Capítulo 5.6
INDUÇÃO MATEMÁTICA COMPLETA (ou FORTE)

Indução Matemática Forte (ou Completa)

Princípio da Indução Matemática Forte

- A indução matemática normal é contemplada pela indução forte.
- Indução normal 1: Provar que vale para $n + 1$ assumindo que vale para n
- Indução normal 2: Provar que vale para n assumindo que vale para $n - 1$
- Indução forte: Provar que vale para n assumindo que vale para todo valor menor que n

Números F_n de Fibonacci

Números de Fibonacci: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$

- $F_0 = 0; \quad F_1 = 1$
- $F_n \;=\; F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \forall n \geq 2$

Limite superior: $F_n < 2^n, \quad \forall n \geq 0$

- **Caso base:** $F_0 = 0 < 1 = 2^0; \quad F_1 = 1 < 2^1$
- **H.I.:** Fixe $n \geq 2$ e suponha $F_k < 2^k, \; \forall \; 0 \leq k < n$
- **P.I.:** Vamos provar que $F_n < 2^n$.
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} < 2^{n-1} + 2^{n-2} = 3 \cdot 2^{n-2} < 4 \cdot 2^{n-2} \;=\; 2^n$

Números F_n de Fibonacci

Números de Fibonacci: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$

- $F_0 = 0; \quad F_1 = 1$
- $F_n \;=\; F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \forall n \geq 2$

Limite inferior: $F_n > (1.6^n)/3, \quad \forall n > 0$

- **Caso base:** $F_1 = 1 > 1.6^1/3; \;\; F_2 = 1 > 1.6^2/3$
- **H.I.:** Fixe $n \geq 3$ e suponha $F_k > 1.6^k/3, \; \forall\; 1 \leq k < n$
- **P.I.:** Vamos provar que $F_n > 1.6^n/3$.
- $F_n \;=\; F_{n-1} + F_{n-2} \;>\; 1.6^{n-1}/3 + 1.6^{n-2}/3 \;=$
- $= \; 2.6 \cdot (1.6)^{n-2}/3 \;>\; 2.56 \cdot (1.6)^{n-2}/3 \;=\; 1.6^n/3$

Números F_n de Fibonacci

Números de Fibonacci: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$

- $F_0 = 0; \quad F_1 = 1$
- $F_n \; = \; F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \forall n \geq 2$

Limite superior: $F_n < 1.618^n, \quad \forall n \geq 0$

- **Proporção Áurea:** $x = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618 \implies x^2 = x + 1.$
- **Caso base:** $F_0 = 0 < 1 = 1.618^0; \quad F_1 = 1 < 1.618^1$
- **H.I.:** Fixe $n \geq 2$ e suponha $F_k < 1.618^k, \; \forall \; 0 \leq k < n$
- **P.I.:** Vamos provar que $F_n < 1.618^n$.
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} < 1.618^{n-1} + 1.618^{n-2} =$
- $= (2.618) \cdot 1.618^{n-2} = (1.618)^2 \cdot 1.618^{n-2} \; = \; 1.618^n$

Números F_n de Fibonacci

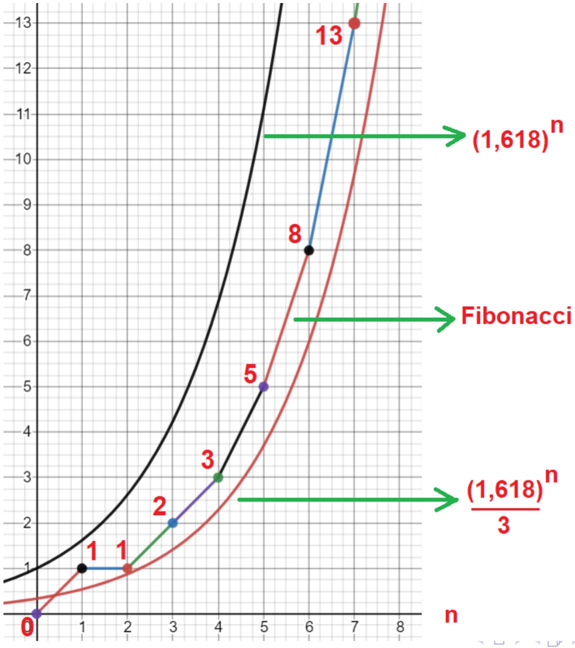
Números de Fibonacci: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$

- $F_0 = 0; \quad F_1 = 1$
- $F_n \;=\; F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \forall n \geq 2$

Limite inferior: $F_n > (1.618^n)/3, \quad \forall n > 0$

- **Proporção Áurea:** $x = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618 \implies x^2 = x + 1.$
- **Caso base:** $F_1 = 1 > 1.618^1/3; \;\; F_2 = 1 > 1.618^2/3$
- **H.I.:** Fixe $n \geq 3$ e suponha $F_k > 1.618^k/3, \; \forall \; 1 \leq k < n$
- **P.I.:** Vamos provar que $F_n > 1.618^n/3.$
- $F_n \;=\; F_{n-1} + F_{n-2} \;>\; 1.618^{n-1}/3 + 1.618^{n-2}/3 \;=$
- $= \;(2.618) \cdot 1.618^{n-2}/3 \;=\; (1.618)^2 \cdot 1.618^{n-2}/3 \;=\; 1.618^n/3$

Números F_n de Fibonacci: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$



Números F_n de Fibonacci: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

- $F_0 = 0$; $F_1 = 1$; $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \forall n \geq 2$
- Proporção Áurea: $x^2 - x - 1 = 0 \implies$ raízes $\alpha, \beta = (1 \pm \sqrt{5})/2$.
- Provar por indução que: $F(n) = F'(n)$, onde

$$F'(n) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

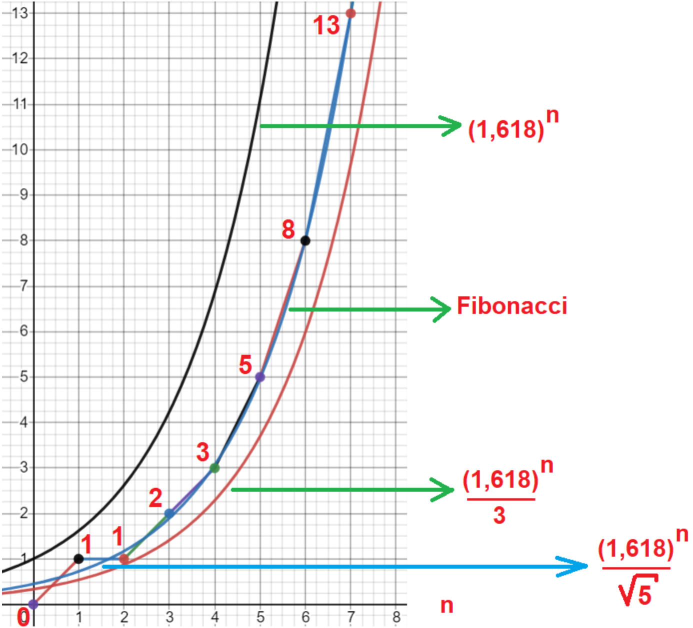
Prova por Indução Forte

- BASE: $F'(0) = 0$ e $F'(1) = 1$. OK
- Hipótese de Indução: Fixe $n \geq 2$ e suponha valer para todo valor $k = 0, \ldots, n-1$.
- Passo da Indução: Vamos provar que vale para n.
- $F(n) = F(n-1) + F(n-2) = F'(n-1) + F'(n-2)$. Logo:

$$F(n) = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1} + \alpha^{n-2} - \beta^{n-2}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n-2}(\alpha+1) - \beta^{n-2}(\beta+1)}{\alpha - \beta}$$

- $F(n) = (\alpha^{n-2} \cdot \alpha^2 - \beta^{n-2} \cdot \beta^2)/(\alpha - \beta) = F'(n)$

Números F_n de Fibonacci: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$



Exercícios de prova passada

Prove que $\forall n \geq 700 : \quad n \; < \; (1.01)^n$. **Dica:** $(1.01)^{231} < 10 < (1.01)^{232}$.

- Base: $696 < 700 < 10^3 < (1.01)^{3 \cdot 232} = (1.01)^{696} < 1.01^{700}$
- H.I: Fixe $n > 700$ e assuma valer para todo inteiro $700 \leq k < n$.
- P.I.: $1.01^n = 1.01 \cdot (1.01^{n-1}) > 1.01 \cdot (n-1) = n + 0.01 \cdot (n - 100) > n$

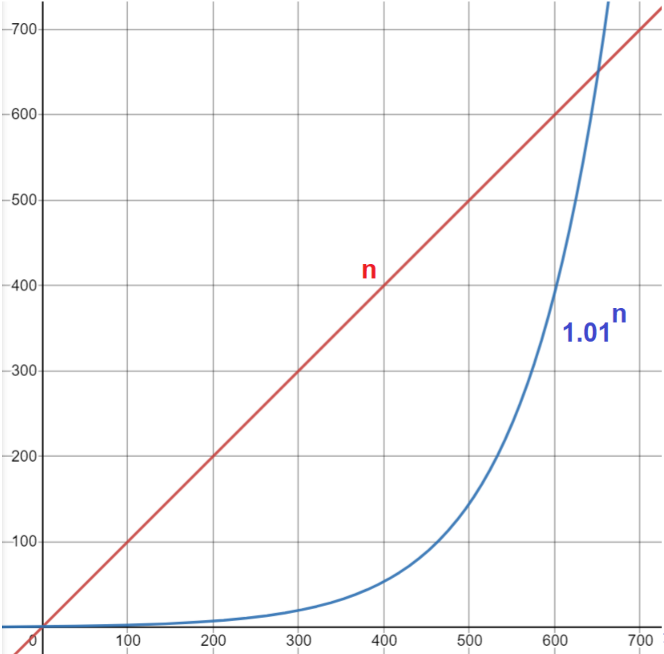
Prove que $\forall n \geq 96 : \quad n^2 \; < \; (1.1)^n$. **Dica:** $(1.1)^{23} < 10 < (1.1)^{24}$.

- Base: $(96)^2 < (100)^2 = 10^4 < (1.1)^{4 \cdot 24} = (1.1)^{96}$
- H.I: Fixe $n > 96$ e assuma valer para todo inteiro $96 \leq k < n$.
- P.I.: $1.1^n = 1.1 \cdot (1.1^{n-1}) > 1.1 \cdot (n-1)^2 = n^2 + 0.1 \cdot (n^2 - 22n + 10) > n^2$

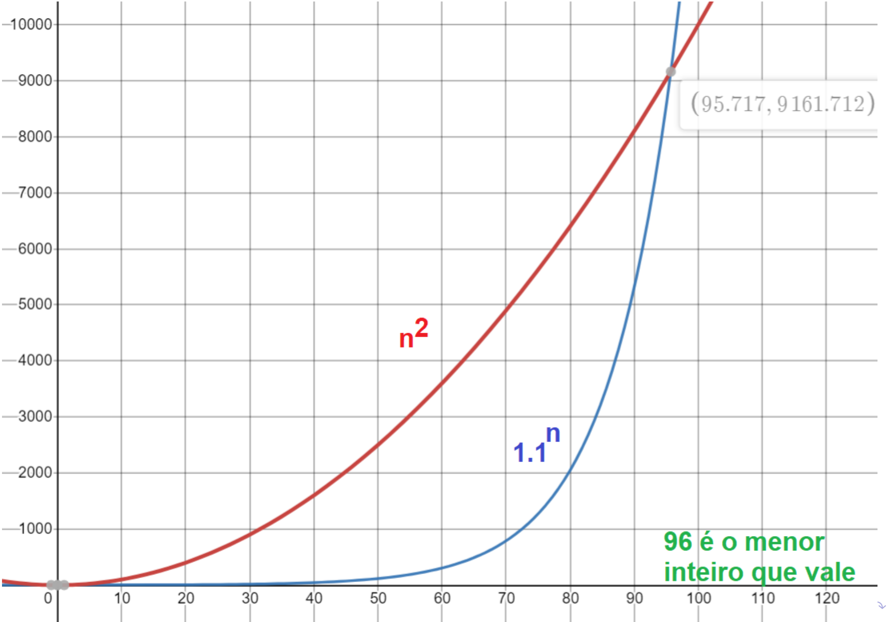
Prove que $\forall n \geq 100 : \quad n^{10} \; < \; 2^n$. **Dica:** $10^3 < 2^{10}$ e $(1.01)^{10} < 2$.

- Base: $100^{10} = 10^{20} < 10^{30} = (1000)^{10} < 1024^{10} = 2^{100}$
- H.I: Fixe $n > 100$ e assuma valer para todo inteiro $100 \leq k < n$.
- P.I.: $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} > 2(n-1)^{10} > (1.01)^{10}(n-1)^{10} =$
- $= (1.01n - 1.01)^{10} = (n + 0.01 \cdot (n - 101))^{10} \geq n^{10}$

Exercícios de prova passada



Exercícios de prova passada



Exercícios de prova passada

Prove que, para todo inteiro $n \geq 2$, o **complemento da interseção** de n conjuntos quaisquer $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é igual a união dos complementos desses n conjuntos.

Prova por indução forte (apesar da indução normal ser suficiente)

- **Base** $n = 2$: $\overline{A_1 \cap A_2} \; = \; \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ (OK por De Morgan)
- **H.I:** Fixe $n > 2$ e assuma valer para todo inteiro $2 \leq k < n$.
- **P.I.:** Vamos provar que vale para n

$$\overline{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n} \; = \; \overline{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}} \; \cup \; \overline{A_n} \; = \; \overline{A_1} \cup \ldots \cup \overline{A_{n-1}} \cup \overline{A_n}$$

Exercícios de prova passada

Prove que, para todo inteiro $n \geq 2$, o **complemento da união** de n conjuntos quaisquer $A_1, \ldots, A_n$ é igual a interseção dos complementos desses n conjuntos.

Prova por indução forte (apesar da indução normal ser suficiente)

- **Base** $n = 2$: $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ (OK por De Morgan)
- **H.I:** Fixe $n > 2$ e assuma valer para todo inteiro $2 \leq k < n$.
- **P.I.:** Vamos provar que vale para n

$$\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n} = \overline{A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}} \cap \overline{A_n} = \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

Capítulo 6
RELAÇÕES

Relações - Exercício 6.1

Exercício 6.1:

Seja A o conjunto de todas as pessoas vivas hoje. Seja $\mathcal{R}$ o conjunto de todos os pares $(p, q) \in A \times A$ tais que a pessoa p é filha ou filho da pessoa q. Descreva os conjuntos $Dom(\mathcal{R})$, $Img(\mathcal{R})$, $Dom(\mathcal{R}) \cap Img(\mathcal{R})$ e $Dom(\mathcal{R}) \cup Img(\mathcal{R})$.

Solução

- $Dom(\mathcal{R})$ $=$ conjunto das pessoas vivas com pai ou mãe vivos.
- $Img(\mathcal{R})$ $=$ conjunto das pessoas vivas com um filho vivo.
- $Dom(\mathcal{R}) \cap Img(\mathcal{R})$ $=$ conjunto das pessoas vivas com pai ou mãe vivos e um filho vivo.
- $Dom(\mathcal{R}) \cup Img(\mathcal{R})$ $=$ conjunto das pessoas vivas com pai, mãe ou um filho vivos.

Relações - Exercício 6.2

Exercício 6.2:

Seja $\mathcal{R}$ a relação que consiste de todos os pares (x, y) de números reais tais que $(x^2 - 2)^2 + y^2 = 1$. Determine $Dom(\mathcal{R})$ e $Img(\mathcal{R})$).

Solução

- $(x^2-2)^2 = 1-y^2 \implies 1-y^2 \geq 0 \implies y^2 \in [0,1] \implies y \in [-1,1]$.
- $Img(\mathcal{R}) \;=\; [-1,1]$
- $(x^2 - 2) = \pm\sqrt{1-y^2} \implies x = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{1-y^2}}$
- $y \in [-1,1] \implies \sqrt{1-y^2} \in [0,1] \implies 2 \pm \sqrt{1-y^2} \in [1,3]$
- $\implies \sqrt{2 \pm \sqrt{1-y^2}} \in [1, \sqrt{3}] \implies x \in [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$
- $Dom(\mathcal{R}) \;=\; [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$

Relações - Exercício 6.3

Exercício 6.3:

Seja A o conjunto dos inteiros entre 0 e 10, inclusive. Seja $\mathcal{R}$ a relação com todos os pares da forma $(x, x^2 - 5)$ que estão em $A \times A$. Determine $Dom(\mathcal{R})$ e $Img(\mathcal{R})$).

Solução

- $(0, 0 - 5)$, $(1, 1 - 5)$, $(2, 4 - 5)$
- $(3, 9 - 5) = (3, 4)$
- $(4, 16 - 5)$, $(5, 25 - 5)$, $\ldots$, $(10, 100 - 5)$
- $x^2 - 5 \geq 0 \implies x^2 \geq 5 \implies x \geq 3$
- $x^2 - 5 \leq 10 \implies x^2 \leq 15 \implies x \leq 3$
- $\mathcal{R} = \{(3, 4)\} \implies Dom(\mathcal{R}) = \{3\}$ e $Img(\mathcal{R}) = \{4\}$

Relações - Exercício 6.4

Exercício 6.4:

Prove que, para qualquer relação $\mathcal{R}$, a imagem $Img(\mathcal{R})$ é vazia se e somente se o domínio $Dom(\mathcal{R})$ é vazio.

Solução

- $\mathcal{R} = \emptyset \implies \nexists(a, b) \in \mathcal{R} \implies Img(\mathcal{R}) = \emptyset$
- $\mathcal{R} \neq \emptyset \implies \exists(a, b) \in \mathcal{R} \implies \exists b : b \in Img(\mathcal{R}) \implies Img(\mathcal{R}) \neq \emptyset$
- Conclusão: $Img(\mathcal{R}) = \emptyset \iff \mathcal{R} = \emptyset$
- Analogamente: $Dom(\mathcal{R}) = \emptyset \iff \mathcal{R} = \emptyset$
- Portanto: $Img(\mathcal{R}) = \emptyset \iff \mathcal{R} = \emptyset \iff Dom(\mathcal{R}) = \emptyset$

Definição de **restrição** de uma relação

Seja R uma relação. Para conjuntos quaisquer A e B, definimos $R[A, B]$ como sendo a **restrição** de R a A e B: ou seja, $R[A, B] = R \cap (A \times B)$. Por simplicidade, seja $R[A] = R[A, A]$.

Propriedades das relações restritas

P1: $R[A \cap B] = R[A] \cap R[B]$

P2: $R[A \cup B] \supseteq R[A] \cup R[B]$

P3: $R[A - B] \subseteq R[A] - R[B]$

Demonstração-P1: seja $(x, y) \in R$

- $(x, y) \in R[A \cap B] \iff x \in A \cap B \ \wedge \ y \in A \cap B \iff$
- $\iff x \in A \ \wedge \ x \in B \ \wedge \ y \in A \ \wedge \ y \in B \iff$
- $\iff (x, y) \in R[A] \ \wedge \ (x, y) \in R[B] \iff (x, y) \in R[A] \cap R[B]$
- $\square$

Definição de **restrição** de uma relação

Seja R uma relação. Para conjuntos quaisquer A e B, definimos $R[A, B]$ como sendo a **restrição** de R a A e B: ou seja, $R[A, B] = R \cap (A \times B)$. Por simplicidade, seja $R[A] = R[A, A]$.

Propriedades das relações restritas

P1: $R[A \cap B] = R[A] \cap R[B]$

P2: $R[A \cup B] \supseteq R[A] \cup R[B]$

P3: $R[A - B] \subseteq R[A] - R[B]$

Demonstração-P2: seja $(x, y) \in R$

- $(x, y) \in R[A] \cup R[B] \iff (x, y) \in R[A] \ \vee \ (x, y) \in R[B] \iff$
- $\iff (x \in A \ \wedge y \in A) \ \vee \ (x \in B \ \wedge y \in B) \iff$
- $\iff (x \in A \ \vee x \in B) \ \wedge \ (y \in A \ \vee y \in B) \ \wedge \ (- \vee -) \wedge (- \vee -) \implies$
- $\implies x \in A \cup B \ \wedge y \in A \cup B \iff (x, y) \in R[A \cup B]$

Definição de **restrição** de uma relação

Seja R uma relação. Para conjuntos quaisquer A e B, definimos $R[A, B]$ como sendo a **restrição** de R a A e B: ou seja, $R[A, B] = R \cap (A \times B)$. Por simplicidade, seja $R[A] = R[A, A]$.

Propriedades das relações restritas

P1: $R[A \cap B] = R[A] \cap R[B]$

P2: $R[A \cup B] \supseteq R[A] \cup R[B]$

P3: $R[A - B] \subseteq R[A] - R[B]$

Demonstração-P2: contraexemplo para igualdade

- $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}, \quad A = \{1\}, \quad B = \{2\}$
- $R[A] = \{(1,1)\}, \quad R[B] = \{(2,2)\}, \quad R[A] \cup R[B] = \{(1,1),(2,2)\}$
- $R[A \cup B] = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$
- $\square$

Definição de **restrição** de uma relação

Seja R uma relação. Para conjuntos quaisquer A e B, definimos $R[A, B]$ como sendo a **restrição** de R a A e B: ou seja, $R[A, B] = R \cap (A \times B)$. Por simplicidade, seja $R[A] = R[A, A]$.

Propriedades das relações restritas

P1: $R[A \cap B] = R[A] \cap R[B]$

P2: $R[A \cup B] \supseteq R[A] \cup R[B]$

P3: $R[A - B] \subseteq R[A] - R[B]$

Demonstração-P3: seja $(x, y) \in R$

- $(x, y) \in R[A - B] \iff x \in A - B \ \wedge \ y \in A - B \iff$
- $\iff (x \in A) \ \wedge \ (x \notin B) \ \wedge \ (y \in A) \ \wedge (y \notin B) \implies$
- $\implies ((x, y) \in R[A]) \ \wedge \ ((x, y) \notin R[B]) \iff$
- $\iff (x, y) \in R[A] - R[B] \quad \square$

Definição de **restrição** de uma relação

Seja R uma relação. Para conjuntos quaisquer A e B, definimos $R[A,B]$ como sendo a **restrição** de R a A e B: ou seja, $R[A,B] = R \cap (A \times B)$. Por simplicidade, seja $R[A] = R[A,A]$.

Propriedades das relações restritas

P1: $R[A \cap B] = R[A] \cap R[B]$

P2: $R[A \cup B] \supseteq R[A] \cup R[B]$

P3: $R[A - B] \subseteq R[A] - R[B]$

Demonstração-P3: contraexemplo para igualdade

- $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}, \quad A = \{1,2\}, \quad B = \{2,3\}$
- $R[A] = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}, \quad R[B] = \{(2,2),(3,3)\}$
- $R[A] - R[B] = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$
- $A - B = \{1\} \implies R[A-B] = \{(1,1)\} \quad \square$

Definição de **restrição** de uma relação

Seja R uma relação. Para conjuntos quaisquer A e B, definimos $R[A, B]$ como sendo a **restrição** de R a A e B: ou seja, $R[A, B] = R \cap (A \times B)$. Por simplicidade, seja $R[A] = R[A, A]$.

Propriedades das relações restritas

P1: $R[A \cap B] = R[A] \cap R[B]$

P2: $R[A \cup B] \supseteq R[A] \cup R[B]$

P3: $R[A - B] \subseteq R[A] - R[B]$

P1++: $R[A \cap B,\ X \cap Y] \ = \ R[A, X] \ \cap \ R[B, Y]$

P2++: $R[A \cup B,\ X \cup Y] \ \supseteq \ R[A, X] \ \cup \ R[B, Y]$

P3++: $R[A - B,\ X - Y] \ \subseteq \ R[A, X] - R[B, Y]$

Exercício 6.7:

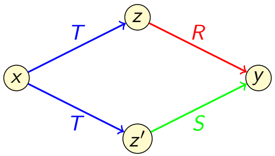
Seja R o conjunto de todos os pares (x, x^2) onde x é um número inteiro. Seja S o conjunto de todos os pares $(3y, y)$ onde y é um número natural. Descreva as relações $R \circ S$ e $S \circ R$.

