**Universidade Federal do Ceará**
**Departamento de Computação**

# Teoria dos Grafos

## Lista de exercícios 1

O número de asteriscos em uma questão indica a sua dificuldade.
Lembre que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Lembre também que $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ é o número de arestas do grafo completo $K_n$.

1. Seja $V = \{1, 2, ..., n\}$ $(n \geq 1)$. Qual é o número de grafos simples com conjunto de vértices igual a $V$?

2. Use fatos sobre grafos completos e argumentos de contagem (**não** faça contas!) para mostrar que

   (a) $\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + k(n-k) + \binom{n-k}{2}$ para $0 \leq k \leq n$.

   (b) Se $\sum_{i=1}^{t} n_i = n$, então $\sum_{i=1}^{t} \binom{n_i}{2} \leq \binom{n}{2}$.

3. Mostre que existem onze grafos simples não-isomorfos entre si com exatamente quatro vértices.

4. Mostre que $G \cong H$ se e somente se $\overline{G} \cong \overline{H}$.

5. O grafo de Petersen é definido da seguinte forma. Seja $X := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e seja $\binom{X}{2}$ a coleção formada por todos os subconjuntos de X com exatamente 2 elementos. O grafo de Petersen tem como conjunto de vértices $V = \binom{X}{2}$ e dois elementos $u$ e $v$ de $V$ são adjacentes se $u \cap v = \emptyset$. Desenhe o grafo de Petersen. Quantos vértices e arestas ele possui?

6. Um grafo $G$ é *auto-complementar* se $G \cong \overline{G}$.

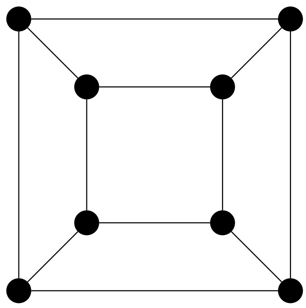
   (a) Dê três exemplos de grafos auto-complementares.

   (b) Prove que se $G$ é auto-complementar, então $G$ possui $4k$ ou $4k+1$ vértices, para algum inteiro $k \geq 0$.

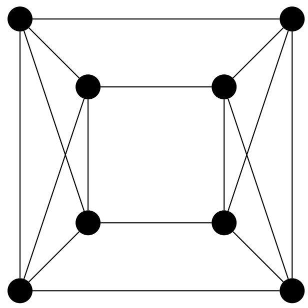
7. Considere um tabuleiro de xadrez no qual removemos duas casas diagonalmente opostas. Suponha que você tem uma coleção de pedras de dominós tal que cada pedra destas é capaz de cobrir exatamente 2 casas do tabuleiro. Mostre que no tabuleiro com os cantos removidos não é possível cobrir todas as casas usando as pedras de dominós.

8. Considere uma festa com 6 pessoas. Prove que é sempre possível encontrar três pessoas que se conhecem mutuamente, ou três pessoas que não se conhecem mutuamente. Formule o exercício em termos de grafos e resolva-o.

