpha$	A	alfa	$\nu$	N	nü
$\beta$	B	beta	$\xi$	$\Xi$	ksi
$\gamma$	$\Gamma$	gama	$\omicron$	O	ômicron
$\delta$	$\Delta$	delta	$\pi$	$\Pi$	pi
$\varepsilon$	E	epsilon	$\rho$	P	rô
$\zeta$	Z	zeta	$\sigma$	$\Sigma$	sigma
$\eta$	H	eta	$\tau$	T	tau
$\theta$	$\Theta$	teta	$\upsilon$	$\Upsilon$	upsilon
$\iota$	I	iota	$\varphi$	$\Phi$	fi
$\kappa$	K	kapa	$\chi$	X	qui
$\lambda$	$\Lambda$	lambda	$\psi$	$\Psi$	psi
$\mu$	M	mü	$\omega$	$\Omega$	ômega

O símbolo  $\nabla$  não pertence ao alfabeto grego. Dizem que o nome do símbolo — *nabla* — designa uma harpa egípcia. Não confunda  $\nabla$  com  $\Delta$ .



# Bibliografia

- [AZ98] M. Aigner and G.M. Ziegler. *Proofs from THE BOOK*. Springer, 1998. 24, 30
- [Big74] N. Biggs. *Algebraic Graph Theory*, volume 67 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, 1974. 30
- [BLW76] N.L. Biggs, E.K. Lloyd, and R.J. Wilson. *Graph Theory 1736–1936*. Claredon Press, Oxford, 1976. [*História da Teoria dos Grafos, com reprodução de artigos clássicos*]. 5
- [BM76] J.A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph Theory with Applications*. Macmillan/Elsevier, 1976. <http://www.freetechbooks.com/graph-theory-with-applications-t559.html>. 5, 33, 47
- [Bol98] B. Bollobás. *Modern Graph Theory*. Springer, 1998. 5
- [Chv83] V. Chvátal. *Linear Programming*. W.H. Freeman, 1983. 42
- [Die00] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer, 2nd edition, 2000. <http://diestel-graph-theory.com/index.html>. 5, 46, 47
- [GJ79] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and Intractability: a Guide to the Theory of NP-Completeness*. W.H. Freeman, 1979. 5, 13, 28, 36, 53
- [Har92] D. Harel. *Algorithmics: The Spirit of Computing*. Addison-Wesley, 2nd edition, 1992. 5, 13, 28, 36, 53
- [Lov93] L. Lovász. *Combinatorial Problems and Exercises*. North-Holland, second edition, 1993. 5
- [LP86] L. Lovász and M.D. Plummer. *Matching Theory*, volume 29 of *Annals of Discrete Mathematics*. North-Holland, 1986. 5, 42, 46, 47
- [Luc79] C.L. Lucchesi. *Introdução à Teoria dos Grafos*. 12o. Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada), 1979. 5
- [Sch03] A. Schrijver. *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency*. Springer, 2003. 24

- [Sip97] M. Sipser. *Introduction to the Theory of Computation*. PWS Publishing, 1997.  
<http://www-math.mit.edu/~sipser/book.html>. 5, 13, 28, 36, 53
- [Wil79] R.J. Wilson. *Introduction to Graph Theory*. Academic Press, 2nd edition, 1979. 5

# Índice Remissivo

- $V^{(2)}$ , 8
- $V(G)$ , 9
- $A(G)$ , 9
- $n(G)$ , 9
- $m(G)$ , 9
- $K_n$ , 9
- $K_{p,q}$ , 11
- $\Gamma(X)$ , 14
- $\Gamma(v)$ , 14
- $\mathcal{G}(n)$ , 19
- $\nabla(X)$ , 14
- $\delta(X)$ , 14
- $g(v)$ , 14
- $\delta(G)$ , 14
- $\Delta(G)$ , 14
- $\overline{G}$ , 9
- $G[X]$ , 17
- $G - v$ , 17
- $G - X$ , 17
- $G - a$ , 17
- $G + uv$ , 17
- $\alpha$ , 20
- $\alpha'$ , 37
- $\beta$ , 27
- $\gamma$ , 45
- $\omega$ , 26
- $\chi$ , 29
- $\chi'$ , 48
- $i(G)$ , 44
- $[x]$ , 18
- $\lceil x \rceil$ , 22
- $X \oplus Y$ , 50
  
- A**, 6
- $\alpha$ , 20
- $\alpha'$ , 37
- adjacentes
  - arestas, 12, 37
  - vértices, 8
- alcanos, 11
  
- aleatório, 19
- aresta, 8
- arestas
  - adjacentes, 12, 37
  - independentes, 37
  - paralelas, 8
- árvore, 18
- automorfismo, 13
- autovalor, 30
  
- $\beta$ , 27
- Bell, 36
- Berge, 46
- bicoloração, 33
- bicolorível, 33
- bipartição
  - de grafo, 34
- bipartido, 34
  - completo, 11
- bispo do xadrez, 10
- boa caracterização, 34, 41, 45, 50
- Bollobás, 36
- Brooks, 31
  