Solução

- $(x, y) \in S \circ R \iff \exists z : (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S \iff$
- $\iff x^2 = z = 3y \iff y = x^2/3 \iff x = 3a \ (a \in \mathbb{Z}) \iff$
- $S \circ R = \{(3a, 3a^2) : \ a \in \mathbb{Z}\}$
- $\square$
- $(x, y) \in R \circ S \iff \exists z \in \mathbb{N} : (x, z) \in S \wedge (z, y) \in R \iff$
- $\iff x = 3z \wedge y = z^2 \iff y = x^2/9 \iff x = 3a \ (a \in \mathbb{N}) \iff$
- $R \circ S = \{(3a, a^2) : \ a \in \mathbb{N}\}$
- $\square$

Algumas propriedades sobre Existenciais

- $\Big(\exists x : P(x) \wedge Q(x)\Big) \implies \Big(\exists x : P(x)\Big) \wedge \Big(\exists x' : Q(x')\Big)$
- $\Big(\exists x : P(x) \vee Q(x)\Big) \iff \Big(\exists x : P(x)\Big) \vee \Big(\exists x' : Q(x')\Big)$
- $\Big(\exists x : P(x)\Big) \wedge \Big(\forall x' : P(x') \to Q(x')\Big) \implies \Big(\exists x : P(x) \wedge Q(x)\Big)$



Exercício 6.8:

Sejam R, S, T relações quaisquer. Prove que:

- $(R \cap S) \circ T \ \subseteq \ R \circ T \ \cap \ S \circ T$
- $(R \cup S) \circ T \ = \ R \circ T \ \cup \ S \circ T$
- $(R - S) \circ T \ \supseteq \ R \circ T \ - \ S \circ T$

Solução

- $(x, y) \in (R \cap S) \circ T \Leftrightarrow \exists z : (x, z) \in T \wedge (z, y) \in R \cap S \Leftrightarrow$
- $\Leftrightarrow \exists z : (x, z) \in T \wedge (z, y) \in R \wedge (z, y) \in S \Rightarrow$
- $\Rightarrow (\exists z : (x, z) \in T \wedge (z, y) \in R) \wedge (\exists z' : (x, z') \in T \wedge (z', y) \in S) \Leftrightarrow$
- $\Leftrightarrow (x, y) \in R \circ T \wedge (x, y) \in S \circ T \Leftrightarrow$
- $\Leftrightarrow (x, y) \in R \circ T \ \cap \ S \circ T \quad \square$

Contraexemplo da igualdade

- $T = \{(x, z), (x, z')\},\ R = \{(z, y)\},\ S = \{(z', y)\} \ \Rightarrow$
- $\Rightarrow \ R \cap S = \emptyset \Rightarrow (R \cap S) \circ T = \emptyset$
- $R \circ T = \{(x, y)\}$ e $S \circ T = \{(x, y)\} \ \Rightarrow \ R \circ T \ \cap \ S \circ T = \{(x, y)\}$

Exercício 6.8:

Sejam R, S, T relações quaisquer. Prove que:

- $(R \cap S) \circ T \ \subseteq \ R \circ T \ \cap \ S \circ T$
- $(R \cup S) \circ T \ = \ R \circ T \ \cup \ S \circ T$
- $(R - S) \circ T \ \supseteq \ R \circ T \ - \ S \circ T$

Solução

- $(x, y) \in (R \cup S) \circ T \Leftrightarrow \exists z : (x, z) \in T \wedge (z, y) \in R \cup S \Leftrightarrow$
- $\Leftrightarrow \exists z : (x, z) \in T \wedge ((z, y) \in R \vee (z, y) \in S) \Leftrightarrow$
- $\Leftrightarrow \exists z : ((x, z) \in T \wedge (z, y) \in R) \vee ((x, z) \in T \wedge (z, y) \in S) \Leftrightarrow$
- $\Leftrightarrow \exists z : ((x, z) \in T \wedge (z, y) \in R) \vee \exists z' : ((x, z') \in T \wedge (z', y) \in S) \Leftrightarrow$
- $\Leftrightarrow (x, y) \in R \circ T \vee (x, y) \in S \circ T \Leftrightarrow$
- $\Leftrightarrow (x, y) \in R \circ T \ \cup \ S \circ T \quad \square$

Exercício 6.8:

Sejam R, S, T relações quaisquer. Prove que:

- $(R \cap S) \circ T \subseteq R \circ T \cap S \circ T$
- $(R \cup S) \circ T = R \circ T \cup S \circ T$
- $(R - S) \circ T \supseteq R \circ T - S \circ T$

Solução

- $(x, y) \in R \circ T - S \circ T \Leftrightarrow$
- $\Leftrightarrow (x, y) \in R \circ T \wedge (x, y) \notin S \circ T \Leftrightarrow$
- $\Leftrightarrow \exists z : ((x, z) \in T \wedge (z, y) \in R) \wedge \forall z' : (x, z') \in T \rightarrow (z', y) \notin S) \Rightarrow$
- $\Rightarrow \exists z : (x, z) \in T \wedge (z, y) \in R \wedge (z, y) \notin S \Leftrightarrow$
- $\Leftrightarrow \exists z : (x, z) \in T \wedge (z, y) \in R - S \Leftrightarrow (x, y) \in (R - S) \circ T$

Contraexemplo da igualdade

- $T = \{(x, z), (x, z')\}$, $R = \{(z, y)\}$, $S = \{(z', y)\} \Rightarrow$
- $\Rightarrow R - S = \{(z, y)\} \Rightarrow (R - S) \circ T = \{(x, y)\}$
- $R \circ T = \{(x, y)\}$ e $S \circ T = \{(x, y)\} \Rightarrow R \circ T - S \circ T = \emptyset$

Exercício 6.9:

Seja $n \geq 1$ um número natural e A o conjunto dos inteiros entre 1 e n, inclusive. Note que o conjunto $A \times A$ tem n^2 pares. Encontre duas relações R e S sobre A, cada uma com no máximo $2n$ pares, tal que $R \circ S$ seja o conjunto $A \times A$.

Solução

- $S \;=\; \{(1,1),(2,1),(3,1),\ldots,(n,1)\}$
- $R \;=\; \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(1,n)\}$
- $\forall x, y \in A:\; (x,1) \in S \text{ e } (1,y) \in R \implies (x,y) \in R \circ S$
- $R \circ S \;=\; A \times A$

Inversa da Composta

Lema (inversa da composta)

Dadas relações R e S, temos que

$$(S \circ R)^{-1} \; = \; R^{-1} \circ S^{-1}$$

Prova:

- $(x, y) \in (S \circ R)^{-1} \iff (y, x) \in S \circ R \iff$
- $\iff \exists z : (y, z) \in R \; \wedge (z, x) \in S \iff$
- $\iff \exists z : (x, z) \in S^{-1} \; \wedge (z, y) \in R^{-1} \iff$
- $\iff (x, y) \in R^{-1} \circ S^{-1}$

Associatividade da Composição de Relações

Lema

Dadas relações R, S e T, temos que:

$$T \circ (S \circ R) \;=\; (T \circ S) \circ R$$

Prova - Exercício 6.13

- $(a, d) \in T \circ (S \circ R) \iff \exists c : (a, c) \in S \circ R \wedge (c, d) \in T \iff$
- $\exists c : (\exists b : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S) \wedge (c, d) \in T \iff$
- $\exists b : \; \exists c : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S \wedge (c, d) \in T \iff$
- $\exists b : (a, b) \in R \wedge (b, d) \in T \circ S \iff (a, d) \in (T \circ S) \circ R$

$$a \xrightarrow{R} b \xrightarrow{S} c \xrightarrow{T} d$$

Potência de uma Relação R

Definição recursiva

$R^1 = R$ e $\forall m \in \mathbb{N},\ m \geq 1$: $\ R^{m+1} = R^m \circ R$

Exemplo:

Seja R a relação em $\mathbb{N}$ tal que $(x, y) \in R \iff y = x + 1$. Ou seja, $R = \{(0, 1),\ (1, 2),\ (2, 3), \ldots\}$.

Descreva R^m para $m \geq 1$ qualquer

- $\forall x \in \mathbb{N} : (x, x+1) \in R$ e $(x+1, x+2) \in R \iff (x, x+2) \in R^2$
- $\forall x \in \mathbb{N} : (x, x+1) \in R$ e $(x+1, x+3) \in R^2 \iff (x, x+3) \in R^3$
- $\forall x \in \mathbb{N} : (x, x+1) \in R$ e $(x+1, x+4) \in R^3 \iff (x, x+4) \in R^4$
- $\ldots$
- $R^m = \{(x, x+m) : x \in \mathbb{N}\}$

Potência de uma Relação R

Definição recursiva

$R^1 = R$ e $\forall m \in \mathbb{N},\ m \geq 1$: $\ R^{m+1} = R^m \circ R$

Exemplo:

Seja R a relação em $\mathbb{N}$ tal que $(x, y) \in R \iff y = x + 1 \ \vee \ y = x + 2$.
Ou seja, $R = \{(x, x+1),\ (x, x+2)\ :\ x \in \mathbb{N}\}$.
Ou seja, $R = \{(0,1),\ (0,2),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,3),\ (2,4), \ldots\}$.

Descreva R^m para $m \geq 1$ qualquer

- $R^2 = \{(x, x+2), (x, x+3), (x, x+4)\ :\ x \in \mathbb{N}\}$
- $R^3 = \{(x, x+3), (x, x+4), (x, x+5), (x, x+6)\ :\ x \in \mathbb{N}\}$
- $R^4 = \{(x, x+4), \ldots, (x, x+8)\ :\ x \in \mathbb{N}\}$
- $\ldots$
- $R^m\ =\ \{(x, x+m), \ldots, (x, x+2m)\ :\ x \in \mathbb{N}\}$

Potência de uma Relação R

Definição recursiva

$R^1 = R$ e $\forall m \in \mathbb{N},\ m \geq 1$: $R^{m+1} = R^m \circ R$

Exercício 6.16

Prove que, para toda relação R e quaisquer m e n inteiros positivos: $R^m \circ R^n = R^{m+n}$.

Solução

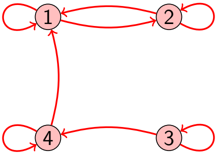
- Prova por indução em n.
- **Caso base:** $n = 1 \Rightarrow R^m \circ R^1 = R^m \circ R = R^{m+1}$. OK
- **HI:** Fixe $n > 1$ e assuma que vale para todo $n' < n$. Ou seja, para todo $1 \leq n' < n : R^m \circ R^{n'} = R^{m+n'}$.
- **PI:** Vamos provar que vale para n.
- $R^m \circ R^n = R^m \circ (R^{n-1} \circ R) = (R^m \circ R^{n-1}) \circ R =$
- $= R^{m+n-1} \circ R = R^{m+n}$

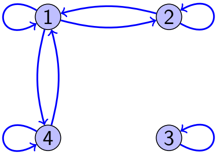
Relação R em A - $R \subseteq A \times A$ - $Dom(R) \cup Img(R) \subseteq A$

- Reflexiva sobre A: $\forall a \in A : (a, a) \in R$ — Todos os laços
- Irreflexiva: $\nexists a : (a, a) \in R$ — Nenhum laço
- Simétrica: $(x, y) \in R \implies (y, x) \in R$ — Vai e volta
- Antissimétrica: $(x, y) \in R, x \neq y \implies (y, x) \notin R$ — Vai, não volta
- Transitiva: $(x, y) \in R \ \wedge \ (y, z) \in R \implies (x, z) \in R$

Exemplos: $A = \{1, 2, 3, 4\}$

- $R_1 = \{(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (3,4),\ (4,1),\ (4,4)\}$
- $R_2 = \{(1,1),\ (1,2),\ (2,1)\}$
- $R_3 = \{(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (1,4),\ (4,1),\ (4,4)\}$



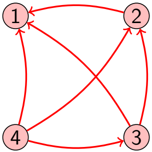


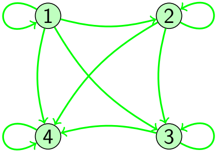
Relação R em A - $R \subseteq A \times A$ - $Dom(R) \cup Img(R) \subseteq A$

- Reflexiva sobre A: $\forall a \in A : (a, a) \in R$ — Todos os laços
- Irreflexiva: $\nexists a : (a, a) \in R$ — Nenhum laço
- Simétrica: $(x, y) \in R \implies (y, x) \in R$ — Vai e volta
- Antissimétrica: $(x, y) \in R, x \neq y \implies (y, x) \notin R$ — Vai, não volta
- Transitiva: $(x, y) \in R \ \wedge \ (y, z) \in R \implies (x, z) \in R$

Exemplos: $A = \{1, 2, 3, 4\}$

- $R_4 = \{(2,1),\ (3,1),\ (3,2),\ (4,1),\ (4,2),\ (4,3)\}$
- $R_5 = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (3,3),\ (3,4),\ (4,4)\}$
- $R_6 = \{(3,4)\}$





6.3. Propriedades de Relações

Exercício 6.17

Prove que uma relação R é irreflexiva se e somente se ela é disjunta de I_A onde $A = Dom(R)$ ou $A = Img(R)$.

Lembretes:

- $I_A \; = \; \{(a, a) : \; a \in A\}$ (relação Identidade do conjunto A)
- R é irreflexiva se e só se $\nexists a : (a, a) \in R$.

Solução

- R é irreflexiva $\iff \nexists a : (a, a) \in R \iff$
- $\iff \; \nexists a \in Dom(R) : (a, a) \in R \iff R \cap I_{Dom(R)} = \emptyset$
- $\ldots$
- $\iff \; \nexists a \in Img(R) : (a, a) \in R \iff R \cap I_{Img(R)} = \emptyset$

6.3. Propriedades de Relações

Exercício 6.18

Prove que uma relação R é simétrica se e somente se ela é igual à sua inversa.

Lembretes:

- $R^{-1} \; = \; \{(y,x) : \; (x,y) \in R\}$ (relação Inversa de R)
- R é simétrica se e só se $\forall (x,y) \in R : \; (y,x) \in R$.

Solução

- R é simétrica $\iff \forall (x,y) \in R : \; (y,x) \in R \iff$
- $\iff \; \forall (x,y) \in R : \; (x,y) \in R^{-1} \iff R \subseteq R^{-1} \; \iff$
- ...
- $\iff \; \forall (y,x) \in R^{-1} : \; (y,x) \in R \iff R^{-1} \subseteq R \; \iff$
- ...
- $\iff \; R = R^{-1}$

6.3. Propriedades de Relações

Exercício 6.19

Prove que uma relação R é antissimétrica e irreflexiva se e somente se ela é disjunta de sua inversa.

Lembretes:

- A e B são disjuntos se e só se $A \cap B = \emptyset$
- $R^{-1} \ = \ \{(y, x) : \ (x, y) \in R\}$ (relação Inversa de R)
- R é antissimétrica se e só se $\forall x \neq y : \ (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$.

Solução

- R é antissimétrica e irreflexiva $\iff \forall (x, y) \in R : (y, x) \notin R \iff$
- $\iff \ \forall (x, y) \in R : \ (x, y) \notin R^{-1} \iff R \cap R^{-1} \ = \ \emptyset$

Exercício 6.20

Seja R uma relação simétrica e transitiva sobre um conjunto A. Prove que, se para todo $x \in A$, existe um $y \in A$ tal que xRy, então R é reflexiva.

Lembretes:

- $xRy \iff (x, y) \in R$
- R é simétrica se e só se $\forall (x, y) \in R: \ (y, x) \in R$.
- R é transitiva se e só se $\forall (x, y), (y, z) \in R: \ (x, z) \in R$.
- R é reflexiva sobre A se e só se $\forall a \in A: \ (a, a) \in R$.

Solução

- Seja R uma relação simétrica e transitiva tal que $\forall x \in A: \ \exists y: xRy$.
- Seja x um elemento qualquer de A. Logo existe y tal que $(x, y) \in R$.
- R é simétrica: $(y, x) \in R$.
- Como R é transitiva: $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \iff (x, x) \in R$.
- Como $\forall x \in A: \ (x, x) \in R$, então R é reflexiva.

Exercício Lista 2

Mostre que se R é uma relação reflexiva e transitiva, então $R \cap R^{-1}$ é uma reflexiva, simétrica e transitiva.

Solução

- REF: $x \in Dom(R \cap R^{-1}) \Longrightarrow (x,x) \in R \Longrightarrow (x,x) \in R^{-1} \Longrightarrow$
- $\Longrightarrow\ (x,x) \in R \cap R^{-1} \Longrightarrow$ $R \cap R^{-1}$ é reflexiva
- SIM: $(x,y) \in R \cap R^{-1} \Longrightarrow (x,y) \in R \Longrightarrow (y,x) \in R^{-1}$
- $(x,y) \in R \cap R^{-1} \Longrightarrow (x,y) \in R^{-1} \Longrightarrow (y,x) \in R$
- $(x,y) \in R \cap R^{-1} \Longrightarrow (y,x) \in R \cap R^{-1} \Longrightarrow$ $R \cap R^{-1}$ é simétrica
- TR: $(x,y),(y,z) \in R \cap R^{-1} \Longrightarrow (x,y),(y,z) \in R \Longrightarrow (x,z) \in R$.
- $(x,y),(y,z) \in R \cap R^{-1} \Longrightarrow (x,y),(y,z) \in R^{-1} \Longrightarrow$
- $\Longrightarrow (z,y),(y,x) \in R \Longrightarrow (z,x) \in R \Longrightarrow (x,z) \in R^{-1}$.
- $(x,y),(y,z) \in R \cap R^{-1} \Rightarrow (x,z) \in R \cap R^{-1} \Rightarrow$ $R \cap R^{-1}$ é transitiva

Exercício Lista 2

Sejam A um conjunto e $R \subseteq A \times A$. Seja ainda $S = R^2 = R \circ R$:

$$S = \{(a, a') \mid \exists a'' \in A, (a, a'') \in R \wedge (a'', a') \in R\}.$$

Prove ou dê um contra-exemplo:

(a) R é reflexiva, simétrica e transitiva $\Longrightarrow$ S também o é.

(b) S é reflexiva, simétrica e transitiva $\Longrightarrow$ R também o é.

Solução (b): Contraexemplo

- $R = \{(1, 2),\ (2, 1)\} \Longrightarrow S = \{(1, 1),\ (2, 2)\} \Longrightarrow$
- $\Longrightarrow$ S é reflexiva, simétrica e transitiva, mas R não é reflexiva.

Exercício Lista 2

Sejam A um conjunto e $R \subseteq A \times A$. Seja ainda $S = R^2 = R \circ R$:

$$S = \{(a, a') \mid \exists a'' \in A, (a, a'') \in R \wedge (a'', a') \in R\}.$$

Prove ou dê um contra-exemplo:

(a) R é reflexiva, simétrica e transitiva $\Longrightarrow$ S também o é.

(b) S é reflexiva, simétrica e transitiva $\Longrightarrow$ R também o é.

Solução (a):

- REF: $a \in A \Longrightarrow (a, a) \in R \Longrightarrow$
- $\Longrightarrow (a, a) \in R \wedge (a, a) \in R \Longrightarrow (a, a) \in S \Longrightarrow$ S é reflexiva.
- SIM: $(a, c) \in S \Longrightarrow \exists b : (a, b), (b, c) \in R \Longrightarrow$
- $\Longrightarrow (c, b), (b, a) \in R \Longrightarrow (c, a) \in S \Longrightarrow$ S é simétrica.
- TR: $(a, c), (c, e) \in S \Longrightarrow \exists b, d : (a, b), (b, c), (c, d), (d, e) \in R \Longrightarrow$
- $\Longrightarrow (a, c), (c, e) \in R \Longrightarrow (a, e) \in S \Longrightarrow$ S é transitiva.

6.3.1. Composição e Transitividade

Exercício 6.21

Demonstre a afirmação, ou encontre um contraexemplo: "Se $R^4 \subseteq R$, então R é transitiva".

Lembretes:

- Teorema 6.3: R é transitiva $\iff R \circ R = R^2 \subseteq R$
- Teorema 6.4: R é transitiva $\iff R^n \subseteq R, \forall n \geq 1$

Solução: contraexemplo

- $R = \{(1,2),\ (2,3),\ (3,1)\}$
- $R^2 = \{(1,3),\ (2,1),\ (3,2)\}$
- $R^3 = \{(1,1),\ (2,2),\ (3,3)\}$
- $R^4 = \{(1,2),\ (2,3),\ (3,1)\}$
- $R^4 = R$, mas R não é transitiva
- $\square$

6.3.1. Composição e Transitividade

Exercício 6.21'

Demonstre a afirmação, ou encontre um contraexemplo: "Se $R^5 \subseteq R$, então R é transitiva".

Lembretes:

- Teorema 6.3: R é transitiva $\iff R \circ R = R^2 \subseteq R$
- Teorema 6.4: R é transitiva $\iff R^n \subseteq R, \forall n \geq 1$

Solução: contraexemplo

- $R = \{(1,2),\ (2,3),\ (3,4),\ (4,1)\}$
- $R^2 = \{(1,3),\ (2,4),\ (3,1),\ (4,2)\}$
- $R^3 = \{(1,4),\ (2,1),\ (3,2),\ (4,3)\}$
- $R^4 = \{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4)\}$
- $R^5 = \{(1,2),\ (2,3),\ (3,4),\ (4,1)\}$
- $R^5 = R$, mas R não é transitiva $\square$

6.3.1. Composição e Transitividade

Exercício 6.21"

Demonstre a afirmação, ou encontre um contraexemplo: "Se $R^3 \subseteq R$, então R é transitiva".

Lembretes:

- Teorema 6.3: R é transitiva $\iff R \circ R = R^2 \subseteq R$
- Teorema 6.4: R é transitiva $\iff R^n \subseteq R, \forall n \geq 1$

Solução: contraexemplo

- $R = \{(1,2),\ (2,1)\}$
- $R^2 = \{(1,1),\ (2,2)\}$
- $R^3 = \{(1,2),\ (2,1)\}$
- $R^3 = R$, mas R não é transitiva $\square$
- pois $(1,2) \in R$ e $(2,1) \in R$, mas $(1,1) \notin R$ e $(2,2) \notin R$
- $\square$

6.4. Representação de Relações usando Matrizes

Notações $\sum$ (somatório) e $\prod$ (produtório)

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais.

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$$

$$\prod_{k=1}^{n} x_k = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n$$

Notações $\bigwedge$ e $\bigvee$

Sejam $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sentenças lógicas (com valor **F** ou **V**).

$$\bigvee_{k=1}^{n} S_k = S_1 \vee S_2 \vee S_3 \vee \ldots \vee S_n$$

$$\bigwedge_{k=1}^{n} S_k = S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge \ldots \wedge S_n$$

6.4. Representação de Relações usando Matrizes

Notações $\bigcap$ e $\bigcup$

Sejam $C_1, C_2, \ldots, C_n$ conjuntos.

$$\bigcup_{k=1}^{n} C_k = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \ldots \cup C_n$$

$$\bigcap_{k=1}^{n} C_k = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \ldots \cap C_n$$

Notações $\bigwedge$ e $\bigvee$

Sejam $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sentenças lógicas (com valor **F** ou **V**).

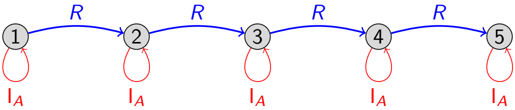
$$\bigvee_{k=1}^{n} S_k = S_1 \vee S_2 \vee S_3 \vee \ldots \vee S_n$$

$$\bigwedge_{k=1}^{n} S_k = S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge \ldots \wedge S_n$$

Fecho Reflexivo

Exemplo: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

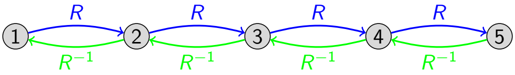
- $R \;=\; \{(1,2),\ (2,3),\ (3,4),\ (4,5)\}$
-
- $I_A \;=\; \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$
- Fecho Reflexivo de $R \;=\; R \,\cup\, I_A$



Fecho Simétrico

Exemplo: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

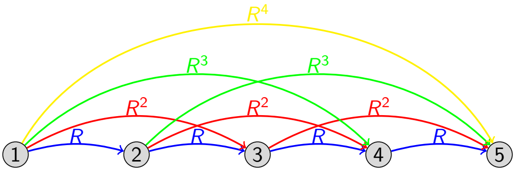
- $R \;=\; \{(1,2),\; (2,3),\; (3,4),\; (4,5)\}$
-
- $R^{-1} \;=\; \{(2,1),\; (3,2),\; (4,3),\; (5,4)\}$
- Fecho Simétrico de $R \;=\; R \;\cup\; R^{-1}$



Fecho Transitivo

Exemplo: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- $R \;=\; \{(1,2),\; (2,3),\; (3,4),\; (4,5)\}$
-
- $R^2 \;=\; \{(1,3),(2,4),(3,5)\}$
- $R^3 \;=\; \{(1,4),(2,5)\}$
- $R^4 \;=\; \{(1,5)\}$
- Fecho Transitivo $R^* \;=\; R \;\cup\; R^2 \;\cup\; R^3 \;\cup\; R^4$



Fecho Transitivo

Teorema 6.6: Relação S transitiva: $R \subseteq S \implies R^* \subseteq S$

Dada uma relação R, toda relação transitiva S que contém R também contém o fecho transitivo R^* de R.

Prova:

- Relações R e S tais que $R \subseteq S$ e S é transitiva.
- Teorema 6.2: $R \subseteq S \implies R^n \subseteq S^n, \ \forall n \geq 1$.
- Teorema 6.4: S transitiva $\implies S^n \subseteq S, \ \forall n \geq 1$.
- Logo $R^n \subseteq S, \forall n \geq 1$.
- $R^* = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \subseteq S$. $\square$

Fechos de uma Relação - Exercício 6.22

Exercício 6.22:

Encontre os fechos reflexivo, simétrico e transitivo das seguintes relações:

- $A = \{a, b, c\}$ e $R_1 = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, b)\}$.
- $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $R_2 = \{(0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 0)\}$.

Solução:

- Reflexivo $= R_1 \cup \{(b, b), (c, c)\}$
- Simétrico $= R_1 \cup \{(b, a)\}$
- Transitivo $R_1^* = R_1 \cup \{(a, c), (b, b), (c, c)\}$
-
-
- Reflexivo $= R_2 \cup \{(0, 0), (3, 3)\}$
- Simétrico $= R_2 \cup \{(1, 0), (2, 1), (0, 2), (0, 3)\}$
- Transitivo $R_2^* = R_2 \cup \{(0, 2), (0, 0), (1, 0), (2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$

Fechos de uma Relação - Exercício 6.23

Exercício 6.23:

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e
$R = \{(1,3),(2,4),(3,1),(3,5),(4,3),(5,1),(5,2),(5,4)\}$. Encontre as potências R^2, R^3, R^4, R^5, R^6 e o fecho transitivo R^*.