9. Mostre que o grafo $G$ da figura abaixo é isomorfo ao complemento $\overline{H}$ de $H$.

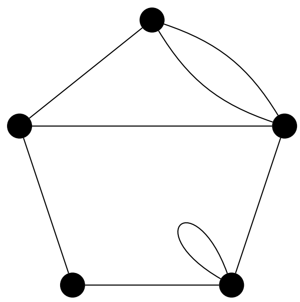


$G$

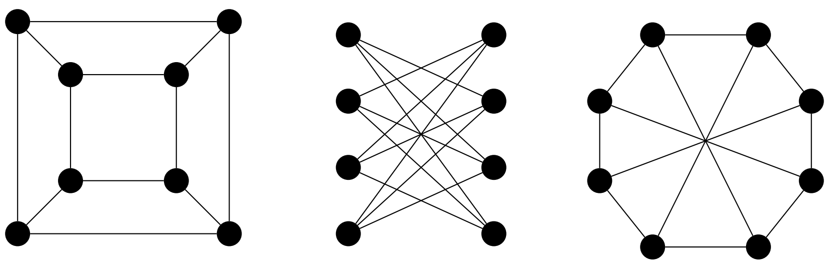


$H$

10. Mostre que os seguintes grafos **não** são isomorfos.



11. Determine quais pares de grafos abaixo são isomorfos.



12. Quantas arestas um grafo bipartido *simples* com $n$ vértices pode ter no máximo?

13. (*) Seja $S$ um conjunto com $n$ elementos. Seja $m$ um inteiro tal que $0 \leq m \leq n$. O grafo de Kneser, denotado por $N_{m,n}$, tem como conjunto de vértices todos os subconjuntos com exatamente $m$ elementos de $S$ e dois vértices são adjacentes em $N_{m,n}$ se são disjuntos (isto é, não tem elementos em comum).

    (a) Desenhe os grafos $N_{m,n}$ para $1 \leq m \leq 2$ e $2 \leq n \leq 5$.

    (b) Qual é o grafo famoso que é isomorfo a $N_{2,5}$?

    (c) Determine o número de vértices e arestas de $N_{m,n}$.

14. (*) O grafo multipartido completo $K_{p_1,\cdots,p_s}$ consiste de $s$ conjuntos disjuntos de vértices com tamanho $p_i$, $1 \leq i \leq s$, sendo que dois vértices são adjacentes se pertencem a conjuntos distintos.

    (a) Qual é o número de vértices de $K_{p_1,\cdots,p_s}$?

    (b) Qual é o número de arestas de $K_{p_1,\cdots,p_s}$?

    (c) Como é o complemento de $K_{p_1,\cdots,p_s}$?

15. (*) Seja $k > 0$ um inteiro. O *k-cubo* $Q_k$ é o grafo cujos vértices são as $k$-uplas ordenadas de 0's e 1's e tal que dois vértices são adjacentes em $Q_k$ se diferem em exatamente uma coordenada.

    (a) Desenhe $Q_1, Q_2, Q_3,$ e $Q_4$

    (b) $Q_k$ é bipartido?

    (c) Mostre como construir recursivamente um $k$-cubo, isto é, como obter $Q_k$, a partir de $Q_{k-1}$.

    (d) $Q_k$ é regular?

    (e) Qual é o número de vértices e arestas de $Q_k$?

16. (*) Exiba um grafo bipartido simples que não é isomorfo a nenhum subgrafo de um $k$-cubo. Justifique sua resposta.

17. (*) O *grafo-linha* de um grafo $G$ é o grafo $L(G)$ com $V(L(G)) = E(G)$ (se você achar mais claro, pense que cada vértice de $L(G)$ corresponde a uma aresta de $G$) no qual $e, f$ (ou seja, os vértices correspondentes a $e, f$) são adjacentes em $L(G)$ se ($e$ e $f$) têm uma ponta em comum em $G$.

    (a) Seja $G$ um grafo simples. Determine o número de vértices e arestas de $L(G)$.

(b) O grafo-linha do $K_5$ é o complemento de qual grafo?

(c) O grafo $K_{1,3}$ (também conhecido como *claw* ou *pé-de-galinha*) é o grafo-linha de algum grafo simples? Justifique sua resposta.

18. (*) Seja $G$ um grafo com cintura 5, onde a cintura é o tamanho do menor ciclo. Prove que se todo vértice de $G$ tem grau pelo menos $k$, então $G$ possui pelo menos $k^2+1$ vértices. Para $k = 2$ e $k = 3$, encontre um tal grafo com exatamente $k^2 + 1$ vértices. **Sugestão:** considere a vizinhança $N(v)$ de um vértice $v$ (o conjunto dos vizinhos de $v$).

19. (**) Considere um grupo $X$ com pelo menos 4 turistas. Sabe-se que em qualquer subgrupo de $X$ com 4 turistas sempre existe um turista que conhece os outros três. Prove que existe um turista em $X$ que conhece *todos* os outros turistas. Formule o exercício em termos de grafos e resolva-o. **Sugestão:** tente descobrir como é o complemento desse "grafo" (que grafo??); ele pode ter muitas arestas?