Universidade Federal do Ceará
Departamento de Computação

Fundamentos Matemáticos da Computação

Lista de exercícios 3

Cada $\surd$ denota um nível de dificuldade: $\surd$ fácil, $\surd\surd$ médio e $\surd\surd\surd$ difícil.

$\surd\surd$ **1.** (**recorrências**) Resolva as seguintes recorrências:

(a) $a_n = a_{n-1} + 7$, $a_0 = 13$;

(b) $a_n = 5 \cdot a_{n-1} + 3$, $a_0 = 8$;

(c) $a_n = 5 \cdot a_{n-1} - 6 \cdot a_{n-2}$, $a_0 = 2$, $a_1 = 5$;

(d) $a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 4 \cdot a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$;

(e) $a_n = 5 \cdot a_{n-1} - 6 \cdot a_{n-2} + 6$, $a_0 = 5$, $a_1 = 8$;

$\surd\surd$ **2.** (**recorrências**) Seja $n = 3^k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Resolva a seguinte relação de recorrência: $T(n) = T(n/3) + 17$, $T(1) = 29$.

$\surd\surd\surd$ **3.** (**recorrências**) Assumindo que n é uma potência de 2, resolva a seguinte relação de recorrência e depois prove a corretude por indução:

$$\begin{array}{rcl} T(n) & = & 6 \cdot T(n/2) \; - \; 8 \cdot T(n/4), \quad \text{se} \;\; n > 2 \\ T(1) & = & 2 \\ T(2) & = & 6 \end{array}$$

(**Dica**: é possível obter uma recorrência de 2^o ordem para nos ajudar. Para isso, substitua n por 2^k na recorrência)

$\surd$ **4.** (**inclusão e exclusão**) Em um grupo de 155 alunos, 84 possuem computador pessoal, 100 possuem endereço eletrônico, 30 possuem página pessoal, 54 têm computador pessoal e endereço eletrônico, 15 têm computador e página pessoais, 8 possuem endereço eletrônico e página pessoal, e 3 alunos têm computador pessoal, endereço eletrônico e página pessoal. Responda as seguintes perguntas usando o Princípio da Inclusão e Exclusão:

(a) Quantos alunos têm apenas endereço eletrônico?

(b) Quantos alunos não possuem nenhum dos 3 itens?

(c) Quantos alunos têm computador e homepage, mas não tem email?

$\surd\surd$ **5.** (**inclusão/exclusão**) Quantos inteiros de 1 a 100.000 não são divisíveis por 2, 3, 5, 7, 11 ou 13?

$\surd\surd$ **6.** (**casa dos pombos**) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \subseteq \{0, 1, \cdots, 2n-1\}$. Mostre que se $|A| = n + 2$, então existem $a \in A$ e $a' \in A$, $a \neq a'$, tais que $a + a' = 2n$.

$\surd\surd\surd$ **7.** (**casa dos pombos**) Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, e $A \subseteq \mathbb{N}$. Prove cada uma das afirmações a seguir.

(a) se $|A| = n + 1$, então existem $a \in A$ e $a' \in A$, $a \neq a'$, tais que $a - a'$ é divisível por n.

(b) se $|A| = n + 2$, então existem $a \in A$ e $a' \in A$, $a \neq a'$, tais que ($a - a'$ é divisível por $2n$) ou ($a + a'$ é divisível por $2n$).

Observe que $a - a'$ é divisível por n se e somente se $a \bmod n = a' \bmod n$, e que $a + a'$ é divisível por n se e somente se $(a \bmod n) + (a' \bmod n) = n$.

$\surd\surd$ **8.** (**casa dos pombos**) Mostre que, em todo grupo de $n \geq 2$ pessoas, há duas pessoas com o mesmo número de amigos no grupo. Considere que a relação "ser amigo" é simétrica mas não é reflexiva.

$\surd$ **9.** (**permutações**) Se enumerarmos todas as permutações dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 em ordem crescente, então:

(a) que posição ocupa o número 42513? **(b)** qual número ocupa a posição 73?

$\surd$ **10.** (**combinações**) Quantos são os subconjuntos de k elementos de $\{1, 2, \cdots, n\}$ nos quais:

(a) 1 aparece? **(b)** 1 não aparece? **(c)** 1 e 2 aparecem?

$\surd\surd$ **11.** (**combinatória**) Considere todos os subconjuntos com 5 elementos de $\{1, 2, \cdots, 12\}$. Se ordenarmos todos esses subconjuntos por ordem crescente de índices, em quantos subconjuntos o elemento 8 aparece na posição 3 da sua ordenação?

$\surd\surd$ **12.** (**combinatória**) Quantas são as soluções de:

(a) $w + x + y + z = 50$, sendo w, x, y e z números naturais?

(b) $w + x + y + z = 120$, sendo w, x, y e z naturais tais que pelo menos um deles é maior que 27?

(c) $w + x + y + z = 120$, sendo w, x, y e z naturais tais que pelo menos um deles é maior que 33?

$\surd\surd\surd$ **13.** (**combinatória**) Demonstre as seguintes afirmações:

(a) $\binom{n+p+1}{p} = \sum_{r=0}^{p} \binom{n+r}{r}$. **Dica:** Stifel e indução em p.

(b) $\binom{n+p+1}{p+1} = \sum_{r=0}^{n} \binom{p+r}{p}$ **Dica:** Stifel e indução em n.

(c) $\binom{n+2}{p+2} = \binom{n}{p} + 2\binom{n}{p+1} + \binom{n}{p+2}$. **Dica:** Stifel duas vezes.

(d) $\binom{n+3}{p+3} = \binom{n}{p} + 3\binom{n}{p+1} + 3\binom{n}{p+2} + \binom{n}{p+3}$. **Dica:** Stifel três vezes.

(e) $\binom{n+4}{p+4} = \binom{n}{p} + 4\binom{n}{p+1} + 6\binom{n}{p+2} + 4\binom{n}{p+3} + \binom{n}{p+4}$. **Dica:** Stifel quatro vezes.

(f) $\binom{n+k}{p+k} = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \cdot \binom{n}{p+r}$. **Dica:** Stifel k vezes ou indução em k.

$\surd\surd$ **14.** (**combinatória**) Determine o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{99} \qquad \text{e} \quad \text{de} \qquad \left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{100}$$

$\surd\surd$ **15.** (**probabilidade**) Façamos um jogo semelhante ao de Monty-Hall. Um participante deve escolher uma porta entre 4 portas possíveis. Atrás de uma delas existe um prêmio. **(a)** Após fazer sua escolha, o apresentador abre 1 porta não escolhida e que não possui o prêmio, e pergunta se o participante deseja mudar sua escolha. O que ele deve fazer? Justifique. **(b)** E se houvessem 5 portas e o apresentador abrisse duas portas sem o prêmio? Justifique.

$\surd$ **16.** (**grafos**) Dizemos que um grafo é d-regular se todos os vértices tem grau d (lembre que o grau de um vértice é o número de arestas incidentes nele). Considerando apenas grafos simples não-direcionados (e não rotulados), desenhe todos os grafos 2-regulares com 4, 5 e 6 vértices e todos os grafos 3-regulares com 4, 5 e 6 vértices.