Solução:

$R^2 = \{(1,1),(1,5),(2,3),(3,3),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,5),(5,3),(5,4)\}$
$R^3 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,5),(3,1),(3,3),(3,4),(3,5),$
$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(5,1),(5,3),(5,5)\}$
$R^4 = \{(1,\underline{1\text{-}3\text{-}4\text{-}5}),(2,\underline{1\text{-}2\text{-}3\text{-}4}),(3,\underline{1\text{-}2\text{-}3\text{-}4\text{-}5}),(4,\underline{1\text{-}3\text{-}4\text{-}5}),(5,\underline{1\text{-}2\text{-}3\text{-}4\text{-}5})\}$
$R^5 = \{(1,\underline{1\text{-}2\text{-}3\text{-}4\text{-}5}),(2,\underline{1\text{-}3\text{-}4\text{-}5}),(3,\underline{1\text{-}2\text{-}3\text{-}4\text{-}5}),(4,\underline{1\text{-}2\text{-}3\text{-}4\text{-}5}),(5,\underline{1\text{-}2\text{-}3\text{-}4\text{-}5})\}$
$R^6 = \{(1,\underline{1\text{-}\ldots\text{-}5}),\ (2,\underline{1\text{-}\ldots\text{-}5}),\ (3,\underline{1\text{-}\ldots\text{-}5}),\ (4,\underline{1\text{-}\ldots\text{-}5}),\ (5,\underline{1\text{-}\ldots\text{-}5})\}$

- $R^* = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup R^5 \cup R^6 = R^6 = A \times A$
- $(1,3),(3,5),(5,2),(2,4),(4,3),(3,1) \in R$
- Ciclo com todos os elementos de $A \implies R^* = A \times A$

Fechos de uma Relação - Exercício 6.24

Exercício 6.24:

Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Encontre a menor relação contendo a relação $R = \{(1, 2), (1, 4), (3, 3), (4, 1)\}$ que é:

(a) Simétrica e reflexiva sobre A.

(b) Reflexiva sobre A e transitiva.

(c) Simétrica e transitiva.

(d) Reflexiva sobre A, simétrica e transitiva.

Solução:

(a) $R \cup \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (4, 4), (5, 5), (2, 1)\}$

(b) $R \cup \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (4, 4), (5, 5)\}$

(c) $R \cup \{(2, 1), (1, 1), (2, 2), (4, 4)\}$

(d) $R \cup \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (4, 4), (5, 5), (2, 1)\}$

Fechos de uma Relação - Exercício 6.25

Exercício 6.25:

Sejam R_1 e R_2 relações sobre o conjunto A, tais que $R_1 \subseteq R_2$.

- S_1 e S_2 fechos reflexivos de R_1 e R_2. Prove que $S_1 \subseteq S_2$.
- S_1 e S_2 fechos simétricos de R_1 e R_2. Prove que $S_1 \subseteq S_2$.
- S_1 e S_2 fechos transitivos de R_1 e R_2. Prove que $S_1 \subseteq S_2$.

Solução:

- REF: $R_1 \subseteq R_2 \implies R_1 \cup I_A \subseteq R_2 \cup I_A \implies S_1 \subseteq S_2$. $\square$
- SIM:
  $R_1 \subseteq R_2 \implies R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1} \implies R_1 \cup R_1^{-1} \subseteq R_2 \cup R_2^{-1} \implies S_1' \subseteq S_2'$.
  $\square$
- TR: $R_1 \subseteq R_2 \implies R_1^n \subseteq R_2^n,\ \forall n \geq 1 \implies R_1^1 \cup R_1^2 \cup\ R_1^3 \ldots \subseteq R_2^1 \cup R_2^2 \cup\ R_2^3 \ldots \implies R_1^* \subseteq R_2^*$. $\square$

Fechos de uma Relação - Exercício 6.26

Sejam R_1 e R_2 relações sobre o conjunto A, e $R = R_1 \cup R_2$.

- S_1, S_2 e S fechos reflexivos de R_1, R_2 e R. Prove $S_1 \cup S_2 = S$.
- S_1, S_2 e S fechos simétricos de R_1, R_2 e R. Prove $S_1 \cup S_2 = S$.
- S_1, S_2 e S fechos transitivos de R_1, R_2 e R. Prove $S_1 \cup S_2 \subseteq S$. Encontre um exemplo em que não é igual.

Solução:

- REF: $S = (R_1 \cup R_2) \cup I_A = (R_1 \cup I_A) \cup (R_2 \cup I_A) = S_1 \cup S_2$. $\square$
- SIM:
  $S = (R_1 \cup R_2) \cup (R_1 \cup R_2)^{-1} = (R_1 \cup R_2) \cup (R_1^{-1} \cup R_2^{-1}) = S_1 \cup S_2$. $\square$
- TR: $R_1^n \cup R_2^n \subseteq (R_1 \cup R_2)^n, \ \forall n \geq 1 \implies R_1^* \cup R_2^* \subseteq (R_1 \cup R_2)^*$.
- Exemplo: $R_1 = \{(1,2)\}, \ R_2 = \{(2,3)\} \implies$
- $\implies R_1^* \cup R_2^* = \{(1,2),(2,3)\} \neq \{(1,2),(2,3),(1,3)\} = (R_1 \cup R_2)^*$.

Fechos de uma Relação - Exercício 6.27

Sejam R_1 e R_2 relações sobre o conjunto A, e $R = R_1 \cap R_2$.

- S_1, S_2 e S fechos reflexivos de R_1, R_2 e R. Prove $S = S_1 \cap S_2$.
- S_1, S_2 e S fechos simétricos de R_1, R_2 e R. Prove $S \subseteq S_1 \cap S_2$. Mostre um exemplo em que não é igual.
- S_1, S_2 e S fechos transitivos de R_1, R_2 e R. Prove $S \subseteq S_1 \cap S_2$. Mostre um exemplo em que não é igual.

Solução:

- REF: $S = (R_1 \cap R_2) \cup I_A = (R_1 \cup I_A) \cap (R_2 \cup I_A) = S_1 \cap S_2$. $\square$
- SIM: $S = (R_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap R_2)^{-1} = (R_1 \cap R_2) \cup (R_1^{-1} \cap R_2^{-1}) = S_1 \cap S_2 \cap (R_1 \cup R_2^{-1}) \cap (R_2 \cup R_1^{-1})$. $\square$
- $R_1 = \{(1,2)\}$, $R_2 = \{(2,1)\} \Rightarrow R = \emptyset, S_1 = S_2 = \{(1,2),(2,1)\}$
- TR: $(R_1 \cap R_2)^n \subseteq R_1^n \cap R_2^n$, $\forall n \geq 1 \implies (R_1 \cap R_2)^* \subseteq R_1^* \cup R_2^*$.
- Exemplo: $R_1 = \{(1,2),(2,4)\}, R_2 = \{(1,3),(3,4)\} \implies$
- $\implies (R_1 \cap R_2)^* = \emptyset \neq \{(1,4)\} = R_1^* \cap R_2^*$.

Fechos de uma Relação - Exercício 6.28

Exercício 6.28:

Seja R a relação sobre o conjunto dos números inteiros positivos tal que aRb se e somente se existe um número primo p tal que $a = pb$. Qual é o fecho reflexivo de R? Qual é o fecho transitivo de R? Qual é o fecho transitivo e reflexivo?

Solução:

- REF: $S = R \cup I_{\mathbb{N}^*}$, onde $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$. Ou seja,
- aSb se e só se $a = pb$ para p primo ou igual a $p = 1$.
- TR: aR^*b se e só se $a > b > 0$ e a é múltiplo de b.
- TR+REF: $aR^{**}b$ se e só se $a \geq b > 0$ e a é múltiplo de b
- Exemplo: $300R100, 100R50, 50R10, 10R2 \Rightarrow 100R^*2$
- Mais formalmente:
  $aR^nb \iff \exists$ *primos* $p_1, \ldots, p_n$: $a = p_1p_2 \ldots p_n\ b$. Pelo Teorema Fudamental da Aritmética, todo número> 1 pode ser decomposto em um produto de números primos e por $R^* = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \ldots$.

Capítulo 7.1
ORDENS PARCIAIS

Ordens Parciais - Exercício 7.1

Exercício 7.1:

Seja R a relação sobre o conjunto dos números inteiros positivos $(\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}^*)$ tal que aRb se e somente se existe um inteiro positivo k tal que $a = k \cdot b$. Prove que R é uma relação de ordem.

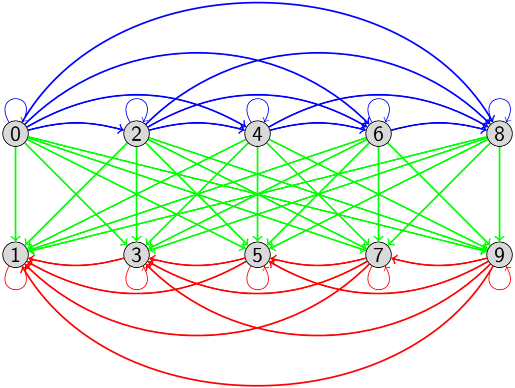
Solução:

- REF: $a \;=\; 1 \cdot a,\ \forall a \in \mathbb{Z}^+ \iff aRa \iff (a,a) \in R. \quad \square$
- AntiSIM: $aRb \,\wedge\, a \neq b \implies a = kb$ para $k \geq 2 \implies b < a \implies (b,a) \notin R. \quad \square$
- TR: $aRb \,\wedge\, bRc \implies a = k_1 \cdot b \,\wedge\, b = k_2 \cdot c$ com $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^+ \implies a = k_1 k_2 \cdot c \implies aRc \iff (a,c) \in R \quad \square.$

Ordens Parciais - Exercício 7.2

Exercício 7.2:

Seja A o conjunto dos inteiros de 0 a 9 e seja R a relação sobre A tal que aRb se e somente se a é par e b é ímpar, ou ambos são pares e $a \leq b$, ou ambos são ímpares e $a \geq b$. Esta é uma relação de ordem?



Ordens Parciais - Exercício 7.2

Exercício 7.2:

Seja A o conjunto dos inteiros de 0 a 9 e seja R a relação sobre A tal que aRb se e somente se a é par e b é ímpar, ou ambos são pares e $a \leq b$, ou ambos são ímpares e $a \geq b$. Esta é uma relação de ordem?

Solução: SIM

- REF: $a \leq a \;\wedge\; a \geq a \iff aRa, \forall a \in \mathbb{Z}. \quad \square$
- AntiSIM:
  - i aRb, a par e b ímpar $\implies (b,a) \notin R \quad \square$
  - ii aRb, a, b pares e $a < b \implies b \nleq a \implies (b,a) \notin R. \quad \square$
  - iii aRb, a, b ímpares e $a > b \implies b \ngeq a \implies (b,a) \notin R. \quad \square$
- TR: $aRb \;\wedge\; bRc$:
- a, b, c pares e $a \leq b \leq c \implies a, c$ pares e $a \leq c \implies aRc$
- a, b pares, c ímpar e $a \leq b \implies a$ par e c ímpar $\implies aRc$
- a par, b, c ímpares e $b \leq c \implies a$ par e c ímpar $\implies aRc$
- a, b, c ímpares e $a \geq b \geq c \implies a, c$ ímpares e $a \geq c \implies aRc$

Ordens Parciais - Exercício 7.3

Exercício 7.3:

Considere a relação R sobre os pares ordenados de inteiros $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $(a, b)R(c, d) \iff (a \leq c) \vee (b \leq d)$ para quaisquer inteiros a, b, c e d. Esta é uma relação de ordem?

Solução: NÃO

- Contraexemplo:
- $a = d = 1$ e $b = c = 2 \implies (1, 2)R(2, 1)$, pois $a \leq c$
- $a = d = 2$ e $b = c = 1 \implies (2, 1)R(1, 2)$, pois $b \leq d$
- Portanto R não é antissimétrica. Logo R não é uma relação de ordem.

Ordens Parciais - Exercício 7.3b

Exercício 7.3b:

Considere a relação R sobre os pares ordenados de inteiros $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $(a, b)R(c, d) \iff (a \leq c) \wedge (b \leq d)$ para quaisquer inteiros a, b, c e d. Esta é uma relação de ordem?

Solução: SIM

- REF: $a \leq a \;\wedge\; b \leq b \implies (a, b)R(a, b), \forall a, b \in \mathbb{Z}.$ $\square$
- AntiSIM: $(a, b)R(c, d) \;\wedge (c, d)R(a, b) \implies a \leq c \;\wedge\; b \leq d \;\wedge c \leq a \;\wedge\; d \leq b \implies a = c \;\wedge\; b = d \implies (a, b) = (c, d).$ $\square$
- TR: $(a, b)R(c, d) \;\wedge\; (c, d)R(x, y) \implies a \leq c \leq x \;\wedge\; b \leq d \leq y \implies a \leq x \;\wedge\; b \leq y \implies (a, b)R(x, y).$ $\square$

Ordens Parciais - Exercício 7.4

Exercício 7.4:

Seja R uma relação de ordem sobre um conjunto B ($R \subseteq B \times B$). Prove que, para todo subconjunto A de B ($A \subseteq B$), a restrição R' de R a A é uma relação de ordem sobre A.

Solução:

- **Lembrete:** $xR'y \iff xRy \land x, y \in A$
- REF: $a \in A \implies a \in B \implies (a, a) \in R \implies (a, a) \in R'.\quad \square$
- AntiSIM: $xR'y \implies xRy \implies (y, x) \notin R \implies (y, x) \notin R'.\quad \square$
- TR: $xR'y \land yR'z \implies x, y, z \in A \land xRy \land yRz \implies x, z \in A \land xRz \implies xR'z.\quad \square$

Ordens Parciais - Exercício 7.5

Exercício 7.5:

Para quaisquer relações de ordem R e S sobre um conjunto A, a relação $R \cup S$ é sempre uma relação de ordem sobre A? E a relação $R \cap S$? Prove suas respostas.

Solução: NÃO para $R \cup S$

- Contraexemplo: $A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$ e $S = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\} \implies R$ e S são ordens parciais.
- No entanto, $\{(1, 2), (2, 3)\} \subseteq R \cup S$, mas $(1, 3) \notin R \cup S$.

Solução: SIM para $R \cap S$

- REF: $(a, a) \in R \ \wedge \ (a, a) \in S, \ \forall a \in A \implies (a, a) \in R \cap S. \quad \square$
- AntiSIM: $(x, y) \in R \cap S \ \wedge x \neq y \implies (y, x) \notin R \ \wedge \ (y, x) \notin S \implies (y, x) \notin R \cap S. \quad \square$
- TR: $(x, y) \in R \cap S \ \wedge \ (y, z) \in R \cap S \implies (x, z) \in R \ \wedge \ (x, z) \in S \implies (x, z) \in R \cap S. \quad \square$

Ordens Parciais - Exercício 7.6

Exercício 7.6:

Seja A o conjunto de todos os arquivos em um sistema de arquivos e seja R a relação sobre A tal que aRb se e somente se o arquivo a contém uma cópia do conteúdo do arquivo b, possivelmente com informações adicionais antes do início de b ou depois do fim de b. A relação R é uma relação de ordem?

Solução: SIM

- REF: Arquivo a contém $a \implies (a, a) \in R$. $\square$
- AntiSIM: $(a, b) \in R \ \wedge a \neq b \implies$ arquivo a tem cópia do arquivo b e possui dados extras antes ou depois de sua cópia interna de $b \implies$ b não tem cópia de $a \implies (b, a) \notin R$. $\square$
- TR: $(a, b) \in R \ \wedge \ (b, c) \in R \implies a$ tem cópia de b e b tem cópia de $c \implies a$ tem cópia de $c \implies (a, c) \in R$. $\square$

Ordens Parciais - Exercício 7.7

Exercício 7.7:

Seja A um conjunto de caixas e seja R a relação sobre A tal que aRb se e somente se a caixa a cabe dentro da caixa b. Prove que R é uma relação de ordem estrita.

Solução:

- IRREF: Caixa a não cabe em $a \implies (a, a) \notin R$. $\square$
- AntiSIM: $(a, b) \in R \implies$ caixa a cabe em $b \implies$ caixa b não cabe em $a \implies (b, a) \notin R$. $\square$
- TR: $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \implies$ caixa a cabe em b e caixa b cabe em $c \implies$ caixa a cabe na caixa $c \implies (a, c) \in R$. $\square$

Ordens Parciais - Exercício 7.8

Exercício 7.8:

A ordem estrita sobre um conjunto de caixas definida no exercício 7.7 é uma ordem total?

Solução: NÃO

- Podem existir duas caixas a e b tais que a não cabe em b e também b não cabe em a.
- Por exemplo, caixas com medidas $1 \times 1 \times 5$ e $2 \times 2 \times 2$.

Ordens Parciais - Exercício 7.9

Exercício 7.9:

Seja R uma relação de ordem total sobre um conjunto B ($R \subseteq B \times B$). Prove que, para todo subconjunto A de B ($A \subseteq B$), a restrição R' de R a A também é uma relação de ordem total sobre A. (Veja o exercício 7.4.)

Exercício 7.4:

Seja R uma relação de ordem ~~total~~ sobre um conjunto B ($R \subseteq B \times B$). Prove que, para todo subconjunto A de B ($A \subseteq B$), a restrição R' de R a A também é uma relação de ordem ~~total~~ sobre A.

Solução Ex. 7.9:

- **Lembrete:** $xR'y \iff xRy \;\wedge\; x, y \in A$
- No Exercício 7.4, provamos que R' é uma relação de ordem. Falta provar que é **total**.
- $x, y \in A \implies x, y \in B \implies xRy \;\vee\; yRx \implies xR'y \;\vee\; yR'x.$ $\square$

Exercício 7.10:

Seja R uma relação sobre um conjunto A e seja S a relação complementar, $S = (A \times A) - R$. Prove ou mostre um contraexemplo:

(i) R é de ordem **se e só se** S é de ordem estrita. (F)

(ii) R é de ordem total **se e só se** S é de ordem estrita total. (**V**)

- **Contraexemplo (i):** $A = \{1, 2\}$, $1R1$, $2R2$, $1S2$ e $2S1$.
- R é ordem, mas S não é antissimétrica (não é ordem estrita)

- **Prova (ii):** R é reflexiva se e somente se S é irreflexiva. Ok.
- Suponha que R é uma ordem total e $x, y, z \in A$ são distintos.
- $x, y \in A \implies xRy \lor yRx$ (pois R é **total**)
- $\implies (xRy \land y\cancel{R}x) \lor (yRx \land x\cancel{R}y)$ (pois R é **antissimétrica**)
- $\implies (x\cancel{S}y \land ySx) \lor (y\cancel{S}x \land xSy) \implies S$ é total e antissimétrica
- $xSy \land ySz \implies zRy \land yRx \implies zRx \implies xSz \implies S$ transitiva.
- Argumento análogo para: S é de ordem estrita $\implies$ R é de ordem.

Conjunto A^k de k-uplas sobre um alfabeto A

Definição k-upla

- k-**upla** $=$ generalização de Par Ordenado para k ordenadas.
- pares (duplas k=2), triplas (k=3), quádruplas (k=4), quíntuplas (k=5), ...
- Ex1: Triplas pitagóricas (3,4,5), (5,12,13), (6,8,10).
- Ex2: Pontos (x, y, z) da esfera de raio 1: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Definição $A^k = A \times A \times \ldots \times A$ (k vezes)

Dado conjunto A , definimos A^k o conjunto das k-uplas (ordenadas) com elementos de A.

- Ex1: $\mathbb{R}^3$: pontos do espaço tridimensional.
- Ex2: $\{C, K\}^5$ $=$ conjunto dos possíveis resultados ao lançar uma moeda 5 vezes, para C (cara) e K (coroa) $= \Big\{$(C,C,C,C,C), (C,C,C,C,K), (C,C,C,K,C), (C,C,C,K,K), (C,C,K,C,C),... $\Big\}$.

Conjunto A^* de palavras sobre um conjunto A

Definição A^* (A estrela)

Dado conjunto A (alfabeto), definimos A^* (A estrela) como o conjunto das sequências (palavras) finitas de elementos de A (a ordem importa).

- Ex1: $A = \{a\}, \quad A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, \ldots\}$.
- Ex2: $A = \{a, b\}$, $A^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}$.

Chamaremos os elementos de A de letras e os elementos de A^* de palavras. O tamanho de uma palavra u é o seu número de letras. A palavra vazia, denotada por ε ou (), tem tamanho 0.

Concatenação:

Dadas duas palavras u e v, a concatenação de u e v, escrita uv é a palavra obtida ao se escrever as letras de u seguidas das letras de v.

- Exemplo: Alfabeto $A = \{a, b\}$, $u = ab$ e $v = ba$.
- $uv = abba$, $vu = baab$, $uuvv = ababbaba$
- baa é **prefixo** de vu; aba é **sufixo** de $uuvv$.

Ordem Lexicográfica R^* de uma relação R

É uma Relação de Ordem (R^*) sobre o conjunto A^* de palavras sobre um alfabeto A (dada uma relação de ordem R sobre os elementos de A). *Não confundir com fecho transitivo R^**. **Exemplo:** dicionário.

Ordem lexicográfica $\mathbf{R}^*$ de uma relação R

Dada uma relação de ordem R sobre um conjunto A, seja $\mathbf{R}^*$ (**ordem lexicográfica induzida** por R) a relação sobre A^* tal que $u\mathbf{R}^*v$ se e só se:

(i) u é prefixo de v; ou

(ii) $u = wau'$ e $v = wbv'$, onde w é o maior prefixo comum entre u e v, os sufixos $u', v' \in A^*$ e as letras $a, b \in A$ satisfazem aRb.

Exemplo: Dicionário

- $A = \{a, b, c, \ldots\}$ e R a relação natural das letras: $aRbRcRdR\ldots$
- ε $\mathbf{R}^*$ a $\mathbf{R}^*$ aa $\mathbf{R}^*$ amar $\mathbf{R}^*$ amo $\mathbf{R}^*$ amor $\mathbf{R}^*$ amora $\mathbf{R}^*$ b $\mathbf{R}^*$ ba.

Ordem Lexicográfica R^* de uma relação R

É uma Relação de Ordem (R^*) sobre o conjunto A^* de palavras sobre um alfabeto A (dada uma relação de ordem R sobre os elementos de A). *Não confundir com fecho transitivo R^*.* **Exemplo:** dicionário.

Ordem lexicográfica $\mathbf{R}^*$ de uma relação R

Dada uma relação de ordem R sobre um conjunto A, seja $\mathbf{R}^*$ (**ordem lexicográfica induzida** por R) a relação sobre A^* tal que:

(L1) Para toda palavra $u \in A^*$: $\varepsilon \mathbf{R}^* u$.

(L2) Para toda palavra $u \in A^*$: $u \neq \varepsilon \implies u \cancel{\mathbf{R}^*} \varepsilon$.

(L3) u e v palavras não vazias: $u\mathbf{R}^* v$ se e só se $(u_1 \neq v_1 \wedge u_1 R v_1) \vee$ $\vee (u_1 = v_1 \wedge u' \mathbf{R}^* v')$, onde u_1 e v_1 são as letras iniciais de u e v, e u' e v' são o que resta de u e v retirando-se estes elementos iniciais.

Exemplo: Dicionário

- $A = \{a, b, c, \ldots\}$ e R a relação natural das letras: $aRbRcRdR\ldots$
- ε $\mathbf{R}^*$ a $\mathbf{R}^*$ aa $\mathbf{R}^*$ amar $\mathbf{R}^*$ amo $\mathbf{R}^*$ amor $\mathbf{R}^*$ amora $\mathbf{R}^*$ b $\mathbf{R}^*$ ba.

Ordens Parciais - Exercício 7.11

Exercício 7.11:

Seja R uma relação de ordem parcial sobre um conjunto A. Prove que a ordem lexicográfica R^* induzida por R é reflexiva.

Prova:

- Seja $u \in A^*$ uma palavra qualquer. Queremos provar que uR^*u por indução no tamanho n de u.
- **Caso base:** $n = 0 \Longrightarrow u = \varepsilon \Longrightarrow uR^*u$. (**Ok**)
- **H.I.:** Fixe $n \geq 1$ e suponha valer para toda palavra de tam $< n$.
- **P.I.:** Vamos provar que vale para n. Ou seja, se u de tamanho n, então uR^*u.
- Seja u_1 a letra inicial de u e seja u' a palavra que resta de u retirando-se este elemento inicial.
- Por indução, temos que $u'R^*u'$, pois u' tem tamanho $n - 1 < n$.
- Portanto, pela definição recursiva, uR^*u.

Ordens Parciais - Exercício 7.12

Exercício 7.12:

Seja R uma relação de ordem parcial sobre um conjunto A. Prove que a ordem lexicográfica R^* induzida por R é antissimétrica.

Prova: por Indução

- Provar por indução no tam n de u que $uR^*v \Rightarrow v\not{R^*}u, \forall\ v \neq u$.
- **Caso base:** $n = 0 \implies u = \varepsilon$. Por definição $v\not{R^*}\varepsilon$. (**Ok**)
- **H.I.:** Fixe $n \geq 1$ e suponha valer para toda palavra u de tam $< n$.
- **P.I.:** Vamos provar que vale para n. Ou seja, se u tem tamanho n, $v \neq u$ e uR^*v, então $v\not{R^*}u$.
- Sejam u_1 e v_1 as letras iniciais de u e v e sejam u' e v' as palavras que restam de u e v retirando-se estas letras iniciais.
- Por definição $(u_1 \neq v_1 \wedge u_1 R v_1)\ \vee\ (u_1 = v_1 \wedge u' R^* v')$.
- Se $u_1 \neq v_1$, então $u_1 R v_1 \Rightarrow v_1 \not{R} u_1 \Rightarrow v\not{R^*}u$, pois R é antissimétrica.
- Se $u_1 = v_1$, então $u' R^* v' \implies v'\not{R^*}u' \implies v\not{R^*}u$.

