Universidade Federal do Ceará
Departamento de Computação

Teoria dos Grafos
Lista de exercícios 2

O número de asteriscos em uma questão indica a sua dificuldade.
Observação: A não ser que seja dito o contrário ou óbvio no contexto, nesta lista n e m denotam respectivamente o número de vértices e arestas de um grafo denotado por G.

1. Mostre que um grafo par não possui aresta-de-corte.

2. Prove ou mostre um contra-exemplo.

   (a) Todo grafo euleriano bipartido possui um número par de arestas.

   (b) Todo grafo simples euleriano com um número par de vértices possui um número par de arestas.

   (c) Se e e f são arestas adjacentes (isto é, incidentes a um mesmo vértice) de um grafo euleriano G, então existe uma trilha euleriana em G na qual e e f são consecutivas.

3. Seja G um grafo conexo com exatamente dois vértices u e v de grau ímpar. Seja T uma trilha maximal começando em u. Ela é necessariamente máxima? O que se pode dizer de uma trilha máxima começando em u?

4. (*) Em sala, vimos que se G é conexo e possui exatamente dois vértices de grau ímpar, G contém uma trilha passando por todas as arestas. Estenda esse resultado provando que se G é um grafo conexo com exatamente $2k > 0$ vértices de grau ímpar, então G pode ser decomposto em k trilhas $T_1, \ldots, T_k$ em G (disjuntas nas arestas).
   Método 1: Adicione arestas convenientemente e use o teorema de Euler.
   Método 2: Faça a demonstração usando indução em k. É mais fácil fortalecer a hipótese de indução e provar que: se G é um grafo com exatamente $2k$ vértices de grau ímpar e que não possui nenhum componente não-trivial par (isto é, todos os vértices deste têm grau par), então G pode ser decomposto em k trilhas $T_1, \ldots, T_k$ em G (disjuntas nas arestas).
   Faça dos dois jeitos!

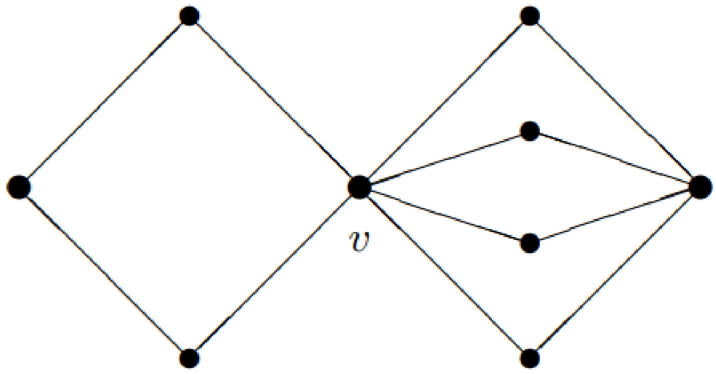

Figure 1: Grafo G é aleatoriamente euleriano?

5. (*) Seja G um grafo euleriano e suponha que (i) cada aresta de G possui uma cor: azul ou vermelha e (ii) para cada vértice v, metade das arestas incidentes a v é azul e a outra metade é vermelha. Uma trilha fechada é *alternante* se arestas consecutivas na trilha têm cores distintas. Prove ou mostre um contra-exemplo para as afirmações abaixo:

   (a) G possui um número par de arestas.

   (b) G contém um circuito alternante (de comprimento par).

   (c) G possui uma trilha euleriana alternante.

   (d) (*) se G não possui um vértice-de-corte, então G pode ser decomposto em uma união de circuitos alternantes disjuntos nas arestas.

6. (**) Um grafo G é *aleatoriamente Euleriano a partir de um vértice* v (do inglês *ramdomly Eulerian graph*) se a seguinte construção sempre produz uma trilha euleriana: começando com $x = v$, escolha uma aresta $e = xy$ ainda não visitada, faça $x = y$ e repita o processo enquanto for possível.

   (a) Mostre que o grafo da Figura 1 é aleatoriamente euleriano a partir de v.

   (b) Exiba um grafo euleriano que não seja aleatoriamente euleriano a partir de nenhum vértice.

   (c) Enuncie condições necessárias e suficientes para que um grafo seja aleatoriamente euleriano a partir de um vértice fixo v. Depois prove a afirmação.