Universidade Federal do Ceará
Departamento de Computação

Teoria dos Grafos

Lista de exercícios 4

1. Use o Teorema da Curva de Jordan para provar que K_5 e $K_{3,3}$ não são planares.

2. Prove que, se um grafo G é planar, então a contração de qualquer aresta de G gera um grafo que também é planar.

3. Dado um grafo G, seja $cr(G)$ (*the crossing number*) o menor número de cruzamentos de arestas entre todos os desenhos de G no plano. Seja $\bar{cr}(G)$ (*the rectilinear crossing number*) o menor número de cruzamentos de arestas entre todos os desenhos de G no plano em que toda aresta é uma linha reta. Mostre que:

- $cr(G) = 0$ se e só se G é planar
- $cr(K_5) = cr(K_{3,3}) = 1$
- $cr(K_6) = 3$
- $cr(G) \leq \bar{cr}(G)$
- se $cr(G) = 1$, então $\bar{cr}(G) = 1$
- $\bar{cr}(G) \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$

4. Obtenha os grafos duais dos cinco grafos de Platão (o grafo dual G^* de G é o grafo em que as faces de G representam os vértices de G^*).

5. Mostre que o complemento de qualquer grafo planar com 11 vértices é não planar. Encontre um grafo planar com 8 vértices cujo complemento seja planar.

6. Mostre que $\chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \geq n$.

7. Mostre que $\chi(G) = \min\{\chi(D) : D$ é uma orientação de $G\}$, onde $\chi(D)$ é maior número de vértices em um caminho direcionado de D. Uma orientação D de G é um grafo direcionado obtido de G escolhendo uma direção para cada aresta de G.

8. Mostre que o octaedro é um grafo perfeito.

9. Mostre que o $ch(K_{3,3}) = 3$ (*the choice number*).

10. Mostre que $\chi'(K_{m,n}) = \max\{m, n\}$.

11. Descreva um algoritmo polinomial para obter uma $(\Delta(G) + 1)$-coloração de arestas de qualquer grafo G. Qual a complexidade?

12. Uma *coloração total* de $G = (V, E)$ é uma coloração de vértices e arestas de G de modo que elementos adjacentes ou incidentes em $V \cup E$ possuem cores diferentes. O *número total cromático* $\chi''(G)$ de G é o menor número de cores em uma coloração total de G. A conjectura da coloração total afirma que $\chi''(G) \leq \Delta(G)+2$. Você consegue resolver essa conjectura para cografos? Pelo menos em parte?