Ordens Parciais - Exercício 7.13

Exercício 7.13:

Seja R uma relação de ordem parcial sobre um conjunto A. Prove que a ordem lexicográfica R^* induzida por R é transitiva.

Prova: por Indução

- Provar por indução no tam n de u que $uR^*v \wedge vR^*w \Rightarrow \; uR^*w$.
- **Caso base:** $n = 0 \implies u = \varepsilon$. Por definição uR^*w. (**Ok**).
- **H.I.:** Fixe $n \geq 1$ e suponha valer para toda palavra u de tam $< n$.
- **P.I.:** Vamos provar que vale para n. Ou seja, se u tem tamanho n, uR^*v e vR^*w, então uR^*w.
- Sejam u_1, v_1 e w_1 as letras iniciais de u, v e w e sejam u', v' e w' as palavras que restam de u, v e w retirando-se estas letras iniciais.
- Se $u_1 \neq w_1$, então u_1Rw_1 e portanto uR^*w (**OK**)
- Suponha então $u_1 = w_1$. Portanto $v_1 = u_1$.
- Logo $u'R^*v'$ e $v'R^*w'$. Por H.I: $u'R^*w'$ (pois u' tem tam. n-1)
- Pela definição recursiva de R^*, temos: uR^*w.

Ordens Parciais - Exercício 7.14

Exercício 7.14:

Seja R uma relação de ordem parcial sobre um conjunto A. Prove que a ordem lexicográfica R^* induzida por R é total **se e só se** R é total.

Prova **(ida)**

- Contrapositiva: $(P \to Q) \iff (\neg Q \to \neg P)$
- Suponha que R não é total.
- Então existem letras $a, b \in A$ tais que $a \cancel{R} b$ e $b \cancel{R} a$.
- Portanto as palavras $a, b \in A^*$ de uma letra apenas
- também satisfazem $a \cancel{R^*} b$ e $b \cancel{R^*} a$.
- Logo R^* não é total.

Ordens Parciais - Exercício 7.14

Exercício 7.14:

Seja R uma relação de ordem parcial sobre um conjunto A. Prove que a ordem lexicográfica R^* induzida por R é total **se e só se** R é total.

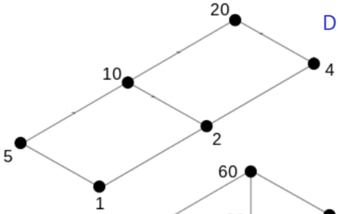
Prova **(volta)**: por Indução

- Palavras distintas $u, v \in A^*$ com tam. $u \leq$ tam. v.
- Provar por indução no tam n de u que $uR^*v \;\vee\; vR^*u$.
- **Caso base:** $n = 0 \implies u = \varepsilon$. Logo uR^*v, por definição. (**Ok**)
- **H.I.:** Fixe $n \geq 1$ e suponha valer para toda palavra u de tam $< n$.
- **P.I.:** Vamos provar que vale para n. Ou seja, se u tem tamanho n, então uR^*v ou vR^*u para todo $v \in A^*$.
- Sejam u_1 e v_1 as letras iniciais de u e v e sejam u' e v' as palavras que restam de u e v retirando-se estas letras iniciais.
- $u_1 \neq v_1 \implies u_1 R v_1 \vee v_1 R u_1$ (pois R total) $\implies uR^*v \vee vR^*u$.
- Portanto suponha $u_1 = v_1$. Logo pela H.I.: $u'R^*v' \;\vee\; v'R^*u'$.
- Logo, por definição, $uR^*v \;\vee\; vR^*u$.

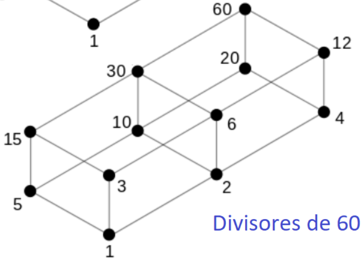
Diagrama de Hasse - Exercício 7.15

Exercício 7.15:

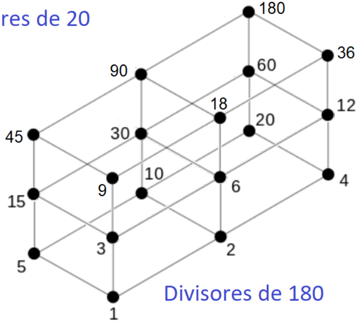
Seja A o conjunto dos inteiros entre 1 e 20, inclusive. Seja R a relação sobre A tal que xRy se e somente se x divide y. Construa o diagrama de Hasse de R.



Divisores de 20



Divisores de 60



Divisores de 180

Diagrama de Hasse - Exercício 7.15

Exercício 7.15:

Seja A o conjunto dos inteiros entre 1 e 20, inclusive. Seja R a relação sobre A tal que xRy se e somente se x divide y. Construa o diagrama de Hasse de R.

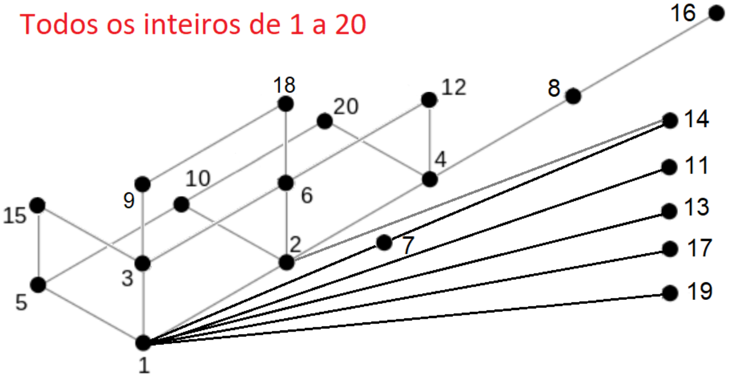


Diagrama de Hasse - Exercício 7.16

Exercício 7.16:

Uma subpalavra de uma palavra x é uma sequência de letras que aparecem em posições consecutivas em x, na mesma ordem. Por exemplo, '*nan*' é uma subpalavra de '*banana*', mas '*bn*' e '*nab*' não são. Seja A o conjunto de todas as subpalavras de '*banana*' e seja '$\sqsubset$' a relação sobre A tal que $x \sqsubset y$ se e somente se x é subpalavra de y.

(a) Prove que '$\sqsubset$' é uma relação de ordem.

Solução:

- '$\sqsubset$' é **reflexiva**, pois toda palavra é subpalavra de si mesma.
- '$\sqsubset$' é **antissimétrica**, pois, se $x \sqsubset y$ (x é subpalavra de y) e $x \neq y$, então y é maior que x e portanto y não pode ser subpalavra de x ($y \not\sqsubset x$).
- '$\sqsubset$' é **transitiva**, pois, se $x \sqsubset y$ e $y \sqsubset z$, então x é subpalavra de y e y é subpalavra de z, e portanto x é subpalavra de z ($x \sqsubset z$).

Diagrama de Hasse - Exercício 7.16

(b) Construa o diagrama de Hasse de '$\sqsubset$'.

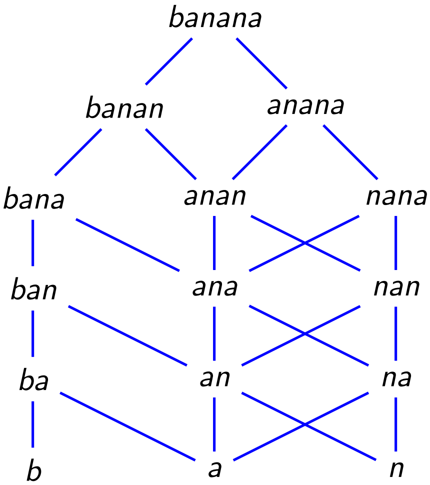


Diagrama de Hasse - Exercício 7.16'

(b') Construa o diagrama de Hasse de '$\sqsubset$' sobre as subpalavras de "comida".

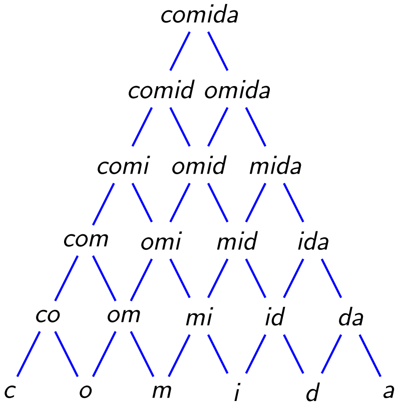


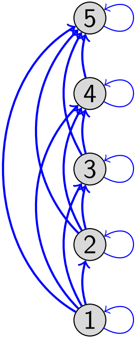
Diagrama de Hasse - Exercício 7.17

Exercício 7.17:

Descreva o diagrama de Hasse de uma ordem total sobre um conjunto finito A.

Solução:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Relação '$\leq$' sobre A
Conclusão: O diagrama de Hasse de uma Ordem Total é uma linha reta.



Mínimos e Máximos - Exercício 7.20

Exercício 7.20:

Prove que todo conjunto ordenado tem no máximo um elemento mínimo e um elemento máximo.

Solução:

- Provar por contradição que não pode haver 2 mínimos.
- Seja R uma relação de ordem sobre um conjunto A qualquer.
- Suponha que existam dois mínimos a e b distintos em A.
- Pela definição de mínimo: $\forall x \in A: \ aRx$ e bRx.
- Portanto aRb e bRa. Contradição, pois R é antissimétrica.
- Argumento análogo para o máximo.

Mínimos e Máximos - Exercício 7.21

Exercício 7.21:

Prove que um conjunto finito B não vazio **totalmente** ordenado tem exatamente um elemento mínimo e um elemento máximo.

Solução: por indução

- Seja R uma relação de ordem **total** sobre o conjunto B.
- Vamos provar por indução no tamanho n de B.
- **Caso base:** $n = 1 \implies$ o único elemento de B é mínimo. (**Ok**)
- **H.I:** Fixe $n > 1$ e assuma valer para todo conjunto de tamanho $< \ n$.
- **P.I:** Vamos provar que vale para n. Ou seja, se B tem tamanho n, então B tem elemento mínimo sob a relação R.
- Seja $b \in B$. Por H.I., $B - \{b\}$ tem elemento mínimo m sob R.
- R é total $\implies mRb$ ou bRm. Se mRb, então m é mínimo de B.
- Suponha então bRm. Como $\forall\ x \in B - \{b\} :\ mRx$,
- então $\forall\ x \in B - \{b\} :\ bRx$ por transitividade.
- Como bRb (pois R é reflexiva em B), então b é mínimo em B sob R.

Notação $a \leq_R b$ para uma relação de ordem R

Notação $\leq_R$

Dada uma **relação de ordem parcial** R, existem três modos de representar pares de R:

- $(a, b) \ \in \ R$; ou
- aRb; ou
- $a \leq_R b$.

Muitas vezes, dizemos que $\leq_R$ é a própria relação de ordem.

Exemplo:

- Reflexiva em A: $x \leq_R x$, $\forall x \in A$.
- Antissimétrica: Se $x \leq_R y$ e $x \neq y$, então $y \not\leq_R x$.
- Antissimétrica: Se $x \leq_R y$ e $y \leq_R x$, então $x = y$.
- Transitiva: Se $x \leq_R y$ e $y \leq_R z$, então $x \leq_R z$.

Notações $\leq_R$, $\geq_R$, $<_R$ e $>_R$

- $\leq_R$ é a própria relação de ordem R
- $\geq_R$ é a relação de ordem inversa R^{-1} de R
- $<_R$ é a relação de ordem estrita associada a R
- $>_R$ é a relação de ordem estrita associada a R^{-1}

Definições:

- $x \geq_R y$ **se e somente se** $y \leq_R x$.
- $x <_R y$ **se e somente se** $x \leq_R y$ e $x \neq y$.
- $x >_R y$ **se e somente se** $x \geq_R y$ e $x \neq y$.
- R é total **se e somente se** $x \leq_R y$ ou $x \geq_R y$, $\forall x, y$.

Exemplo: R relação de continência $\subseteq$

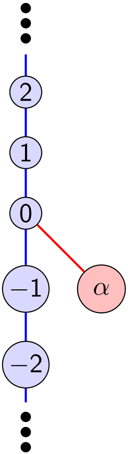
- $\leq_R$ é a própria relação de ordem $\subseteq$.
- $\geq_R$ é a relação de ordem $\supseteq$.
- $<_R$ é a relação de ordem estrita $\subsetneq$.
- $>_R$ é a relação de ordem estrita $\supsetneq$.

Exercício 7.23:

Encontre um conjunto A e uma relação de ordem R sobre A tal que existe um único elemento minimal em A sob R, mas que n˜ao é mínimo.

Solução:

Conjunto $A = \mathbb{Z} \cup \{\alpha\}$. Relação R sobre A tal que $x \leq_R y$ **se e somente se** x e y estão em $\mathbb{Z}$, ou $x = \alpha$ e $y \in \mathbb{Z}$ e $y \geq 0$, ou $x = y = \alpha$.



Minimais e Maximais - Exercício 7.24

Exercício 7.24:

Prove que um conjunto finito ordenado não vazio tem pelo menos um elemento minimal e um elemento maximal.

Solução: por indução

- Seja R uma relação de ordem sobre um conjunto finito B.
- Vamos provar por indução no tamanho n de B.
- **Caso base:** $n = 1 \implies$ o único elemento de B é minimal e maximal. (**Ok**)
- **H.I:** Fixe $n > 1$ e assuma valer para todo conjunto de tamanho $< n$.
- **P.I:** Vamos provar que vale para n. Ou seja, se B tem tamanho n, então B tem elemento minimal e maxinal sob a relação R.
- Seja $b \in B$. Por H.I., $B - \{b\}$ tem minimal m e maximal M sob R.
- Por definição, $\forall x \in B - \{b\} : x \not\leq_R m$ e $M \not\leq_R x$.
- Se $b \not\leq_R m \Rightarrow$ m é minimal em B. Se $b \leq_R m \Rightarrow$ b é minimal em B.
- Se $M \not\leq_R b \Rightarrow$ M é maximal em B. Se $M \leq_R b \Rightarrow$ b é maximal em B.

Minimais e Maximais - Exercício 7.25

Seja $A = \{3, 6, 9, \ldots\}$ o conjunto dos múltiplos positivos de 3 e seja R a relação sobre A tal que $x \leq_R y$ se e só se todos os algarismos decimais de x aparecem em y na mesma sequência. Por exemplo, $262 \leq_R 12682$, mas $262 \not\leq_R 12268$. Ache os minimais de A sob R. Existe algum maximal?

Solução:

- Não há maximal. Todo x múltiplo de 3 é sequência de $10 \cdot x$.
- Minimais pertencem à A: múltiplos de 3. Não tem sequência múltipla de 3 em sua sequência de algarismos, além dele mesmo.
- 3,6,9,12,15,18,21,24,27,42,45,48,51,54,57,72,75,78,81,84,87
- 111, 114, 117, 141, 144, 147, 171, 174, 177,
- 222, 225, 228, 252, 255, 258, 282, 285, 288,
- 411, 414, 417, 441, 444, 447, 471, 474, 477,
- 522, 525, 528, 552, 555, 558, 582, 585, 588,
- 711, 714, 717, 741, 744, 747, 771, 774, 777,
- 822, 825, 828, 852, 855, 858, 882, 885, 888,
- **Não há minimais com 4 algarismos ou mais**. **PROVE**.

Minimais e Maximais - Exercício 7.25

Seja $A = \{3, 6, 9, \ldots\}$ o conjunto dos múltiplos positivos de 3 e seja R a relação sobre A tal que $x \leq_R y$ se e só se todos os algarismos decimais de x aparecem em y na mesma sequência. Por exemplo, $262 \leq_R 12682$, mas $262 \not\leq_R 12268$. Ache os minimais de A sob R. Existe algum maximal?

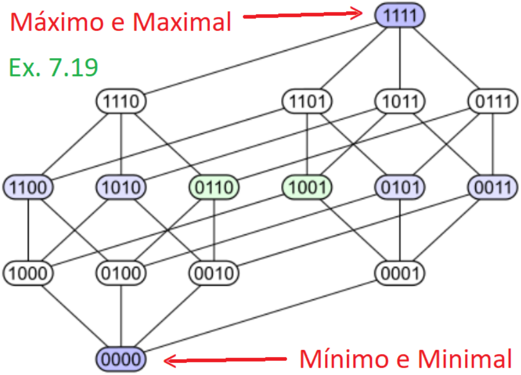
Solução:

- 1 algarismo: deve ser múltiplo de três: 3, 6 e 9.
- 2 algarismos: Não pode ter algarismo múltiplo de 3: um resto 1 e outro resto 2 na divisão por 3.
- 3 algarismos: Não pode ter algarismo múltiplo de 3, não pode ter um com resto 1 e outro resto 2 na divisão por 3: todos tem resto 1 ou resto 2.
- ≥ 4 algarismos: terá uma sequência de tamanho 1, 2 ou 3 de um número múltiplo de 3.

Minimais e Maximais - Exercício 7.28

Exercício 7.28:

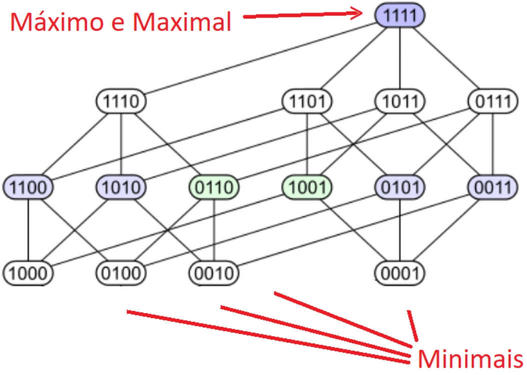
Seja A o conjunto das sequências de 4 bits (algarismos 0 ou 1), exceto a sequência 0000, e seja R a relação de ordem parcial tal que $x \leq_R y$ se e só se cada bit de x é menor ou igual ao bit correspondente de y. Assim, por exemplo, $0100 \leq_R 1100$, mas $1001 \not\leq_R 0101$. Quais são os elementos mínimos, máximos, minimais e maximais de A sob R?



Minimais e Maximais - Exercício 7.28

Exercício 7.28:

Seja A o conjunto das sequências de 4 bits (algarismos 0 ou 1), exceto a sequência 0000, e seja R a relação de ordem parcial tal que $x \leq_R y$ se e só se cada bit de x é menor ou igual ao bit correspondente de y. Assim, por exemplo, $0100 \leq_R 1100$, mas $1001 \not\leq_R 0101$. Quais são os elementos mínimos, máximos, minimais e maximais de A sob R?



Capítulo 7.2
RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

Notação $x \equiv_R y$ para Relação de Equivalência R

Notação $x \equiv_R y$ p/ Relação de Equivalência R

- x é equivalente a y módulo R
- $x \equiv_R y \iff x \equiv y \text{ mod } R \iff xRy \iff (x, y) \in R.$
- $x \not\equiv_R y \iff x \not\equiv y \text{ mod } R \iff x\cancel{R}y \iff (x, y) \notin R.$

Contraste com ordens parciais

- $x \leq_R y, \quad x \geq_R y, \quad x <_R y, \quad x >_R y.$

Exemplo divisibilidade (Teoria dos Números)

- Divisibilidade / Congruência
- $x \equiv y \; mod \; z \iff x - y$ é múltiplo de z.
- $x \equiv y \; mod \; z \iff x$ e y tem o mesmo resto na divisão por z.
- $11 \equiv 20 \; mod \; 3$ e $40 \equiv 49 \; mod \; 3$

Relações de Equivalência - Teorema 7.1

Teorema 7.1:

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A não vazio. As seguintes afirmações são equivalentes.

- $a \equiv_R b \iff [a]_R = [b]_R \iff [a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$

Prova : $1 \implies 2$

- Suponha $a \equiv_R b$. Logo $b \equiv_R a$.
- $c \in [a]_R \overset{def}{\Longrightarrow} c \equiv_R a \overset{tr}{\Longrightarrow} c \equiv_R b \overset{def}{\Longrightarrow} c \in [b]_R$
- Logo $[a]_R \subseteq [b]_R$.
- $c \in [b]_R \overset{def}{\Longrightarrow} c \equiv_R b \overset{tr}{\Longrightarrow} c \equiv_R a \overset{def}{\Longrightarrow} c \in [a]_R$
- Logo $[b]_R \subseteq [a]_R$.
- Portanto $[a]_R = [b]_R$.

Relações de Equivalência - Teorema 7.1

Teorema 7.1:

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A não vazio. As seguintes afirmações são equivalentes.

- $a \equiv_R b \iff [a]_R = [b]_R \iff [a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$

Prova : $2 \implies 3$

- Suponha $[a]_R = [b]_R$.
- Como $(a, a) \in R$, então $a \in [a]_R$
- Logo $[a]_R = [b]_R \neq \emptyset$.
- Portanto $[a]_R \cap [b]_R$ não é vazio.

Relações de Equivalência - Teorema 7.1

Teorema 7.1:

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A não vazio. As seguintes afirmações são equivalentes.

- $a \equiv_R b \iff [a]_R = [b]_R \iff [a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$

Prova : $3 \implies 1$

- Suponha que $[a]_R \cap [b]_R$ não é vazio.
- Seja $c \in [a]_R \cap [b]_R$. Logo $c \equiv_R a$ e $c \equiv_R b$.
- Por simetria, $a \equiv_R c$.
- Por transitividade, $a \equiv_R b$.

Relações de Equivalência - Teorema 7.2

Teorema 7.2:

Seja P uma partição do conjunto A. A relação R tal que $a \equiv_R b$ se e só se a e b estão em uma mesma parte (bloco) de P é uma relação de equivalência, e suas classes de equivalências são as partes (blocos) da partição P.

Prova:

- **REF:** a e a pertencem ao mesmo bloco, pois são iguais. Logo $a \equiv_R a$
- **SIM:** $a \equiv_R b \Longrightarrow$ a e b estão no mesmo bloco $\Longrightarrow b \equiv_R a$.
- **TR:** $a \equiv_R b \ \wedge \ b \equiv_R c \ \Longrightarrow$ a, b e c estão no mesmo bloco $\Longrightarrow$ $a \equiv_R c$.
- Lembrar que os blocos de uma partição são disjuntos (interseção vazia).

Relações de Equivalência - Exercício 7.29

Exercício 7.29:

Seja $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x - y \in \mathbb{Q}\}$. Prove que S é uma relação de equivalência.

Solução:

- **REF:** $x - x = 0 \in \mathbb{Q} \overset{def}{\Longrightarrow} (x, x) \in S$
- **SIM:** $(x, y) \in S \overset{def}{\Longrightarrow} x - y \in \mathbb{Q} \Longrightarrow y - x \in \mathbb{Q} \overset{def}{\Longrightarrow} (y, x) \in S$
- **SIM:** $x \equiv_S y \overset{def}{\Longrightarrow} x - y \in \mathbb{Q} \Longrightarrow y - x \in \mathbb{Q} \overset{def}{\Longrightarrow} y \equiv_S x$
- **TR:** $x \equiv_S y \ \wedge \ y \equiv_S z \overset{def}{\Longrightarrow} x - y \in \mathbb{Q} \ \wedge \ y - z \in \mathbb{Q}$
- $\Longrightarrow (x - y) + (y - z) = x - z \in \mathbb{Q} \overset{def}{\Longrightarrow} x \equiv_S z$

Relações de Equivalência - Exercício 7.30

Exercício 7.30:

Seja R a relação sobre o conjunto dos pares ordenados de inteiros positivos tal que $(a,b)R(c,d)$ se e só se $a \cdot d = b \cdot c$. (a) Prove que R é uma relação de equivalência. (b) Descreva a classe de equivalência de $(1,2)$ em R.

Solução (a):

- **REF:** $a \cdot b = b \cdot a \overset{def}{\Longrightarrow} (a,b)R(a,b)$
- **SIM:** $(a,b)R(c,d) \overset{def}{\Longrightarrow} a \cdot d = b \cdot c \overset{def}{\Longrightarrow} (c,d)R(a,b)$.
- **TR:** $(a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f) \overset{def}{\Longrightarrow} a \cdot d = b \cdot c \wedge c \cdot f = d \cdot e$
- $\Longrightarrow a \cdot (c \cdot f) = a \cdot (d \cdot e) = (b \cdot c) \cdot e$
- $\Longrightarrow a \cdot f = b \cdot e \overset{def}{\Longrightarrow} (a,b)R(e,f)$.

Relações de Equivalência - Exercício 7.30

Exercício 7.30:

Seja R a relação sobre o conjunto de pares ordenados de $\mathbb{Z}^+$ (inteiros positivos) tal que $(a, b)R(c, d)$ se e só se $a \cdot d = b \cdot c$. (a) Prove que R é uma relação de equivalência. (b) Descreva a classe de equivalência de $(1, 2)$ em R.

Solução (b):

- $(x, y)R(1, 2) \overset{def}{\Longrightarrow} 2x = y$. Portanto,
- $[(1, 2)]_R \;=\; \{(x, 2x) \;:\; x \in \mathbb{Z}^+\}$.
- $[(1, 2)]_R \;=\; \{(1, 2),\ (2, 4),\ (3, 6),\ (4, 8)\ ,(5, 10),\ \ldots\}$.

Relações de Equivalência - Exercício 7.31

Exercício 7.31:

Seja R a relação sobre o conjunto dos pares ordenados de $\mathbb{Z}^+$ tal que $(a, b)R(c, d)$ se e só se $a + d = b + c$. (a) Prove que R é uma relação de equivalência. (b) Descreva a classe de equivalência de $(3, 1)$ sob R. (c) Descreva as classes de equivalência de R.