- caminho, 16
  - ímpar, 16
  - par, 16
- Catlin, 32
- cavalo do xadrez, 10
- certificado, 28, 34, 36, 44
- ciclo, 16
- circuito, 16
  - ímpar, 16, 33
  - par, 16
- clique, 26
  - máxima, 26, 32
- cobertura, 27
  - mínima, 27, 39
- cociclo, 14
- cofronteira, 14

- coloração
  - de arestas, 48
  - de vértices, 29
  - mínima, 29, 48
- colorível, 29
- comparabilidade, 12
- complemento, 9
- completo, 9
- componente, 18
  - conexo, 18
  - ímpar, 44
- comprimento
  - de caminho, 16
  - de circuito, 16
- conexo, 17
- conjunto
  - completo, 26
  - estável, 20
    - maximal, 20
    - máximo, 20
  - independente, 20
- cor, 29, 48
  - ausente, 51
  - presente, 51
- corte, 14
- cubo, 10
- D, 6**
- DD, 6**
- $\Delta(G)$ , 14
- $\delta(G)$ , 14
- dama do xadrez, 9
- diferença simétrica, 50
- Dilworth, 33
- Egerváry, 42
- emparelhamento, 37
  - que satura, 38
  - maximal, 37
  - máximo, 37
  - perfeito, 38
- espaço
  - dos ciclos, 17
  - dos cociclos, 15
  - dos cortes, 15
- estável, 20
  - maximal, 20
  - máximo, 20
- extremos
  - de caminho, 16
- F, 6**
- floresta, 17
- $g(v)$ , 14
- $\Gamma(X)$ , 14
- $\Gamma(v)$ , 14
- $\mathcal{G}(n)$ , 19
- grade, 10
- grafo, 8
  - aleatório, 19
  - bicolorível, 33
  - bipartido, 34
  - bipartido completo, 11
  - complementar, 9
  - completo, 9
  - da dama, 9
  - da torre, 10
  - das arestas, 12
  - das palavras, 10
  - de Catlin, 32
  - de comparabilidade, 12
  - de Grötzsch, 33
  - de intervalos, 12
  - de matriz simétrica, 10
  - de Mycielski, 33
  - de Petersen, 11
  - de Turán, 23
  - do bispo, 10
  - do cavalo, 10
  - do rei, 10
  - dos estados, 10
  - grade, 10
  - planar, 12
  - regular, 14
  - simples, 8
  - vazio, 9
- grau, 14
  - máximo, 14
  - mínimo, 14
- Grötzsch, 33
- grupo, 13
- Hall, 40
- hexágono, 16
- hidrocarbonetos, 11

- $i(G)$ , 44
- incide, 8
- independente, 37
- índice
  - cromático ( $\chi'$ ), 48
  - de estabilidade ( $\alpha$ ), 20
- intervalos, 12
- isomorfismo, 12
- $K_n$ , 9
- $\overline{K}_n$ , 9
- König, 41, 50
- $L(G)$ , 12
- laços, 8
- leque de arestas, 51
- line graph*, 12
- $m(G)$ , 9
- matriz
  - de adjacências, 15
  - positiva semidefinida, 24
- maximal, 20, 37
- máximo, 20, 37
- min-max, 42
- mínima, 29, 48
- Mycielski, 33
- $n(G)$ , 9
- nabla ( $\nabla$ ), 14
- número
  - cromático ( $\chi$ ), 29
  - de Bell, 36
  - de cores, 29
  - de Ramsey, 27
- $\omega$ , 26
- ordem parcial, 12
- palavras, 10
- par não-ordenado, 8
- partição, 29
- pentágono, 16
- Petersen, 11
- planar, 12
- ponta de aresta, 8
- posto de matriz, 24
- programação linear, 42
- quadrado, 16
- quase todo, 19
- quatro cores, 30, 53
- Ramsey, 27
- regular, 14
- rei do xadrez, 10
- representantes distintos, 42
- satura
  - (emparelhamento), 38
- semidefinida
  - (matriz), 24
- slither*, 38
- subgrafo, 17
  - induzido, 17
  - maximal, 18
  - próprio, 17
- teorema
  - da dualidade, 42
  - das 4 cores, 30, 53
  - de Berge, 46
  - de Bollobás, 36
  - de Brooks, 31
  - de Dilworth, 33
  - de Hall, 40
  - de König, 41, 50
  - de König–Egerváry, 42
  - de Turán, 23
  - de Tutte, 44
  - de Tutte–Berge, 46
  - de Vizing, 51
- torre do xadrez, 10
- triângulo, 16
- Turán, 23
- Tutte, 44
- vazio, 9
- vértice, 8
  - saturado, 38
- vértices adjacentes, 8
- Vizing, 51
- vizinhança, 14
- vizinho, 8
- $\chi$ , 29
- $\chi'$ , 48
- xadrez, 9, 10