Solução (a):

- **REF:** $a + b = b + a \overset{def}{\Longrightarrow} (a, b)R(a, b)$
- **SIM:** $(a, b)R(c, d) \overset{def}{\Longrightarrow} a + d = b + c \overset{def}{\Longrightarrow} (c, d)R(a, b)$.
- **TR:** $(a, b)R(c, d) \ \wedge \ (c, d)R(e, f) \overset{def}{\Longrightarrow} a + d = b + c \ \wedge \ c + f = d + e$
- $\Longrightarrow \ a + (c + f) = a + (d + e) = (b + c) + e$
- $\Longrightarrow \ a + f = b + e \overset{def}{\Longrightarrow} (a, b)R(e, f)$.

Relações de Equivalência - Exercício 7.31

Exercício 7.31:

Seja R a relação sobre o conjunto dos pares ordenados de $\mathbb{Z}^+$ tal que $(a,b)R(c,d)$ se e só se $a+d=b+c$. (a) Prove que R é uma relação de equivalência. (b) Descreva a classe de equivalência de $(3,1)$ sob R. (c) Descreva as classes de equivalência de R.

Solução (b):

- $(x,y)R(3,1) \overset{def}{\Longrightarrow} x+1=y+3 \implies x=y+2$. Portanto,
- $[(3,1)]_R \;=\; \{(y+2,y) \;:\; y\in\mathbb{Z}^+\}$.
- $[(3,1)]_R \;=\; \{(3,1),\ (4,2),\ (5,3),\ (6,4)\ ,(7,5),\ \ldots\}$.

Relações de Equivalência - Exercício 7.31

Exercício 7.31:

Seja R a relação sobre o conjunto dos pares ordenados de $\mathbb{Z}^+$ tal que $(a, b)R(c, d)$ se e só se $a + d = b + c$. (a) Prove que R é uma relação de equivalência. (b) Descreva a classe de equivalência de $(3, 1)$ sob R. (c) Descreva as classes de equivalência de R.

Solução (c):

- $x > y \implies (x, y)R(x - y + 1, 1) \implies (x, y) \in [(x - y + 1, 1)]_R$.
- $x < y \implies (x, y)R(1, y - x + 1) \implies (x, y) \in [(1, y - x + 1)]_R$.
- Resumindo:
- $[(a, 1)]_R = \{(x, y) : x = y+a\text{-}1\} = \{(a, 1), (a+1, 2), (a+2, 3), \dots\}$
- $[(1, a)]_R = \{(x, y) : y = x+a\text{-}1\} = \{(1, a), (2, a+1), (3, a+2), \dots\}$

Relações de Equivalência - Exercício 7.32

Prove que as relações são de equivalência. Descreva suas classes.

(a) Seja R a relação sobre $\mathbb{Z}$ definida por mRn se e só se 2 divide $m - n$.

(b) Seja S a relação sobre $\mathbb{R}$ definida por xRy se e só se $|x| = |y|$.

(c) Seja F a relação sobre $\mathbb{Z}^+$ tal que xFy se e só se todo número primo que divide x divide y, e vice-versa.

Solução (a):

- $xRy \overset{def}{\iff}$ 2 divide $x - y \iff x - y$ é par.
- **REF:** $x - x = 0$ é par $\overset{def}{\implies} xRx$
- **SIM:** $xRy \overset{def}{\implies} x - y$ é par $\implies y - x$ é par $\overset{def}{\implies} yRx$.
- **TR:** $xRy \wedge yRz \overset{def}{\implies} x - y$ e $y - z$ são pares
- $\implies (x - y) + (y - z)$ é par $\implies x - z$ é par $\overset{def}{\implies} xRz$.
- Duas classes de equivalência: Números pares e Números ímpares.

Relações de Equivalência - Exercício 7.32

Prove que as relações são de equivalência. Descreva suas classes.

(a) Seja R a relação sobre $\mathbb{Z}$ definida por mRn se e só se 2 divide $m - n$.

(b) Seja S a relação sobre $\mathbb{R}$ definida por xRy se e só se $|x| = |y|$.

(c) Seja F a relação sobre $\mathbb{Z}^+$ tal que xFy se e só se todo número primo que divide x divide y, e vice-versa.

Solução (b):

- $xSy \overset{def}{\iff} |x| = |y| \iff x = \pm y.$
- **REF:** $|x| = |x| \overset{def}{\implies} xSx$
- **SIM:** $xSy \overset{def}{\implies} |x| = |y| \implies ySx.$
- **TR:** $xSy \wedge ySz \overset{def}{\implies} |x| = |y|$ e $|y| = |z|$
- $\implies |x| = |z| \overset{def}{\implies} xSz.$
- Classes de equivalência: $\{x, -x\}$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$

Relações de Equivalência - Exercício 7.32

Prove que as relações são de equivalência. Descreva suas classes.

(a) Seja R a relação sobre $\mathbb{Z}$ definida por mRn se e só se 2 divide $m - n$.

(b) Seja S a relação sobre $\mathbb{R}$ definida por xRy se e só se $|x| = |y|$.

(c) Seja F a relação sobre $\mathbb{Z}^+$ tal que xFy se e só se todo número primo que divide x divide y, e vice-versa.

Solução (c):

- $xFy \overset{def}{\iff} (\forall \text{ primo } p : x = k_1 \cdot p \leftrightarrow y = k_2 \cdot p)$ para $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$.
- $xFy \overset{def}{\iff}$ fatoração de x e y gera os mesmos primos $(*)_{x,y}$ (ex: $24F36$, $36F54$, $24\not{F}30$).
- $24 = 2^3 \cdot 3$, $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $54 = 2 \cdot 3^3$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.
- **REF:** $(x = k_1 \cdot p \leftrightarrow x = k_1 \cdot p) \overset{def}{\Longrightarrow} xFx$
- **SIM:** $xFy \overset{def}{\Longrightarrow} (*)_{x,y} \Longrightarrow (*)_{y,x} \overset{def}{\Longrightarrow} yFx$.
- **TR:** $xFy \wedge yFz \overset{def}{\Longrightarrow} (*)_{x,y} \wedge (*)_{y,z} \Longrightarrow (*)_{x,z} \overset{def}{\Longrightarrow} xFz$.

Relações de Equivalência - Exercício 7.32

Prove que as relações são de equivalência. Descreva suas classes.

(a) Seja R a relação sobre $\mathbb{Z}$ definida por mRn se e só se 2 divide $m - n$.

(b) Seja S a relação sobre $\mathbb{R}$ definida por xRy se e só se $|x| = |y|$.

(c) Seja F a relação sobre $\mathbb{Z}^+$ tal que xFy se e só se todo número primo que divide x divide y, e vice-versa.

Solução (c):

- **Classes**: para todo subconjunto $P = \{p_1, \ldots, p^n\}$ de primos
- Classe $\{n = \prod_{i=1}^{n} p_i^{k_i},\ k_i \in \mathbb{Z}^+\} \ = \ \{p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}\}$.
- Resumindo: para $a, b, c, d, \ldots \in \mathbb{Z}^+$
- $\{1\}$, $\{2^a\}$, $\{2^a 3^b\}$, $\{2^a 5^b\}$, $\{3^a 5^b\}$, $\{2^a 3^b 5^c\}$, $\{7^a\}, \{2^a 7^b\}$, $\{3^a 7^b\}$
- $\{5^a 7^b\}$, $\{2^a 3^b 7^c\}$, $\{2^a 5^b 7^c\}$, $\{3^a 5^b 7^c\}$, $\{2^a 3^b 5^c 7^d\}$, $\{11^a\}, \ldots$

Relações de Equivalência - Exercício 7.33

Seja A o conjunto de todas as proposições nas variáveis x, y e z. Seja $\mathcal{L}$ a relação sobre A tal que $P\mathcal{L}Q$ se e só se P e Q tem a mesma tabela verdade. Prove que L é uma relação de equivalência.

Solução

- $P\mathcal{L}Q$ se e só se P e Q tem a mesma tabela verdade
- $P\mathcal{L}Q$ se e só se $(P \Leftrightarrow Q)$ se e só se $P \leftrightarrow Q$ é tautologia (sempre V)
- $\mathcal{L}$ é a relação de equivalência lógica sobre o conjunto de todas as proposições nas variáveis x, y e z.
- "$\Leftrightarrow$" é REF, SIM e TR.

Relações de Equivalência - Exercício 7.34

Exercício 7.34

Seja ε um número real positivo e considere a relação $\approx_\varepsilon$ sobre $\mathbb{R}$ tal que $x \approx_\varepsilon y$ se e só se $|x - y| \leq \varepsilon$. Esta é uma relação de equivalência?

Solução: NÃO

- $0 \approx_\varepsilon \varepsilon$ e $\varepsilon \approx_\varepsilon 2\varepsilon$. Mas $0 \cancel{\approx_\varepsilon} 2\varepsilon$.

Relações de Equivalência - Exercício 7.35

Seja R a relação sobre pares ordenados de inteiros tal que $(a, b)R(c, d)$ se e só se $(a = c) \wedge (b = d)$ ou $(a = d) \wedge (b = c)$. Esta é uma relação de equivalência? Se sim, descreva suas classes de equivalência.

Solução:

- Exemplo: $(1, 2)R(1, 2)$ e $(1, 2)R(2, 1)$.
- Exemplo: $((1, 2), (1, 2)) \in R$ e $((1, 2), (2, 1)) \in R$.
- Notação $(**)_{a,b,c,d}$: $(a = c) \wedge (b = d)$ ou $(a = d) \wedge (b = c)$
- **REF:** $(x = x) \wedge (y = y) \overset{def}{\Longrightarrow} (x, y)R(x, y)$.
- **SIM:** $(a, b)R(c, d) \overset{def}{\Longrightarrow} (**)_{a,b,c,d} \Longrightarrow (**)_{c,d,a,b} \overset{def}{\Longrightarrow} (c, d)R(a, b)$.
- **TR:** $(a, b)R(c, d) \wedge (c, d)R(e, f) \overset{def}{\Longrightarrow} (**)_{a,b,c,d} \wedge (**)_{c,d,e,f} \Longrightarrow (**)_{a,b,e,f} \overset{def}{\Longrightarrow} (a, b)R(e, f))$.
- Classes de equivalência: $\{(x, y), (y, x)\}$ para todo $x \leq y \in \mathbb{Z}$

Relações de Equivalência - Revisão Teoremas 7.1 e 7.2

Teorema 7.1: Reℓ. equivalência em $A \Longrightarrow$ Partição de A

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A não vazio. As seguintes afirmações são equivalentes.

- $a \equiv_R b \iff [a]_R = [b]_R \iff [a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$.

Conclusão: Classes de equivalência formam uma partição de A, pois.

- $a \not\equiv_R b \iff [a]_R \neq [b]_R \iff [a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.

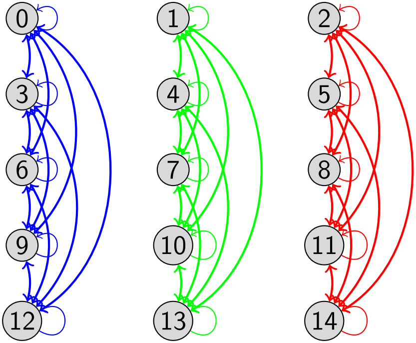
Teorema 7.2: Partição de $A \Longrightarrow$ Reℓ. equivalência em A

Seja P uma partição do conjunto A. A relação R tal que $a \equiv_R b$ se e só se a **e** b **estão em uma mesma parte** (bloco) de P é uma relação de equivalência, e suas classes de equivalências são as partes (blocos) da partição P.

Partições e Relações de Equivalência

Exemplo

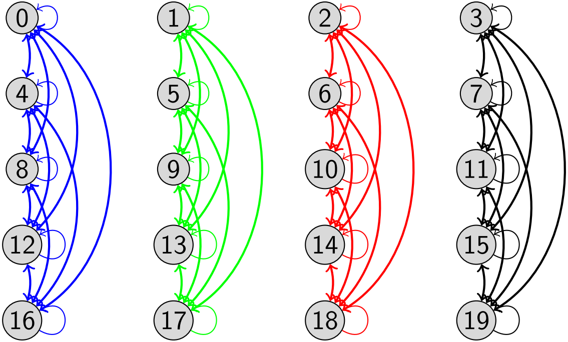
Relação de congruência módulo 3.



3 classes de equivalência.

Exemplo

Relação de congruência módulo 4.



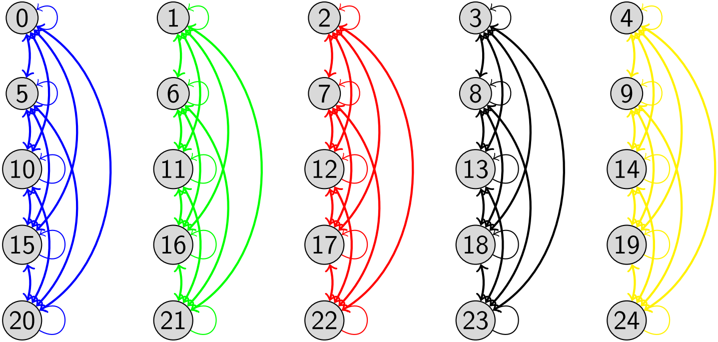
.

4 classes de equivalência.

Partições e Relações de Equivalência

Exemplo

Relação de congruência módulo 5.



.

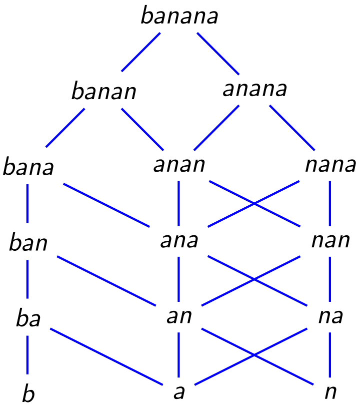
5 classes de equivalência.

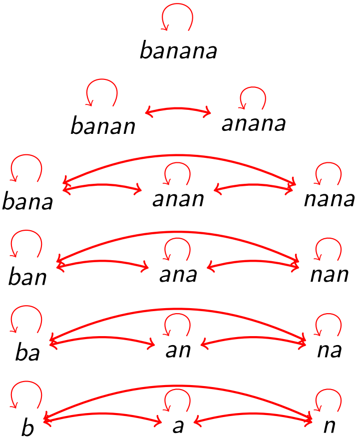
Partições e Relações de Equivalência

Exemplo (ver Ex. 7.16 de ordens):

Relação de ordem parcial $x \sqsubset y \iff x$ é subpalavra de y.

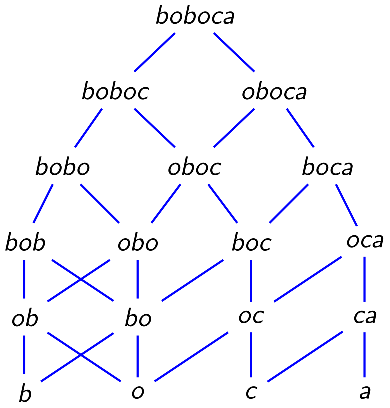
Relação de equivalência $x \# y \iff x$ e y tem o mesmo tamanho.

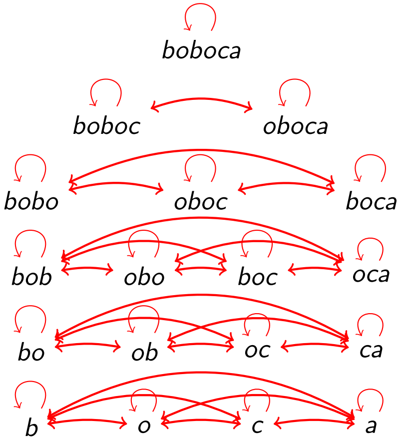




Partições e Relações de Equivalência

Exemplo (ver Ex. 7.16 de ordens):
Relação de ordem parcial $x \sqsubset y \iff x$ é subpalavra de y.
Relação de equivalência $x \# y \iff x$ e y tem o mesmo tamanho.





Capítulo 8
FUNÇÕES

FUNÇÕES (Capítulo 8)

Definição de Função

Dizemos que uma relação f é uma **função** se, para todo $a \in Dom(f)$, existe exatamente um b tal que $(a, b) \in f$ (ou $a \ f \ b$). Nesse caso, dizemos que $f(a) = b$. Ver exemplos do livro.

Observação: Funções são Relações

Toda função é uma relação. Então todos os conceitos de relações, continuam a existir para funções.

- Domínio $Dom(f)$ e Imagem $Img(f)$
- Relação Composta $g \circ f$ de f com g (veremos que também é Função)
- Relação Inversa f^{-1} de f (veremos que nem sempre é Função)
- Restrição de uma Relação a subconjuntos do Domínio e da Imagem

FUNÇÕES - Domínio, Imagem e ContraDomínio

Domínio e Imagem

- $Dom(f) = \{a : \exists b,\ f(a) = b\}$
- $Img(f) = \{b : \exists a,\ f(a) = b\}$

Notação $f : A \to B$ e ContraDomínio

Escrevemos $f : A \to B$ quando $Dom(f) = A$ e $Img(f) \subseteq B$.
Nessa notação, dizemos que B é o **ContraDomínio** de f.
ContraDomínio só faz sentido na notação $f : A \to B$.

Relação Inversa de uma função f

- $f^{-1} = \left\{ (f(x), x) : x \in Dom(f) \right\}$

FUNÇÕES - Inversa - Exercício 8.2

Exercício 8.2

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determine se a inversa é uma função. (a) $f(x) = x^3$. (b) $f(x) = e^x$. (c) $f(x) = sen(x)$. (d) $f(x) = x^5 + x$. (e) $f(x) = x^5 - x$.

Solução:

(a) $f^{-1}(x) = x^{1/3}$. SIM é função.
(b) $f^{-1}(x) = \ell n(x)$. SIM é função.
(c) $f^{-1}(x) = arcsen(x)$. NÃO é função, pois $f(2\pi) = f(0) = 0$
(d) $f^{-1}(x)$ SIM é função, pois $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0 \implies f$ é estritamente crescente.
(e) $f^{-1}(x)$ NÃO é função, pois $f(0) = f(1) = 0$

FUNÇÕES - Imagem e Imagem Reversa de conjunto

$$f(A) \;=\; \{f(x):\; x \in A \cap Dom(f)\}$$

- $x \in A \;\Rightarrow\; f(x) \in f(A)$
- $f(x) \in f(A) \not\Rightarrow x \in A$ (contraexemplo: $f(x) = 7, \forall x \in \mathbb{Z}$)

$$f^{-1}(U) \;=\; \{x \in Dom(f):\; f(x) \in U\}$$

- $f(x) \in U \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(U)$
- $f(f^{-1}(U)) = \{f(x) : x \in f^{-1}(U)\} = \{f(x) : f(x) \in U\} = U \cap Img(f)$

Conclusões para $U \subseteq Img(f)$:

- $f(x) \in U \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(U)$
- $x \in A \Longrightarrow f(x) \in f(A) \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(f(A))$
- $f(x) \in U \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(U) \Longleftrightarrow f(x) \in f(f^{-1}(U))$
- Conclusões: $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ e $f(f^{-1}(U)) = U$

FUNÇÕES - Inversa - Exercício 8.3

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, prove ou disprove:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(b) $f(A - B) = f(A) - f(B)$.

(c) $B \subseteq A \iff f(B) \subseteq f(A)$.

(d) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$.

(e) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

Solução:

(a) SIM: $y \in f(A \cup B) \iff \exists x \in A \cup B : f(x) = y \iff$
$\iff y \in f(A) \ \vee \ y \in f(B) \iff y \in f(A) \cup f(B)$

(b) NÃO. ContraEx: $f(1){=}f(2){=}3$. $A{=}\{1\}$, $B{=}\{2\}$, $f(A){=}f(B){=}\{3\}$.

(c) SIM p/ ida ($\Rightarrow$): $B \subseteq A \implies (\forall x : x \in B \rightarrow x \in A) \implies$
$\implies (\forall x : f(x) \in f(B) \rightarrow f(x) \in f(A)) \implies f(B) \subseteq f(A)$.

(c) NÃO p/ volta ($\Leftarrow$): ContraEx: $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{Z}$, $A{=}\mathbb{Z}^-$, $B{=}\mathbb{Z}^+$.

(d) SIM. $x \in f^{-1}(U \cap V) \Leftrightarrow f(x) \in U \cap V \Leftrightarrow f(x) \in U \wedge f(x) \in V \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(U) \wedge x \in f^{-1}(V) \iff x \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$.

(e) SIM. $x \in f^{-1}(U \cup V) \Leftrightarrow f(x) \in U \cup V \Leftrightarrow f(x) \in U \vee f(x) \in V \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(U) \vee x \in f^{-1}(V) \iff x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

FUNÇÕES - Inversa - Exercício 8.3

Dada uma função f, subconjuntos $A, B \subseteq Dom(f)$ e $U, V \subseteq Img(f)$, prove ou disprove:

(f) $f^{-1}(U - V) = f^{-1}(U) - f^{-1}(V)$.

(g) $U \subseteq V \iff f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V)$.

(h) $f^{-1}(f(A)) = A$.

(i) $f(f^{-1}(U)) = U$.

Solução:

(f) SIM. $x \in f^{-1}(U - V) \Leftrightarrow f(x) \in U - V \Leftrightarrow f(x) \in U \wedge f(x) \notin V \Leftrightarrow$
$\iff x \in f^{-1}(U) \wedge x \notin f^{-1}(V) \iff x \in f^{-1}(U) - f^{-1}(V)$.

(g) SIM: $U \subseteq V \iff (\forall y : y \in U \rightarrow y \in V) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\forall x : f(x) \in U \rightarrow f(x) \in V) \Leftrightarrow (\forall x : x \in f^{-1}(U) \rightarrow x \in f^{-1}(V)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V)$

(h) NÃO: ContraEx: $f(x)=7, \forall x \in \mathbb{Z}$. $A=\{0\}$, $f(A)=\{7\}$, $f^{-1}(\{7\})=\mathbb{Z}$.

(h) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$. Já visto.

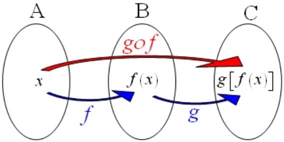
(i) SIM: Já visto.

FUNÇÕES - Composição de funções

Funções f e g tais que $Im(f) \subseteq Dom(g)$.

$g \circ f$: relação composta de f com g é função

- $(x, z) \in g \circ f \implies \exists y : (x, y) \in f \wedge (y, z) \in g \implies$
- $\implies y = f(x) \wedge z = g(y) \implies z = g(f(x))$
- $g \circ f(x) \;=\; g(f(x))$ é apenas um valor: $g \circ f$ é função.



- $Dom(g \circ f) \;=\; Dom(f)$.
- $Im(g \circ f) \subseteq Im(g)$.
- Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$, então $g \circ f : A \to C$.

FUNÇÕES - Injetora, Sobrejetora, Bijetora

f é Injetora

Uma função f é Injetora se e só se:

- $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ para todo $x_1, x_2 \in Dom(f)$; ou seja,
- $\forall y \in Im(f) : \exists! x \in Dom(f), f(x) = y$; ou seja,
- Para todo elemento y da Imagem de f, existe exatamente um elemento x do Domínio de f tal que $f(x) = y$; ou seja,
- $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in Dom(f)$.

$f : A \to B$ é Sobrejetora

Uma função $f : A \to B$ é Sobrejetora se e só se $Im(f) = B$. Ou seja, $\forall y \in B : \exists x \in A, f(x) = y$.

$f : A \to B$ é Bijetora

Uma função $f : A \to B$ é Bijetora se é injetora e sobrejetora.

FUNÇÕES - Tipos de Funções - Exercício 8.6/8.10

Exercício 8.6/8.10

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$. Prove que se f e g são injetoras então $g \circ f$ é injetora.

Solução:

- $g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \overset{g.inj}{\Longrightarrow} f(x_1) = f(x_2) \overset{f.inj}{\Longrightarrow} x_1 = x_2$.

FUNÇÕES - Tipos de Funções - Exercício 8.7

Exercício 8.7

Prove que uma função f tem função inversa f^{-1} se e só se f é injetora.

Solução:

- Seja $A = Dom(f) = Img(f^{-1})$ e $B = Im(f) = Dom(f^{-1})$.
- f^{-1} é função $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall b \in B : \exists! a, (b, a) \in f^{-1} \Leftrightarrow$.
- $\Leftrightarrow \forall b \in B : \exists! a, (a, b) \in f \Leftrightarrow$
- $\Leftrightarrow \forall b \in B : \exists! a, \ f(a) = b \Leftrightarrow$
- $\Leftrightarrow f$ é injetora.

Exercício 8.8

Sejam $f : A \to C$ e $g : B \to D$ duas funções injetoras. Considere a função $h : A \times B \to C \times D$ tal que $h(a, b) = (f(a), g(b))$. Prove que h é uma função injetora.

Solução:

- $h(a, b) = h(x, y) \Longrightarrow (f(a), g(b)) = (f(x), g(y)) \Longrightarrow$
- $\Longrightarrow f(a) = f(x) \wedge g(b) = g(y) \overset{f,g\ \ inj.}{\Longrightarrow}$
- $\overset{f,g\ \ inj.}{\Longrightarrow} (a = x) \wedge (b = y) \Longrightarrow (a, b) = (x, y)$.
- Como vale para quaisquer pares (a, b) e (x, y), então h é injetora.

FUNÇÕES - Tipos de Funções - Exercício 8.9

Seja f uma função e sejam $A, B \subseteq Dom(f)$. Prove que
(a) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Mais ainda, prove que
(b) se f é injetora, então $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Prove também que
(c) se f é injetora, então $f(B) \subseteq f(A)$ se e só se $B \subseteq A$.

Solução:

- **(a)** $y \in f(A \cap B) \Longleftrightarrow \exists x \in A \cap B : f(x) = y \Longrightarrow$
- $\Rightarrow (\exists x \in A : f(x) = y) \wedge (\exists x' \in B : f(x') = y) \Leftrightarrow y \in f(A) \cap f(B)$.
- Contraexemplo p/ $=$: $f(1) = f(2) = 3$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$.
  $f(A \cap B) = \emptyset$, $f(A) \cap f(B) = \{3\}$.
- **(b)** $y \in f(A \cap B) \Longleftrightarrow \exists x \in A \cap B : f(x) = y \Longleftrightarrow$
- $\Leftrightarrow (\exists x \in A : f(x) = y) \wedge (\exists x' \in B : f(x') = y) \Leftrightarrow y \in f(A) \cap f(B)$.
- **(c)** $B \subseteq A \Longleftrightarrow (\forall x : x \in B \rightarrow x \in A) \overset{f\ inj.}{\Longleftrightarrow}$
- $\overset{f\ inj.}{\Longleftrightarrow} (\forall x : f(x) \in f(B) \rightarrow f(x) \in f(A)) \Longleftrightarrow f(B) \subseteq f(A)$.

Exercício 8.11

Seja R uma relação de A para B. Escreva expressões lógicas formais (sem palavras, apenas variáveis e símbolos), com todos os quantificadores necessários, que expresse as afirmações: (a) "A relação R é transitiva". (b) "A relação R é uma função injetora".

Solução:

- (a) $\forall x, y, z : \ ((x, y) \in R \ \wedge \ (y, z) \in R) \ \longrightarrow \ (x, z) \in R$
- (a) $\forall x, y, z : \ (xRy \ \wedge \ yRz) \ \longrightarrow \ xRz$
- (b) $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 : \ ((x_1 R y_1 \wedge x_1 R y_2) \ \longrightarrow y_1 = y_2) \wedge$
- $\wedge \ ((x_1 R y_1 \wedge x_2 R y_1) \ \longrightarrow x_1 = x_2)$

FUNÇÕES - Exercício Lista 2

Para $n \geq 3$, considere n funções $f_1, \ldots, f_n$ tais que $Img(f_k) \subseteq Dom(f_{k+1})$ para $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Prove por indução que:

$$f_n \circ (f_{n-1} \circ (\ldots \circ (f_3 \circ (f_2 \circ f_1)) \ldots)) \quad = \quad ((\ldots((f_n \circ f_{n-1}) \circ f_{n-2}) \circ \ldots) \circ f_2) \circ f_1.$$

Solução: Indução forte

- Caso base (n=3): Queremos provar que $f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1$.
- Seja $x \in Dom(f_1)$ e sejam $y = f_1(x)$, $z = f_2(y)$ e $w = f_3(z)$.
- $f_3 \circ (f_2 \circ f_1)(x) = f_3(f_2 \circ f_1(x))) = f_3(f_2(f_1(x))) = f_3(f_2(y) = f_3(z) = w$.
- $((f_3 \circ f_2) \circ f_1)(x) = (f_3 \circ f_2)(f_1(x)) = (f_3 \circ f_2)(y) = f_3(f_2(y)) = w$.
- Hipótese da Indução: Fixe $n > 3$ e suponha valer para qualquer número $< n$ de funções
- Passo da indução: Vamos provar que vale para n funções.

Solução: Indução forte

- Passo da indução: Vamos provar que vale para n funções.

$$f_n \circ (f_{n-1} \circ (f_{n-2} \circ (\ldots \circ (f_2 \circ f_1)\ldots)) = (H.I.\ p/\ n-1)$$

$$= f_n \circ (((\ldots((f_{n-1} \circ f_{n-2}) \circ f_{n-3}) \circ \ldots) \circ f_2) \circ f_1) = C.B.$$

$$= (f_n \circ ((\ldots((f_{n-1} \circ f_{n-2}) \circ f_{n-3}) \circ \ldots) \circ f_2)) \circ f_1 = (H.I.\ p/\ n-2)$$

$$= (f_n \circ (f_{n-1} \circ (f_{n-2} \circ (f_{n-3} \circ (\ldots \circ (f_3 \circ f_2)\ldots)) \circ f_1 = (H.I.\ p/\ n-1)$$

$$= ((\ldots((f_n \circ f_{n-1}) \circ f_{n-2}) \circ \ldots) \circ f_2) \circ f_1.$$

Capítulo 9
SOMATÓRIOS

Somatórios - Capítulo 9

Definição para função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) \;=\; f(m) + f(m{+}1) + f(m{+}2) + \ldots + f(n{-}2) + f(n{-}1) + f(n)$$

Se $n < m$, então $\sum_{k=m}^{n} f(k) = 0$.
Outro modo de escrever (em forma de sequência x_n, ao invés de função $f(n)$):

$$\sum_{k=m}^{n} x_k \;=\; x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n$$

Somatórios - Exemplo (Soma de Gauss)

Soma dos n primeiros inteiros

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1$$

Somando:

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k = n \cdot (n+1)$$

$$\stackrel{\div 2}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Somatórios - Soma de P.A. Ex. 9.1 Livro

Ex. 9.1 Livro / Soma P.A.: **Calcule**

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k,$$

para a a P.A. $x_k = a + r \cdot k$.

Solução:

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a + r \cdot k) = \sum_{k=0}^{n-1} a + r \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a + r \cdot k) = a \cdot n + r \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

Somatórios - Soma Telescópica

Soma Telescópica

$$\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k) = (x_{n+1}-x_n)+(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\ldots+(x_3-x_2)+(x_2-x_1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k) = (x_{n+1}-\cancel{x_n})+(\cancel{x_n}-\cancel{x_{n-1}})+(\cancel{x_{n-1}}-\cancel{x_{n-2}})+\ldots+(\cancel{x_3}-\cancel{x_2})+(\cancel{x_2}-x_1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k) = x_{n+1} - x_1$$

Somatórios - Exercício 9.2 do Livro

Ex. 9.2 Livro / Soma P.G.: **Calcule** para $b \neq 0$ e $b \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} b^k = 1 + b + b^2 + b^3 + \ldots + b^{n-1}$$

Solução:

$$\sum_{k=0}^{n-1} b^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b^k \cdot (b-1)}{b-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b^{k+1}}{b-1} - \frac{b^k}{b-1} \right)$$

Soma Telescópica p/ $x_k = b^k/(b-1)$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} b^k = x_n - x_0 = \frac{b^n - 1}{b-1}$$

Somatórios - Exercício 9.3 do Livro

Ex. 9.3 Livro / Soma P.G.: **Calcule** para $q \neq 0$ e $q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} a \cdot q^k = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1}$$

Solução:

$$\sum_{k=0}^{n-1} aq^k = a \cdot \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{a \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Somatórios - Exercício 9.4 do Livro

Ex. 9.4 Livro / Q.14(a) Lista 1: **Calcule**

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Solução:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}\right)$$

Soma Telescópica p/ $x_k = -1/k$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = x_{n+1} - x_1 = \frac{-1}{n+1} - \frac{-1}{1} = \frac{n}{n+1}$$

Somatórios - Exercício 9.4* do Livro

Ex. 9.4* Livro / Q.14(a)* Lista 1: **Calcule**

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Solução:

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \quad = \quad \sum_{k=m}^{n} \left(-\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} \right)$$

Soma Telescópica p/ $x_k = -1/k$:

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = x_{n+1} - x_m = \frac{-1}{n+1} - \frac{-1}{m} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n+1}$$

Somatórios - Exercício 9.7 do Livro

Ex. 9.7 Livro: **Calcule** para $a \neq b$

$$\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = a^0 b^n + a^1 b^{n-1} + a^2 b^{n-2} + a^3 b^{n-3} + \ldots + a^{n-1} b^1 + a^n b^0$$

Solução:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = b^n \cdot \left(\left(\frac{a}{b}\right)^0 + \left(\frac{a}{b}\right)^1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{a}{b}\right)^n \right)$$

$$\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = b^n \cdot \sum_{k=0}^{n} a^k b^{-k} = b^n \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{a}{b}\right)^k = b^n \cdot \frac{(a/b)^{n+1} - 1}{(a/b) - 1}$$

$$= \frac{b^{n+1}}{a-b} \cdot \left(\frac{a^{n+1}}{b^{n+1}} - 1 \right) = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$$

Somatórios - soma dos quadrados perfeitos

Exemplo 9.4 Livro / Q13(b) Lista 1:

Calcule a soma dos n primeiros quadrados perfeitos
$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2$

Solução: $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$

$$\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3) = (n+1)^3 - 1^3 = \sum_{k=0}^{n}(3k^2 + 3k + 1) =$$

$$= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 3X + \frac{3n(n+1)}{2} + n.$$

$$3X = (n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n = \frac{n+1}{2}(2(n+1)^2 - 3n - 2) = \frac{n+1}{2}(2n^2 + n)$$

$$X = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Somatórios - soma dos cubos perfeitos

Exemplo Q13(c) Lista 1:

Calcule a soma dos n primeiros cubos perfeitos
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3$

Solução: $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$

$$\sum_{k=1}^{n}((k+1)^4 - k^4) = (n+1)^4 - 1^4 = \sum_{k=1}^{n}(4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) =$$

$$= 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 4X + \frac{6n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{4n(n+1)}{2} + n.$$

$$4X = (n+1)^4 - 1 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n = (n+1)\Big[(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1\Big]$$

$$X = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{(n+1)^2}{4}\Big[(n+1)^2 - (2n+1)\Big)\Big] = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Somatórios - soma das quartas potências

Exemplo Q13(c)* Lista 1:

Calcule a soma dos n primeiras quartas potências
$1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + \ldots + (n-1)^4 + n^4$

Solução: $(k+1)^5 = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$

$$\sum_{k=1}^{n}((k+1)^5 - k^5) = (n+1)^5 - 1^5 = \sum_{k=1}^{n}(5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) =$$

$$= 5\sum_{k=1}^{n} k^4 + 10\sum_{k=1}^{n} k^3 + 10\sum_{k=1}^{n} k^2 + 5\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1.$$

$$5X = (n+1)^5 - 1 - \frac{10n^2(n+1)^2}{4} - \frac{10n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{5n(n+1)}{2} - n.$$

$$X = \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

Somatórios - soma das quintas potências

Exemplo Q13(c)** Lista 1:

Calcule a soma dos n primeiras quintas potências

$1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + 5^5 + \ldots + (n-1)^5 + n^5$

Solução: $(k+1)^6 = k^6 + 6k^5 + 15k^4 + 20k^3 + 15k^2 + 6k + 1$

$$\sum_{k=1}^{n}((k+1)^6 - k^6) = (n+1)^6 - 1^6 = \sum_{k=1}^{n}(6k^5 + 15k^4 + 20k^3 + 15k^2 + 6k + 1)$$

$$= 6\sum_{k=1}^{n} k^5 + 15\sum_{k=1}^{n} k^4 + 20\sum_{k=1}^{n} k^3 + 15\sum_{k=1}^{n} k^2 + 6\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1.$$

$$6X = (n+1)^6 - 1 - \frac{15n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} - \frac{20n^2(n+1)^2}{4} - \frac{15n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{6n(n+1)}{2} - n.$$

$$X = \sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

Capítulo 10
RECORRÊNCIAS

Sequências Recorrentes - Capítulo 10

Sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é definida como uma função $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, onde $a_n = a(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplos: P.A (razão r) e P.G (quociente q)

Progressão Aritmética (P.A.): $a_n = a_{n-1} + r$, para $n \geq 1$.
Progressão Geométrica (P.G.): $a_n = a_{n-1} \cdot q$, para $n \geq 1$.

Exemplos de P.A. e P.G.

P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com razão $r = 2$ e primeiro termo $a_0 = 0$.
$(a_n) = (0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots)$ - naturais pares
P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com razão $r = 2$ e primeiro termo $a_0 = 1$.
$(a_n) = (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots)$ - naturais ímpares
P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com quociente $q = 2$ e primeiro termo $a_0 = 1$.
$(a_n) = (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots)$ - potências de 2
P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com quociente $q = 3$ e primeiro termo $a_0 = 1$.
$(a_n) = (1, 3, 9, 27, 81, 243, 279, \ldots)$ - potências de 3
P.A. / P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com razão $r = 0$ / quociente $q = 1$.
$(a_n) = (a_0, a_0, a_0, a_0, a_0, a_0, a_0, \ldots)$ - sequência constante

Sequências Recorrentes - Capítulo 10

Sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ é definida como uma função $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, onde $a_n = a(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplos: P.A (razão r) e P.G (quociente q)

Progressão Aritmética (P.A.): $a_n = a_{n-1} + r$, para $n > 1$.
Progressão Geométrica (P.G.): $a_n = a_{n-1} \cdot q$, para $n > 1$.

Exemplos de P.A. e P.G.

P.A. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ com razão $r = 2$ e primeiro termo $a_1 = 0$.
$(a_n) = (0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots)$ - naturais pares
P.A. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ com razão $r = 2$ e primeiro termo $a_1 = 1$.
$(a_n) = (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots)$ - naturais ímpares
P.G. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ com quociente $q = 2$ e primeiro termo $a_1 = 1$.
$(a_n) = (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots)$ - potências de 2
P.G. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ com quociente $q = 3$ e primeiro termo $a_1 = 1$.
$(a_n) = (1, 3, 9, 27, 81, 243, 279, \ldots)$ - potências de 3
P.A. / P.G. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ com razão $r = 0$ / quociente $q = 1$.
$(a_n) = (a_1, a_1, a_1, a_1, a_1, a_1, a_1, \ldots)$ - sequência constante

Sequências Recorrentes - Capítulo 10

Sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é definida como uma função $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, onde $a_n = a(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplos: P.A (razão r) e P.G (quociente q)

Progressão Aritmética (P.A.): $a_n = a_{n-1} + r$, para $n \geq 1$.
Progressão Geométrica (P.G.): $a_n = a_{n-1} \cdot q$, para $n \geq 1$.

Soma P.A (Exerc. 9.1) e Soma P.G. (Exerc. 9.3)

P.A. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com razão r e primeiro termo a_0.

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 \cdot n + \frac{r \cdot n(n+1)}{2}$$

P.G. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com quociente q e primeiro termo a_0.

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \frac{a_0 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Sequências Recorrentes - Mais exemplos

Sequência de Fibonacci

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geq 2$ com $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.
$(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \ = \ (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots)$

Somatórios

Dada uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, podemos definir
uma sequência soma $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, como $S_1 = x_0$ e, para $n \geq 2$,

$$S_n \ = \ \sum_{k=0}^{n-1} x_k \ = \ S_{n-1} \ + \ x_{n-1}; \ \ ou$$

uma sequência soma $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, como $S_0 = x_0$ e , para $n \geq 1$,

$$S_n \ = \ \sum_{k=0}^{n} x_k \ = \ S_{n-1} \ + \ x_n$$

Sequências Recorrentes - Definição

Muitas vezes, uma sequência é dada por uma Equação de Recorrência, definindo um termo genérico através de termos anteriores da sequência. **Exemplos:** PA, PG, Fibonacci, Somatórios, etc... Em geral, o objetivo é resolver a recorrência, ou seja, encontrar uma **fórmula fechada** para a sequência, sem depender de termos da própria sequência.

Exemplos:

	Recorrência		Fórmula fechada
P.A.:	$a_n = a_{n-1} + r$	$\Longrightarrow$	$a_n = a_0 + r \cdot n$
P.G.:	$a_n = a_{n-1} \cdot q$	$\Longrightarrow$	$a_n = a_0 \cdot q^n$

Somatório dos quadrados perfeitos: $S_n = S_{n-1} + n^2 \quad (S_0 = 0) \Longrightarrow$

Fórmula fechada: $$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Fibonacci: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (F_0 = 0, F_1 = 1) \Longrightarrow$

Fórmula fechada: $$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Sequências Recorrentes - Tipos

Recorrência de 1º ordem

a_n depende apenas do termo anterior a_{n-1}. a_0 deve ser dado.
Exemplos: P.A., P.G., somatório dos n primeiros quadrados perfeitos.

Recorrência de 2º ordem

a_n depende apenas dos dois termos anteriores a_{n-1} e a_{n-2}.
a_0 e a_1 devem ser dados.
Exemplos: Fibonacci $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $a_n = 3 \cdot a_{n-2}$.

Recorrência de kº ordem

a_n depende apenas dos k termos anteriores $a_{n-1}, \ldots, a_{n-k}$.
$a_0, \ldots, a_{k-1}$ devem ser dados. Exemplo: $a_n = a_{n-k} + 1$.
Exemplo: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \ldots + a_{n-k}$.
Exemplo: $a_n = a_{n-3} \cdot 10$ com $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ e $a_2 = 3$.
$a_n = (1, 2, 3, 10, 20, 30, 100, 200, 300, \ldots)$

Recorrências de 1^o-ordem - 10.4.1.Aditiva simples

Recorrência de 1^o ordem - aditiva simples

Recorrência: $a_n = a_{n-1} + f(n)$
Ex: **P.A.** é um caso particular quando $f(n) = r$ constante.
Solução: **Fórmula fechada** para qualquer $0 \leq m < n$

$$a_n = a_m + \sum_{k=m+1}^{n} f(k)$$

Prova:

$a_n = a_{n\text{-}1} + f(n) = a_{n\text{-}2} + f(n\text{-}1) + f(n) = a_{n\text{-}3} + f(n\text{-}2) + f(n\text{-}1) + f(n) = \ldots$
$a_n = a_m + f(m+1) + f(m+2) + \ldots + f(n)$.
Em geral, esse argumento convence e é suficiente para uma prova rápida.
Para ser mais formal, provar por indução.

Recorrências de 1º-ordem - 10.4.1.Aditiva simples

Recorrência: $a_n \;=\; a_{n-1} \;+\; f(n)$
Ex: P.A. é um caso particular quando $f(n) = r$ constante.
Solução: Fórmula fechada para qualquer $0 \leq m < n$

$$a_n \;=\; a_m \;+\; \sum_{k=m+1}^{n} f(k)$$

Exercício 10.3 (P.A.): $a_n = a_{n-1} + r, \forall n \in \mathbb{N}$. Sabe-se a_m

Se $n > m$: $a_n = a_m + \sum_{k=m+1}^{n} r \;=\; a_m + r \cdot (n-m)$
Se $n < m$: $a_m = a_n + \sum_{k=n+1}^{m} r \;=\; a_n + r \cdot (m-n)$
Solução geral: $a_n = a_m + r \cdot (n-m)$.

Exemplo (Soma P.A.): $S_n = S_{n-1} + a_n$, com $S_0 = a_0$

$S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_0 + r \cdot k)$
$S_n = a_0 + n \cdot a_0 + r \cdot \sum_{k=1}^{n} k \implies S_n = a_0(n+1) + r \cdot n(n+1)/2$

Exemplo (Soma P.G.): $S_n = S_{n-1} \;+\; b_0 \cdot q^n$, com $S_0 = b_0$

$S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} b_0 \cdot q^k \;=\; b_0 + b_0 \cdot \sum_{k=1}^{n} q^k \;=\; b_0 \cdot (\sum_{k=0}^{n} q^k)$
$S_n = b_0 \cdot (q^{n+1} - 1)/(q-1)$ (assumindo $q \neq 1$)

Recorrências de 1^o-ordem - 10.4.1.Aditiva simples

Recorrência de 1^o ordem - aditiva simples

Recorrência: $a_n = a_{n-1} + f(n)$

Ex: **P.A.** é um caso particular quando $f(n) = r$ constante.

Solução: **Fórmula fechada** para qualquer $0 \leq m < n$

$$a_n = a_m + \sum_{k=m+1}^{n} f(k)$$

Exercício 10.4: $a_n = a_{n-1} + \pi^2 \ (n > 0)$ com $a_0 = 2$

$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \pi^2 = 2 + \pi^2 n$

Exercício 10.5: $a_n = a_{n-1} + n^2 \ (n > 0)$ com $a_0 = 0$

$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

Exercício 10.5': $a_n = a_{n-1} + n^3 \ (n > 0)$ com $a_0 = 0$

$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} k^3 = n^2(n+1)^2/4$

Recorrências de 1^o-ordem - 10.4.1.Aditiva simples

Recorrência de 1^o ordem - aditiva simples

Recorrência: $a_n = a_{n-1} + f(n)$
Ex: P.A. é um caso particular quando $f(n) = r$ constante.
Solução: Fórmula fechada para qualquer $0 \leq m < n$

$$a_n = a_m + \sum_{k=m+1}^{n} f(k)$$

Exercício 10.6': $a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$ $(n > 0)$ com $a_0 = 0$

$$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$$

Exercício 10.6: $a_n = a_{n-1} + 2^n$ $(n > 0)$ com $a_1 = 1$

$$a_n = a_1 + \sum_{k=2}^{n} 2^k = 1 + \sum_{k=0}^{n} 2^k - 2^0 - 2^1 = 1 + (2^{n+1} - 1) - 3 = 2^{n+1} - 3$$

Recorrências de 1^o-ordem - Retas no plano

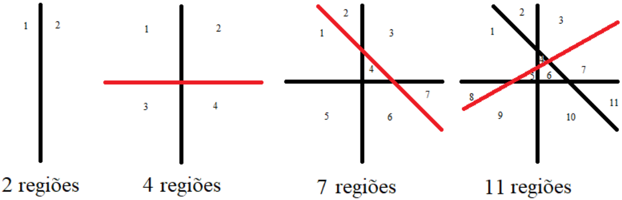
Recorrência de 1^o ordem - aditiva simples

Recorrência: $a_n \;=\; a_{n-1} \;+\; f(n)$

Ex: **P.A.** é um caso particular quando $f(n) = r$ constante.

Solução: **Fórmula fechada** para qualquer $0 \leq m < n$

$$a_n \;=\; a_m \;+\; \sum_{k=m+1}^{n} f(k)$$



Exemplo 10.7: Número max de regiões no plano com n retas

Eq. Recorrência: $a_n = a_{n-1} + n$ (para $n > 0$) com $a_1 = 2$

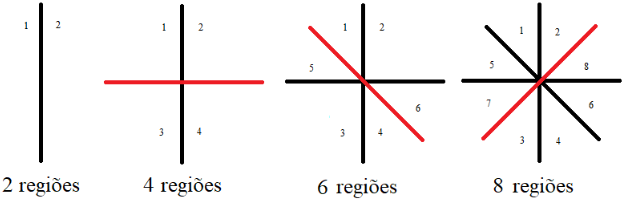
Fórmula fechada: $a_n = a_1 + \sum_{k=2}^{n} k \;=\; 1 + n(n+1)/2$

Recorrências de 1^o-ordem - Retas no plano

Recorrência de 1^o ordem - aditiva simples

Recorrência: $a_n \;=\; a_{n-1} \;+\; f(n)$
Ex: **P.A.** é um caso particular quando $f(n) = r$ constante.
Solução: **Fórmula fechada** para qualquer $0 \leq m < n$

$$a_n \;=\; a_m \;+\; \sum_{k=m+1}^{n} f(k)$$



Exemplo 10.7: Número min de regiões no plano com n retas

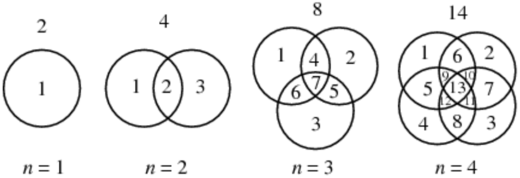
Eq. Recorrência: $a_n = a_{n-1} + 2$ (para $n > 1$) com $a_1 = 2$
Fórmula fechada: $a_n = a_1 + \sum_{k=2}^{n} 2 \;=\; 2 \cdot n$ (para $n \geq 1$)

Recorrências de 1^o-ordem - Círculos no plano

Recorrência de 1^o ordem - aditiva simples

Recorrência: $a_n \ = \ a_{n-1} \ + \ f(n)$
Ex: **P.A.** é um caso particular quando $f(n) = r$ constante.
Solução: **Fórmula fechada** para qualquer $0 \leq m < n$

$$a_n \ = \ a_m \ + \ \sum_{k=m+1}^{n} f(k)$$



Exercício 10.7: Número max regiões plano n círculos

(a) Eq. Recorrência: $a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$ para $n > 1$ com $a_1 = 2$
(b) Fórmula fechada: $a_n = a_1 + \sum_{k=2}^{n} 2(k-1) \ = \ n^2 - n + 2$ $(n \geq 1)$

Recorrências de 1^o-ordem - Círculos no plano

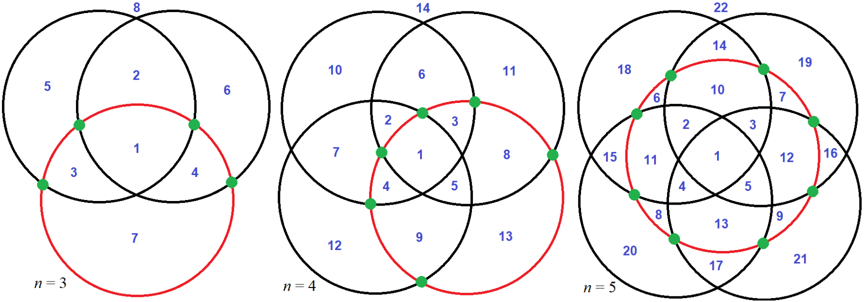
Recorrência de 1^o ordem - aditiva simples

Recorrência: $a_n \;=\; a_{n-1} \;+\; f(n)$

Ex: **P.A.** é um caso particular quando $f(n) = r$ constante.

Solução: **Fórmula fechada** para qualquer $0 \leq m < n$

$$a_n \;=\; a_m \;+\; \sum_{k=m+1}^{n} f(k)$$



Exercício 10.7: Número max regiões plano n círculos

(a) Eq. Recorrência: $a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$ para $n > 1$ com $a_1 = 2$

(b) Fórmula fechada: $a_n = a_1 + \sum_{k=2}^{n} 2(k-1) \;=\; n^2 - n + 2$ $(n \geq 1)$

Recorrências de 1^o-ordem - Círculos no plano

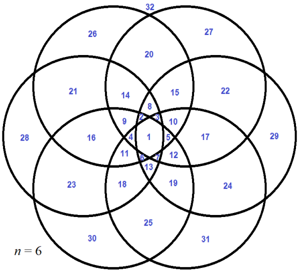
Recorrência de 1^o ordem - aditiva simples

Recorrência: $a_n \;=\; a_{n-1} \;+\; f(n)$

Ex: **P.A.** é um caso particular quando $f(n) = r$ constante.

Solução: **Fórmula fechada** para qualquer $0 \leq m < n$

$$a_n \;=\; a_m \;+\; \sum_{k=m+1}^{n} f(k)$$



Exercício 10.7: Número max regiões plano n círculos

(a) Eq. Recorrência: $a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$ para $n > 1$ com $a_1 = 2$

(b) Fórmula fechada: $a_n = a_1 + \sum_{k=2}^{n} 2(k-1) \;=\; n^2 - n + 2$ $(n \geq 1)$

Recorrências de 1^o-ordem - Exercício 10.8

Recorrência de 1^o ordem - aditiva simples

Recorrência: $a_n = a_{n-1} + f(n)$
Ex: **P.A.** é um caso particular quando $f(n) = r$ constante.
Solução: **Fórmula fechada** para qualquer $0 \leq m < n$

$$a_n = a_m + \sum_{k=m+1}^{n} f(k)$$

Exercício 10.8: Seq. n^o ímpar 0's em $\{0, 1, 2\}$

(a) Eq. Recorrência: $I_n = 2 \cdot I_{n-1} + 1 \cdot P_{n-1}$ $(n > 1)$ com $I_0 = 0$
$P_n = 3^n - I_n \implies I_n = I_{n-1} + 3^{n-1}$.

.

(b) Fórmula fechada:
$I_n = I_0 + \sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i = (3^n - 1)/(3 - 1) = (3^n - 1)/2$

Recorrência de 1^o ordem - multiplicativa simples

Recorrência: $a_n = a_{n-1} \cdot f(n)$
Ex: **P.G.** é um caso particular quando $f(n) = q$ constante.
Solução: **Fórmula fechada** para qualquer $0 \leq m < n$

$$a_n = a_m \cdot \prod_{k=m+1}^{n} f(k)$$

Prova:

$a_n = a_{n\text{-}1} \cdot f(n) = a_{n\text{-}2} \cdot f(n\text{-}1) \cdot f(n) = a_{n\text{-}3} \cdot f(n\text{-}2) \cdot f(n\text{-}1) \cdot f(n) = \ldots$
$a_n = a_m \cdot f(m+1) \cdot f(m+2) \cdot \ldots \cdot f(n)$.
Em geral, esse argumento convence e é suficiente para uma prova rápida.
Para ser mais formal, provar por indução.

Recorrências de 1^o-ordem - 10.4.2. Multiplicativa simples

Recorrência: $a_n \;=\; a_{n-1} \;\cdot\; f(n)$

Ex: **P.G.** é um caso particular quando $f(n) = q$ constante.

Solução: Fórmula fechada para qualquer $0 \leq m < n$

$$a_n \;=\; a_m \;\cdot\; \prod_{k=m+1}^{n} f(k)$$

Exercício 10.10 (P.G.): $a_n = a_{n-1} \cdot q, \forall n \in \mathbb{N}$. Sabe-se a_m

Se $n > m$: $a_n = a_m \cdot \prod_{k=m+1}^{n} q \;=\; a_m \cdot q^{n-m}$

Se $n < m$: $a_m = a_n \cdot \prod_{k=n+1}^{m} q \;=\; a_n \cdot q^{m-n}$

Solução geral: $a_n = a_m \cdot q^{n-m}$.

Exercício 10.11: $a_n = a_{n-1} \cdot 2/n$ com $a_0 = 1$

$a_n = a_0 \cdot \prod_{k=1}^{n}(2/k) = 2^n / \prod_{k=1}^{n} k \;=\; 2^n/n!$

Exercício 10.12: $a_n = a_{n-1} \cdot (n+p)/n$ com $a_0 = 1$

$a_n = a_0 \cdot \prod_{k=1}^{n}(k+p)/k = \prod_{k=1+p}^{n+p} k / \prod_{k=1}^{n} k$

$a_n = \prod_{k=1}^{n+p} k / \left(\prod_{k=1}^{p} k \cdot \prod_{k=1}^{n} k\right) \;=\; (n+p)!/(p!n!) \;=\; \binom{n+p}{p}$

Recorrências de 1^o-ordem - Caso geral com constantes

Recorrência: $a_n = s \cdot a_{n-1} + t$ com $s \neq 1$ e t constantes
Solução: Fórmula fechada:

$$a_n = c_1 \cdot s^n + c_2, \text{ onde } c_1 = a_0 - c_2 \text{ e } c_2 = \frac{-t}{s-1}$$

Prova:

$$\begin{aligned}
a_n &= s \cdot a_{n-1} + t \\
a_n &= s \cdot (s \cdot a_{n-2} + t) + t = s^2 \cdot a_{n-2} + t \cdot (1+s) \\
a_n &= s^2 \cdot (s \cdot a_{n-3} + t) + t \cdot (1+s) = s^3 \cdot a_{n-3} + t \cdot (1+s+s^2) \\
a_n &= s^3 \cdot (s \cdot a_{n-4} + t) + t \cdot (1+s+s^2) = s^4 \cdot a_{n-4} + t \cdot (1+s+s^2+s^3) \\
&\ldots \\
a_n &= s^k \cdot a_{n-k} + t \cdot (1+s+s^2+s^3+\ldots+s^{k-1}) \\
&\ldots \\
a_n &= s^n \cdot a_0 + t \cdot (1+s+s^2+s^3+\ldots+s^{n-1}) \\
a_n &= s^n \cdot a_0 + t \cdot (s^n - 1)/(s-1)
\end{aligned}$$

Recorrências de 1^o-ordem - Caso geral com constantes

Recorrência: $a_n \;=\; s \cdot a_{n-1} \;+\; t$ com $s \neq 1$ e t constantes
Solução: Fórmula fechada:

$$a_n = c_1 \cdot s^n + c_2, \text{ onde } c_1 = a_0 - c_2 \text{ e } c_2 = \frac{-t}{s-1}$$

Exemplo: $a_n \;=\; s \cdot a_{n-1} \;+\; t$

$a_n = c_1 \cdot s^n + c_2 \;\Rightarrow\; a_0 = c_1 + c_2 \quad \text{e} \quad a_1 = s \cdot c_1 + c_2$
$a_1 = s \cdot a_0 + t \;\Rightarrow\; s \cdot c_1 + c_2 = s \cdot a_0 + t \Rightarrow (s-1) \cdot c_1 = (s-1)a_0 + t$
$c_1 = a_0 + t/(s-1) \;\Longrightarrow\; c_2 = -t/(s-1)$

Recorrências de 1^o-ordem - Caso geral com constantes

Recorrência: $a_n = s \cdot a_{n-1} + t$ com $s \neq 1$ e t constantes
Solução: Fórmula fechada:

$$a_n = c_1 \cdot s^n + c_2, \text{ onde } c_1 = a_0 - c_2 \text{ e } c_2 = \frac{-t}{s-1}$$

Exemplo: $a_n = 3 \cdot (a_{n-1} - 2)$ com $a_0 = 4$
$s = 3, t = -6 \implies c_2 = 6/(3-1) = 3,\ c_1 = 4 - 3 = 1$
$a_n = 3^n + 3$

Exemplo: $a_n = 3 \cdot (a_{n-1} - 2)$ com $a_0 = 3$
$s = 3, t = -6 \implies c_2 = 6/(3-1) = 3,\ c_1 = 3 - 3 = 0$
$a_n = 0 \cdot 3^n + 3 \implies a_n = 3$

Exemplo: $a_n = 3 \cdot (a_{n-1} - 2)$ com $a_0 = 2$
$s = 3, t = -6 \implies c_2 = 6/(3-1) = 3,\ c_1 = 2 - 3 = -1$
$a_n = -3^n + 3$

Recorrências de 1°-ordem - Caso geral com constantes

Recorrência: $a_n = s \cdot a_{n-1} + t$ com $s \neq 1$ e t constantes
Solução: Fórmula fechada:

$$a_n = c_1 \cdot s^n + c_2, \text{ onde } c_1 = a_0 - c_2 \text{ e } c_2 = \frac{-t}{s-1}$$

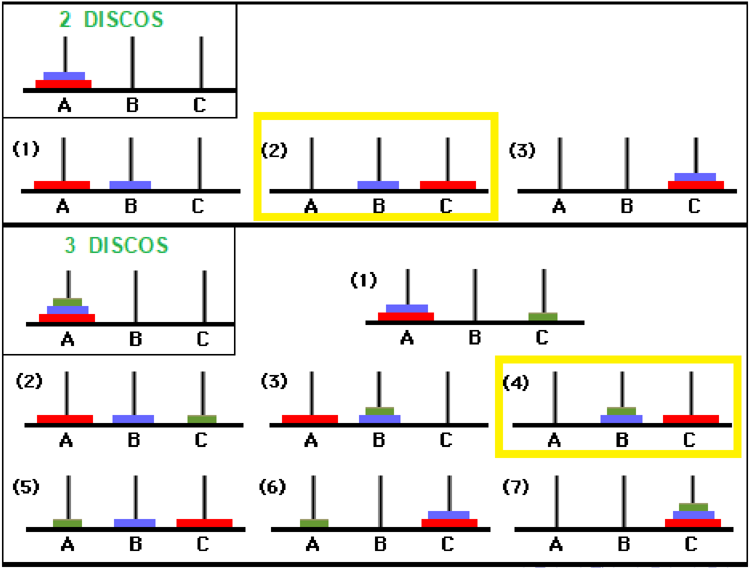
Exemplo: $a_n = 10 - a_{n-1}$ com $a_0 = 10$
$s = -1,\ t = 10 \implies c_2 = -10/(-1-1) = 5,\ c_1 = 10 - 5 = 5$
$a_n = 5 \cdot (-1)^n + 5$ $\quad a_n = (10, 0, 10, 0, 10, 0, \ldots)$

Exemplo: $a_n = 10 - a_{n-1}$ com $a_0 = 8$
$s = -1,\ t = 10 \implies c_2 = -10/(-1-1) = 5,\ c_1 = 8 - 5 = 3$
$a_n = 3 \cdot (-1)^n + 5$ $\quad a_n = (8, 2, 8, 2, 8, 2, \ldots)$

Exemplo: $a_n = 10 - a_{n-1}$ com $a_0 = 2$
$s = -1,\ t = 10 \implies c_2 = -10/(-1-1) = 5,\ c_1 = 2 - 5 = -3$
$a_n = (-3) \cdot (-1)^n + 5$ $\quad a_n = (2, 8, 2, 8, 2, 8, \ldots)$

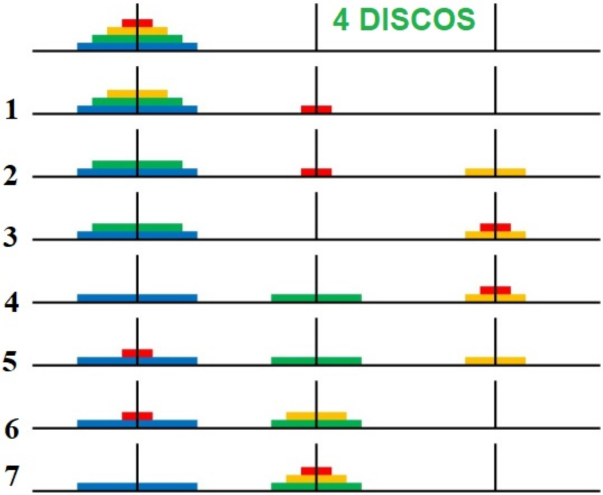
Recorrências de 1^o-ordem - Exemplo: Torre de Hanói

Mover n discos da haste A para a C, usando a B como auxiliar, movendo 1 disco por vez, sem colocar um disco maior sobre um menor.



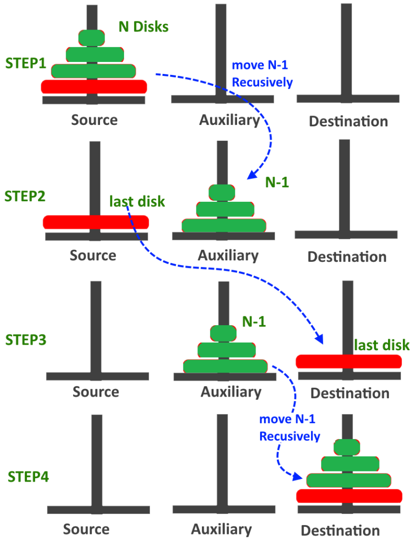
Recorrências de 1^o-ordem - Exemplo: Torre de Hanói

Mover n discos da haste A para a C, usando a B como auxiliar, movendo 1 disco por vez, sem colocar um disco maior sobre um menor.



Recorrências de 1^o-ordem - Exemplo: Torre de Hanói

Mover n discos da haste A para a C, usando a B como auxiliar, movendo 1 disco por vez, sem colocar um disco maior sobre um menor.



Recorrências de 1º-ordem - Exemplo: Torre de Hanói

Mover n discos da haste A para a C, usando a B como auxiliar, movendo 1 disco por vez, sem colocar um disco maior sobre um menor.

Número de movimentos da Torre de Hanói

Seja a_n o número de movimentos com $n \geq 0$ discos.

$a_n \ = \ 2 \cdot a_{n-1} \ + \ 1$ para $n \geq 1$, com $a_0 = 0$.

.

Solução:

$s = 2, t = 1 \quad \Longrightarrow \quad c_2 = -1/(2-1) = -1, \ c_1 = 0 - (-1) = 1$

$a_n \ = \ 2^n \ - \ 1$

.

Provar por indução (Q.1, Lista 2):

Caso base: $n = 0 \implies a_n = 0 = 2^0 - 1$. **OK**

H.I.: Fixe $n > 0$ e suponha valer para menos de n discos.

P.I.: Vamos provar que também vale para n discos.

$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1 \overset{H.I.}{\Longrightarrow} a_n = 2 \cdot (2^{n-1} - 1) + 1 \ = \ 2^n - 2 + 1$

$a_n \ = \ 2^n - 1$. **cqd** $\square$

Recorrências de 2^o-ordem

Recorrência de 2^o ordem

a_n depende apenas dos dois termos anteriores a_{n-1} e a_{n-2}.
a_0 e a_1 devem ser dados.
Exemplo: Fibonacci $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $G_n = -G_{n-2}$.
Exemplo: Fibonacci' $F'_n = F'_{n-1} + F'_{n-2} + 1$, $G'_n = -G'_{n-2} + 1$.

Recorrência de 2^o ordem homogênea

É da forma $a_n = s_1 \cdot a_{n-1} + s_2 \cdot a_{n-2}$.
a_0 e a_1 devem ser dados, e s_1 e s_2 são constantes.
Exemplos: F_n e G_n são homogêneas. F'_n e G'_n são não-homogêneas.

Recorrência de k^o ordem homogênea

É da forma $a_n = s_1 \cdot a_{n-1} + s_2 \cdot a_{n-2} + \ldots + s_k \cdot a_{n-k}$.
$a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ devem ser dados, e $s_1, s_2, \ldots, s_k$ são constantes.

Recorrências de 2^o-ordem homogêneas

É da forma $a_n = s_1 \cdot a_{n-1} + s_2 \cdot a_{n-2}$.

Soluções do tipo $a_n = r^n$ para $r \neq 0$:

$a_n = s_1 \cdot a_{n-1} + s_2 \cdot a_{n-2} \implies r^n = s_1 r^{n-1} + s_2 r^{n-2} \overset{\div r^{n-2}}{\implies}$
$\overset{\div r^{n-2}}{\implies} r^2 = s_1 r + s_2 \Rightarrow r^2 - s_1 r - s_2 = 0$ (Eq. 2^o-grau: raízes r_1 e r_2)
Portanto $a_n = r_1^n$ e $a_n = r_2^n$ são soluções (ignorando a_0 e a_1)

.
Se a'_n e a''_n são soluções, então $a_n = c_1 a'_n + c_2 a''_n$ é solução, pois
$a_n = c_1 a'_n + c_2 a''_n = c_1(s_1 a'_{n-1} + s_2 a'_{n-2}) + c_2(s_1 a''_{n-1} + s_2 a''_{n-2}) \implies$
$a_n = s_1(c_1 a'_{n-1} + c_2 a''_{n-1}) + s_2(c_1 a'_{n-2} + c_2 a''_{n-2}) = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2}$

Soluções do tipo $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ para $r_1 \neq r_2$:

$a_0 = c_1 r_1^0 + c_2 r_2^0 \implies c_1 + c_2 = a_0$
$a_1 = c_1 r_1^1 + c_2 r_2^1 \implies r_1 c_1 + r_2 c_2 = a_1$
Resolver sistema 2 equações e variáveis c_1 e c_2:

$$c_1 = \frac{a_1 - a_0 r_2}{r_1 - r_2} \quad e \quad c_2 = \frac{-a_1 + a_0 r_1}{r_1 - r_2}$$

Recorrências de 2º-ordem homogêneas

Teorema: Sejam r_1 e r_2 as raízes de $x^2 - s_1 x - s_2 = 0$. Se $r_1 \neq r_2$, então toda solução para a recorrência $a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2}$ é da forma $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$. Ademais,

$$c_1 = \frac{a_1 - a_0 r_2}{r_1 - r_2} \quad e \quad c_2 = \frac{-a_1 + a_0 r_1}{r_1 - r_2}$$

Exerc.13(c)L2: $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ com $a_0 = 1$ e $a_1 = 3$

$s_1 = 5,\ s_2 = -6$: eq. caract. $x^2 - 5x + 6 = 0 \Longrightarrow$ raízes $r_1 = 3$ e $r_2 = 2$

$c_1 = (3 - 1 \cdot 2)/(3-2) = 1$ e $c_2 = (-3 + 1 \cdot 3)/(3-2) = 0$

$a_n = 1 \cdot 3^n + 0 \cdot 2^n \Longrightarrow a_n = 3^n$

Exerc.13(c')L2: $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ com $a_0 = 1$ e $a_1 = 2$

$c_1 = (2 - 1 \cdot 2)/(3-2) = 0$ e $c_2 = (-2 + 1 \cdot 3)/(3-2) = 1$

$a_n = 0 \cdot 3^n + 1 \cdot 2^n \Longrightarrow a_n = 2^n$

Exerc.13(c")L2: $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ com $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$

$c_1 = (1 - 0 \cdot 2)/(3-2) = 1$ e $c_2 = (-1 + 0 \cdot 3)/(3-2) = -1$

$a_n = (1) \cdot 3^n + (-1) \cdot 2^n \Longrightarrow a_n = 3^n - 2^n$

Recorrências de 2^o-ordem homogêneas

Teorema: Sejam r_1 e r_2 as raízes de $x^2 - s_1 x - s_2 = 0$. Se $r_1 \neq r_2$, então toda solução para a recorrência $a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2}$ é da forma $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$. Ademais,

$$c_1 = \frac{a_1 - a_0 r_2}{r_1 - r_2} \quad e \quad c_2 = \frac{-a_1 + a_0 r_1}{r_1 - r_2}$$

Exemplo: $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$ com $a_0 = 3$ e $a_1 = 2$

$s_1 = 3,\ s_2 = 4$: eq. caract. $x^2 - 3x - 4 = 0 \Longrightarrow$ raízes $r_1 = 4$ e $r_2 = -1$

$c_1 = (2 - 3(-1))/(4 - (-1)) = 1$ e $c_2 = (-2 + 3 \cdot 4)/(4 - (-1)) = 2$

$a_n = 1 \cdot 4^n + 2 \cdot (-1)^n \Longrightarrow a_n = 4^n + 2 \cdot (-1)^n$

Fibonacci: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ com $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$

$s_1 = 1,\ s_2 = 1$: eq. caract. $x^2 - x - 1 = 0 \Longrightarrow$ raízes $r_1, r_2 = (1 \pm \sqrt{5})/2$

$c_1 = (1 - 0(r_2))/\sqrt{5} = 1/\sqrt{5}$ e $c_2 = (-1 + 0 \cdot r_1)/\sqrt{5} = -1/\sqrt{5}$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Recorrências de 2^o-ordem homogêneas

Teorema: Sejam r_1 e r_2 as raízes de $x^2 - s_1 x - s_2 = 0$. Se $r_1 \neq r_2$, então toda solução para a recorrência $a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2}$ é da forma $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$. Ademais,

$$c_1 \;=\; \frac{a_1 - a_0 r_2}{r_1 - r_2} \quad e \quad c_2 \;=\; \frac{-a_1 + a_0 r_1}{r_1 - r_2}$$

Exemplo: $a_n = -a_{n-2}$ com $a_0 = 4$ e $a_1 = 6$

$a_n \;=\; (4, 6, -4, -6, 4, 6, -4, -6, 4, 6, -4, -6, \ldots)$

$s_1 = 0,\ s_2 = -1$: eq. caract. $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ raízes $r_1 = i = \sqrt{\text{-}1}$ e $r_2 = \text{-}i$

$c_1 \;=\; (6 - 4(-i))/(i - (-i)) \;=\; 2 - 3i$ e $c_2 \;=\; (-6 + 4 \cdot i)/2i \;=\; 2 + 3i$

$a_n \;=\; (2 - 3i) \cdot i^n + (2 + 3i) \cdot (-i)^n \;\Longrightarrow$

$a_n \;=\; 2 \cdot i^n(1 + (-1)^n) + 3 \cdot i^{n-1}(1 + (-1)^{n-1})$

n par $\Longrightarrow$ $a_n = \pm 4$ n ímpar $\Longrightarrow$ $a_n = \pm 6$

.

Na verdade, é melhor resolver recorrências desse tipo $a_n = s_2 \cdot a_{n-2}$ como duas P.G.'s separadas nos índices pares e nos índices ímpares, com quociente q e primeiros valores a_0 e a_1, respectivamente.

Recorrências de 2^o-ordem homogêneas (raiz repetida)

Teorema: Sejam r_1 e r_2 de forma que a equação $x^2 - s_1 x - s_2 = 0$ tenha apenas uma raiz $r \neq 0$. Então toda solução para a recorrência $a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2}$ é da forma $a_n = c_1 \cdot r^n + c_2 n \cdot r^n$. Ademais,

$$c_1 = a_0 \quad e \quad c_2 = \frac{a_1 - a_0 r}{r}$$

Intuição da Prova:

$x^2 - s_1 x - s_2 = 0$ tem só 1 raiz $\Rightarrow$ Eq. $(x\text{-}r)^2 = x^2\text{-}2rx\text{+}r^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow s_1 = 2r$ e $s_2 = -r^2 \implies$ usa-se isso p/ mostrar que $n \cdot r^n$ é solução.

.

$nr^n = s_1(n-1)r^{n-1} + s_2(n-2)r^{n-2} \overset{\div r^{n-2}}{\Longleftrightarrow} r^2 n = s_1 r(n-1) + s_2(n-2) \overset{s_1,s_2}{\Longleftrightarrow}$
$\overset{s_1,s_2}{\Longleftrightarrow} r^2 n = 2r^2(n-1) - r^2(n-2) \overset{\div r^2}{\Longleftrightarrow} n = 2(n-1) - (n-2) \Leftrightarrow 0 = 0$

.

Além disso,

$a_0 = c_1 r^0 + c_2 \cdot 0 \cdot r^0 \implies c_1 = a_0$
$a_1 = c_1 r^1 + c_2 \cdot 1 \cdot r^1 \implies c_1 r + c_2 r = a_1 \implies c_2 = (a_1 - a_0 r)/r$

Recorrências de 2º-ordem homogêneas (raiz repetida)

Teorema: Sejam r_1 e r_2 de forma que a equação $x^2 - s_1 x - s_2 = 0$ tenha apenas uma raiz $r \neq 0$. Então toda solução para a recorrência $a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2}$ é da forma $a_n = c_1 \cdot r^n + c_2 n \cdot r^n$. Ademais,

$$c_1 = a_0 \quad e \quad c_2 = \frac{a_1 - a_0 r}{r}$$

Exerc.13(d): $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ com $a_0 = 1$ e $a_1 = 3$

$s_1 = 4,\ s_2 = -4$: eq. caract. $x^2 - 4x + 4 = 0 \Longrightarrow$ raíz única $r = 2$

$c_1 = a_0 = 1$ e $c_2 = (3 - 1 \cdot 2)/2 = 1/2$

$a_n = 1 \cdot 2^n + (1/2) \cdot n \cdot 2^n \Longrightarrow a_n = (2 + n) \cdot 2^{n-1}$

Exerc.13(d'): $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ com $a_0 = 1$ e $a_1 = 4$

$c_1 = a_0 = 1$ e $c_2 = (4 - 1 \cdot 2)/2 = 1$

$a_n = 1 \cdot 2^n + 1 \cdot n \cdot 2^n \Longrightarrow a_n = (1 + n) \cdot 2^n$

Exerc.13(d''): $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ com $a_0 = 1$ e $a_1 = 6$

$c_1 = a_0 = 1$ e $c_2 = (6 - 1 \cdot 2)/2 = 2$

$a_n = 1 \cdot 2^n + 2 \cdot n \cdot 2^n \Longrightarrow a_n = (1 + 2n) \cdot 2^n$

Recorrências de 2^o-ordem homogêneas (raiz repetida)

Teorema: Sejam r_1 e r_2 de forma que a equação $x^2 - s_1 x - s_2 = 0$ tenha apenas uma raiz $r \neq 0$. Então toda solução para a recorrência $a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2}$ é da forma $a_n = c_1 \cdot r^n + c_2 n \cdot r^n$. Ademais,

$$c_1 = a_0 \quad e \quad c_2 = \frac{a_1 - a_0 r}{r}$$

Exemplo: $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ com $a_0 = 2$ e $a_1 = 9$

$s_1 = 6,\ s_2 = -9$: eq. caract. $x^2 - 6x + 9 = 0 \Longrightarrow$ raíz única $r = 3$

$c_1 = a_0 = 2$ e $c_2 = (9 - 2 \cdot 3)/3 = 1$

$a_n = 2 \cdot 3^n + 1 \cdot n \cdot 3^n \Longrightarrow a_n = (2 + n) \cdot 3^n$

Exemplo: $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ com $a_0 = 2$ e $a_1 = 6$

$c_1 = a_0 = 2$ e $c_2 = (6 - 2 \cdot 3)/3 = 0$

$a_n = 2 \cdot 3^n + 0 \cdot n \cdot 3^n \Longrightarrow a_n = 2 \cdot 3^n$

Exemplo: $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ com $a_0 = 2$ e $a_1 = 3$

$c_1 = a_0 = 2$ e $c_2 = (3 - 2 \cdot 3)/3 = -1$

$a_n = 2 \cdot 3^n + (-1) \cdot n \cdot 3^n \Longrightarrow a_n = (2 - n) \cdot 3^n$

Recorrências de 2^o-ordem homogêneas (raiz repetida)

Teorema: Sejam r_1 e r_2 de forma que a equação $x^2 - s_1 x - s_2 = 0$ tenha apenas uma raiz $r \neq 0$. Então toda solução para a recorrência $a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2}$ é da forma $a_n = c_1 \cdot r^n + c_2 n \cdot r^n$. Ademais,

$$c_1 = a_0 \quad e \quad c_2 = \frac{a_1 - a_0 r}{r}$$

Exemplo: $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ com a_0 e a_1

$s_1 = 2,\ s_2 = -1$: eq. caract. $x^2 - 2x + 1 = 0 \implies$ raíz única $r = 1$

$c_1 = a_0$ e $c_2 = (a_1 - a_0 \cdot 1)/1 = (a_1 - a_0)$

$a_n = a_0 \cdot 1^n + (a_1 - a_0) \cdot n \cdot 1^n \implies a_n = (a_1 - a_0)n + a_0$

Recorrências de 2^o-ordem NÃO-homogêneas

Teorema:

Dada uma recorrência $a'_n = s_1 a'_{n-1} + s_2 a'_{n-2} + s_3$, se $s_1 + s_2 \neq 1$, então $a'_n = a_n - b$, onde $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ é tal que $a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2}$ e $b = s_3/(s_1 + s_2 - 1)$.

Prova:

$a'_n = a_n - b \Leftrightarrow (a_n - b) = s_1(a_{n-1} - b) + s_2(a_{n-2} - b) + s_3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2} + s_3 - b(s_1 + s_2 - 1) \Leftrightarrow a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2}$

Ex: Fibonacci' $F'_n = F'_{n\text{-}1} + F'_{n\text{-}2} + 1$ com $F'_0 = \text{-}1$ e $F'_1 = 0$

Intuição: Observar que $F'_n = F_n - 1$ funciona, pois

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \Leftrightarrow F_n - 1 = (F_{n-1} - 1) + (F_{n-2} - 1) + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F'_n = F'_{n-1} + F'_{n-2} + 1$

$$F'_n = (-1, 0, 0, 1, 2, 4, 7, 12, 20, 33, 54, \ldots)$$

$$F_n = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots)$$

$$F'_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] - 1$$

Recorrências de 2^o-ordem NÃO-homogêneas

Teorema:

Dada uma recorrência $a'_n = s_1 a'_{n-1} + s_2 a'_{n-2} + s_3$, se $s_1 + s_2 \neq 1$, então $a'_n = a_n - b$, onde $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ é tal que $a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2}$ e $b = s_3/(s_1 + s_2 - 1)$.

Exemplo: $a'_n = 6a'_{n-1} - 9a'_{n-2} + 4$ com $a'_0 = 3$ e $a'_1 = 7$

$b = 4/(6\text{-}9\text{-}1) = \text{-}1 \Rightarrow a'_n = a_n{+}1$ com $a_n = 6a_{n\text{-}1}\text{-}9a_{n\text{-}2}$, $a_0 = 2, a_1 = 6$

$a_n = 2 \cdot 3^n \implies a'_n = 2 \cdot 3^n \quad + \quad 1$

Exemplo: $a'_n = -a'_{n-2} + 4$ com $a'_0 = 6$ e $a'_1 = 8$

$b = 4/(0 - 1 - 1) = -2 \implies a'_n = a_n + 2$ com $a_n = -a_{n-2}$, $a_0 = 4, a_1 = 6$

$$
\begin{aligned}
a'_n &= (2 - 3i) \cdot i^n + (2 + 3i) \cdot (-i)^n \quad + \quad 2 \\
a'_n &= (6, 8, -2, -4, 6, 8, -2, -4, \ldots) \\
a_n &= (4, 6, -4, -6, 4, 6, -4, -6, \ldots)
\end{aligned}
$$

CASOS MAIS GERAIS: Funções geradoras

Técnica das Funções Geradoras: não será ensinado aqui.

Sequências Recorrentes - RESUMO

Recorrências de 1º ordem: $a_n = a_{n-1} \cdot s(n) \; + \; t(n)$

- Aditiva simples ($s(n) = 1$): $a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} t(k)$
- Multipl. simples ($t(n) = 0$): $a_n = a_0 \cdot \prod_{k=1}^{n} s(k)$
- Caso geral com constantes ($s \neq 1$ e t): $a_n = c_1 \cdot s^n + c_2$

Recorrências de 2º ordem hom: $a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2}$

- Equação característica: $x^2 - s_1 x - s_2 = 0$ com raízes r_1, r_2
- Raízes distintas ($r_1 \neq r_2$): $a_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n$
- Raízes iguais ($r_1 = r_2 = r$): $a_n = c_1 \cdot r^n + c_2 \cdot n \cdot r^n$

Recorrências de 2º ordem NÃO-hom: $a'_n = s_1 a'_{n-1} + s_2 a'_{n-2} + s_3$

- Se $s_1 + s_2 \neq 1$, seja $b = s_3/(s_1 + s_2 - 1)$.
- Rec. hom corr: $a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2}$ com $a_0 = a'_0 + b$ e $a_1 = a'_1 + b$
- Solução: $a'_n \; = \; a_n - b$

Capítulo 11
COMBINATÓRIA

Capítulo 11 - Contagem - Combinatória

Ex 11.1: 3 bolas rotuladas 1 a 3 em caixas numeradas A e B.

- $2^3 = 8$ modos: AAA,AAB,ABA,ABB,BAA,BAB,BBA,BBB

(a) E se bolas idênticas com caixas distintas ?

- 4 modos: 3-0, 2-1, 1-2, 0-3

(b) E se bolas distintas com caixas idênticas ?

- 4 modos: 123-$\emptyset$, 12-3, 13-2, 1-23

(c) E se bolas idênticas com caixas idênticas ?

- 2 modos: 3-0, 2-1

Ex 11.10: 20 pessoas em 4 viagens, cada uma com 5 pessoas.

$$\binom{20}{5} \cdot \binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{5} = \frac{20!}{5!\cancel{15!}} \cdot \frac{\cancel{15!}}{5!\cancel{10!}} \cdot \frac{\cancel{10!}}{5!\cancel{5!}} \cdot \frac{\cancel{5!}}{5!0!} = \frac{20!}{5!5!5!5!}$$

Faz uma permutação das 20 pessoas: as 5 primeiras vão na 1^o viagem e assim por diante. Dentro dessa permutação maior, qualquer permutação das posições 1 a 5, ou de 6 a 10, ou de 11 a 15, ou de 16 a 20, gerará a mesma configuração de viagem. Por isso, devemos dividir por 5! quatro vezes.

Exercício 11.13:

- Sejam X e Y conjuntos finitos, com $|X| = m$ e $|Y| = n$. Seja R um subconjunto de X com r elementos, e S um subconjunto de Y com s elementos. Quantas funções F distintas existem de X para Y tais que $F(x) \in S$ para todo x em R?

Solução:

- Cada elemento de R tem s valores possíveis e cada elemento fora de R tem n valores possíveis. Pelo princípio multiplicativo:

$$Resposta \;=\; s^r \;\cdot\; n^{m-r}$$

Exercício 11.22:

- Quantas "mãos" diferentes de cinco cartas podem ser obtidas de um baralho de 52 cartas?

Solução:

- De 52 cartas diferentes, temos que escolher 5. A ordem não importa:

$$\textit{Resposta} = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!(52-5)!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot \cancel{47!}}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{47!}}$$

$$\binom{52}{5} = 52 \cdot 51 \cdot 5 \cdot 49 \cdot 4 = 52 \cdot 51 \cdot 980 = 2.598.960$$

Exercício 11.23:

- Quantas maneiras há de empilhar 3 laranjas (indistinguíveis) e 2 maçãs (indistinguíveis) dentro um vaso estreito de vidro?

Solução:

- Das 5 posições dentro do vaso estreito, temos que escolher 2 para as maçãs. As 3 posições restantes serão das laranjas.

$$\textit{Resposta} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{3!}} = \frac{20}{2} = 10$$

Exercício 11.23':

Quantas maneiras há de empilhar 5 frutas (laranjas ou maçãs indistinguíveis) dentro um vaso estreito de vidro?

(a) Se o número de maçãs é 0: $\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!5!} = 1$

(b) Se o número de maçãs é 1: $\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!4!} = 5$

(c) Se o número de maçãs é 2: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$

(d) Se o número de maçãs é 3: $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$

(e) Se o número de maçãs é 4: $\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!1!} = 5$

(f) Se o número de maçãs é 5: $\binom{5}{5} = \frac{5!}{5!0!} = 1$

(g) Total $= 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Exercício 11.24:

- Há 2^n sequências distintas de n bits (algarismos 0 e 1). Quantas dessas sequências tem exatamente k bits iguais a 1?

Solução:

- Das n posições na sequência, temos que escolher k para o bit 1. As $n-k$ posições restantes serão do bit 0.

$$Resposta = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exercício 11.24':

- Há 3^n sequências distintas de n letras A, B ou C. Quantas dessas sequências tem exatamente k letras iguais a A?

Solução:

- Das n posições na sequência, temos que escolher k para a letra A. As $n-k$ posições restantes serão das letras B e C: duas escolhas (B ou C) para cada posição. Pelo princípio multiplicativo:

$$Resposta \;=\; \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} \;=\; \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot 2^{n-k}$$

Exercício 11.24':

- Há 5^n sequências distintas de n letras A, B, C, D ou E. Quantas dessas sequências tem exatamente k letras iguais a A e ℓ letras iguais a B?

Solução:

- Das n posições na sequência, temos que escolher k para a letra A. Das $n-k$ posições restantes, temos que escolher ℓ para a letra B. As $n-k-\ell$ posições restantes serão das letras C, D e E: três escolhas (C, D ou E) para cada posição. Pelo princípio multiplicativo:

$$\textit{Resposta} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{\ell} \cdot 3^{n-k-\ell}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{\ell!(n-k-\ell)!} \cdot 3^{n-k-\ell} = \frac{n!\, 3^{n-k-\ell}}{k!\ell!(n-k-\ell)!}$$

Ex 11.10: 20 pessoas em 4 viagens, cada uma com 5 pessoas.

$$\binom{20}{5}\cdot\binom{15}{5}\cdot\binom{10}{5}\cdot\binom{5}{5} = \frac{20!}{5!\cancel{15!}}\cdot\frac{\cancel{15!}}{5!\cancel{10!}}\cdot\frac{\cancel{10!}}{5!\cancel{5!}}\cdot\frac{\cancel{5!}}{5!0!} = \frac{20!}{5!5!5!5!}$$

Faz uma permutação das 20 pessoas: as 5 primeiras vão na 1^o viagem e assim por diante. Dentro dessa permutação maior, qualquer permutação das posições 1 a 5, ou de 6 a 10, ou de 11 a 15, ou de 16 a 20, gerará a mesma configuração de viagem. Por isso, devemos dividir por 5! quatro vezes.

Propriedades do Binômio de Newton

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

(b) $\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)\cdot n!}{(k+1)!(n-k)!} =$

$$= \frac{(k+1 \; + \; n-k)\cdot n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ Identidade de Pascal ou Relação de Stifel

Propriedades do Binômio de Newton

(c) $(a+b)^n = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)$

Fazendo a distributividade, os termos desse produto serão da forma

$$a\cdot b\cdot b\cdot\ldots\cdot a \;=\; a^{n-k}\cdot b^k \quad \text{(onde } k \text{ é o número de } b\text{'s)}$$

$$(a+b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Capítulo 11 - Contagem - Combinatória

Exercício 11.28:

- Seja X um conjunto de n elementos. Usando a fórmula do exercício 11.27, prove que o número de subcojuntos de X de tamanho par é igual ao número de subconjuntos de tamanho ímpar.

Solução:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$ Tomando $a = 1$ e $b = -1$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)\cancel{(n-r)!}}{r!\cancel{(n-r)!}}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n}{r} \cdot \frac{n-1}{r-1} \cdot \frac{n-2}{r-2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-r+1}{1}$$

$$\binom{n}{r} = \prod_{k=1}^{r} \frac{n-k+1}{k}$$

É mais fácil calcular computacionalmente assim.
Em exercícios dessa disciplina, é melhor deixar em formato de binômio mesmo, amenos que os valores sejam pequenos e possam ser calculados à mão, usando a fórmula original:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Exercício 6 da Lista 3

Se enumerarmos todas as permutações dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 em ordem crescente, então:

(a) Que posição ocupa o número 42513?

(b) Qual número ocupa a posição 73?

Solução (a):

- Existem $4!$ permutações começando em 1.
- Existem $4!$ permutações começando em 2.
- Existem $4!$ permutações começando em 3.
- Existem $3!$ permutações começando em 41.
- Existem $2!$ permutações começando em 421.
- Existem $2!$ permutações começando em 423.
- Após todas essas, teremos a permutação 42513.
- Posição $= 1 \; + \; 3 \cdot 4! + 3! + 2 \cdot 2! \; = \; 83$

Exercício 6 da Lista 3

Se enumerarmos todas as permutações dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 em ordem crescente, então:

(a) Que posição ocupa o número 42513?

(b) Qual número ocupa a posição 73?

Solução (b):

- Existem $1 \cdot 4! = 24$ permutações começando em 1.
- Existem $2 \cdot 4! = 48$ permutações começando em 1 ou 2.
- Existem $3 \cdot 4! = 72$ permutações começando em 1, 2 ou 3.
- Posição 73: Permutação 41235.

Exercício 7 da Lista 3

Quantos são os subconjuntos de k elementos de $\{1, 2, \cdots, n\}$ nos quais:

(a) 1 aparece?

(b) 1 não aparece?

(c) 1 e 2 aparecem?

(d') 1 aparece e 2 não aparece?

(e') 1 e 2 não aparecem?

Solução:

(a) $\binom{n-1}{k-1}$

(b) $\binom{n-1}{k}$

(c) $\binom{n-2}{k-2}$

(d') $\binom{n-2}{k-1}$

(e') $\binom{n-2}{k}$

Exercício 8 da Lista 3

Considere todos os subconjuntos com 5 elementos de $\{1, 2, \cdots, 12\}$. Se ordenarmos todos esses subconjuntos por ordem crescente de índices, em quantos subconjuntos o elemento 8 aparece na posição 3 da sua ordenação?

Solução:

- 5 posições com o 8 aparecendo na posição 3.
- Nas posições 1 e 2, devemos ter números menores que 8.
- Nas posições 4 e 5, devemos ter números maiores que 8.
- Escolher 2 em $\{1, \ldots .7\}$ e escolher 2 em $\{9, \ldots, 12\}$.

$$\binom{7}{2} \cdot 1 \cdot \binom{4}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 7 \cdot 6 \cdot 3 = 126$$

Exercício 9(a) da Lista 3

- Quantas soluções inteiras existem para $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 50$ com $x_i \geq 0$?

Solução:

- É equivalente a $x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 = 54$ com $x'_i \geq 1$, fazendo $x'_i = x_i + 1$
- Dividir colocando 3 barras entre os 54 doces.

$$\binom{53}{3} = \binom{50+4-1}{4-1} = \binom{50+4-1}{50}$$

Fórmula geral: p variáveis naturais que somam n:

$$\binom{n+p-1}{p-1} = \binom{n+p-1}{n}$$

Exercício 9(a)' da Lista 3

- Quantas soluções inteiras existem para $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 50$ com $x_1 \geq -2, x_2 \geq -1, x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 1$ e $x_5 \geq 2$?

Solução:

- É equivalente a $x_1' + x_2' + x_3' + x_4' + x_5' = 55$ com $x_i' \geq 1$, fazendo $x_1' = x_1 + 3$, $x_2' = x_2 + 2$, $x_3' = x_3 + 1$, $x_4' = x_4$ e $x_5' = x_5 - 1$, pois.
- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 50 \implies$
- $\implies (x_1' - 3) + (x_2' - 2) + (x_3' - 1) + (x_4') + (x_5' + 1) = 50 \implies$
- $\implies x_1' + x_2' + x_3' + x_4' + x_5' = 55.$
- Dividir colocando 4 barras entre os 55 doces.

$$\binom{54}{4} = \binom{50+5-1}{5-1} = \binom{50+5-1}{50}$$

Fórmula geral: p variáveis naturais que somam n:

$$\binom{n+p-1}{p-1} = \binom{n+p-1}{n}$$

Exercício 11 da Lista 3

Determine o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{99} \qquad \text{e} \quad \text{de} \qquad \left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{100}$$

Solução:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(x^2 + x^{-3})^{99} = \sum_{k=0}^{99} \binom{99}{k} x^{2(99-k)} x^{-3k} = \sum_{k=0}^{99} \binom{99}{k} x^{2\cdot 99 - 5k}$$

$5k = 198 - 3 = 195 \ \Rightarrow \ k = 39$. **Coeficiente:** $\binom{99}{39} = \binom{99}{60}$

$$(x^2 + x^{-3})^{100} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} x^{2(100-k)} x^{-3k} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} x^{2\cdot 100 - 5k}$$

$5k = 200 - 3 = 197 \implies k = 197/3$. **Coeficiente:** 0 (não existe x^3).

Seção 11.7 - Permutações e Arranjos Circulares

Exercício 11.32 (a)

$$\mathit{Resposta}_1 = \binom{10}{5} \cdot \frac{5!}{5} = \frac{10!}{5!\cancel{5!}} \cdot \frac{\cancel{5!}}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 5} = 6048$$

$$\mathit{Resposta}_2 = \frac{10!}{5!} \cdot \frac{1}{5} = 6048$$

$$\mathit{Resposta}_3 = \left(10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6\right) \cdot \frac{1}{5} = 6048$$

Exercício 11.32 (b)

$$\mathit{Resposta}_1 = \binom{10}{5} \cdot \frac{5!}{5} \cdot \frac{5!}{5} = \frac{10!}{\cancel{5!}\cancel{5!}} \cdot \frac{\cancel{5!}}{5} \cdot \frac{\cancel{5!}}{5} = \frac{10!}{25} = 145152$$

$$\mathit{Resposta}_2 = \left(10!\right) \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = 145152 = 6048 \cdot 4!$$

Seção 11.10 - Combinações múltiplas

Exercício 11.35

Quantas maneiras existem de distribuir 5 cartas para cada um de 4 jogadores, de um baralho de 52 cartas?

Solução

$$\begin{aligned} \mathit{Resposta}_1 &= \binom{52}{5}\cdot\binom{47}{5}\cdot\binom{42}{5}\cdot\binom{37}{5} = \frac{52!}{5!\cancel{47!}}\cdot\frac{\cancel{47!}}{5!\cancel{42!}}\cdot\frac{\cancel{42!}}{5!\cancel{37!}}\cdot\frac{\cancel{37!}}{5!32!} \\ &= \frac{52!}{5!5!5!5!32!} \\ \mathit{Resposta}_2 &= \binom{52}{5,5,5,5,32} = \frac{52!}{5!5!5!5!32!} \end{aligned}$$

Seção 11.10 - Combinações múltiplas

Exercício 11.36

Quantas maneiras distintas existem de pintar 20 casas com as cores vermelha, azul, verde e amarela (cada casa de uma só cor), sendo que deve haver o mesmo número (5) de casas de cada cor?

Solução

$$
\begin{aligned}
Resposta_1 &= \binom{20}{5}\cdot\binom{15}{5}\cdot\binom{10}{5}\cdot\binom{5}{5} = \frac{20!}{5!\cancel{15!}}\cdot\frac{\cancel{15!}}{5!\cancel{10!}}\cdot\frac{\cancel{10!}}{5!\cancel{5!}}\cdot\frac{\cancel{5!}}{5!0!} \\
&= \frac{20!}{5!5!5!5!} \\
Resposta_2 &= \binom{20}{5,5,5,5} = \frac{20!}{5!5!5!5!}
\end{aligned}
$$

Seção 11.10 - Combinações múltiplas

Exercício 11.38

Quantas maneiras há de dividir 16 alunos em 3 grupos de estudo, para Física, Química e Matemática; sendo que deve haver 6 alunos em cada um dos dois primeiros grupos, e 4 no último?

Solução

$$\begin{aligned} Resposta_1 &= \binom{16}{6} \cdot \binom{10}{6} \cdot \binom{4}{4} = \frac{16!}{6!\cancel{10!}} \cdot \frac{\cancel{10!}}{6!4!} = \frac{16!}{6!6!4!} \\ Resposta_2 &= \binom{16}{6,6,4} = \frac{16!}{6!6!4!} \end{aligned}$$

Seção 11.9 - Permutações com alguns elementos iguais

Exemplo: Anagramas

Quantos anagramas existem da palavra BANANAS?

Solução

$$
\begin{aligned}
Resposta_1 &= \frac{7!}{3!2!} \\
Resposta_2 &= \binom{7}{1} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = \frac{7!}{1!\cancel{6!}} \cdot \frac{\cancel{6!}}{3!\cancel{3!}} \cdot \frac{\cancel{3!}}{2!\cancel{1!}} \cdot \frac{\cancel{1!}}{1!0!} \\
&= \frac{7!}{1!3!2!1!} \\
Resposta_3 &= \binom{7}{1,3,2,1} = \frac{7!}{1!3!2!1!}
\end{aligned}
$$

Seção 11.9 - Permutações com alguns elementos iguais

Exemplo: Anagramas

Quantos anagramas existem da palavra PARALELEPIPEDO?

Solução

(P,E,A,L,R,I,D,O)=(3,3,2,2,1,1,1,1). Total: 14 letras.

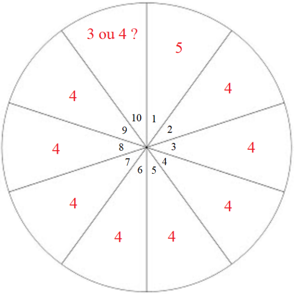
$$
\begin{aligned}
Resposta_1 &= \frac{14!}{3!3!2!2!} \\
Resposta_2 &= \binom{14}{3}\cdot\binom{11}{3}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot 4! = \frac{14!}{3!\cancel{11!}}\cdot\frac{\cancel{11!}}{3!\cancel{8!}}\cdot\frac{\cancel{8!}}{2!\cancel{6!}}\cdot\frac{\cancel{6!}}{2!\cancel{4!}}\cdot\cancel{4!} \\
&= \frac{14!}{3!3!2!2!} \\
Resposta_3 &= \binom{14}{3,3,2,2,1,1,1,1} = \frac{14!}{3!3!2!2!}
\end{aligned}
$$

Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

Exercício 11.41: Uma roleta tem 10 setores numerados. Deve-se pintar cada setor com uma cor diferente das de seus dois vizinhos. Há 5 cores disponíveis. De quantas maneiras podemos pintar essa roleta?

Solução:

1^o **tentativa:** Escolhe uma das 5 cores para o setor 1, depois uma das 4 cores para o setor 2, 4 cores para o setor 3, ... e 4 cores para o setor 9. Falta escolher as cores do setor 10. Até aí temos $5 \cdot 4^{n-2}$ possibilidades. Para o setor 10, temos 3 ou 4 possibilidades, dependendo se a cor do setor 9 é diferente ou igual a do setor 1. *Não parece ser fácil por aí...*



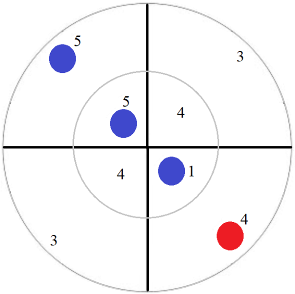
Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

Exercício 11.41: Uma roleta tem 10 setores numerados. Deve-se pintar cada setor com uma cor diferente das de seus dois vizinhos. Há 5 cores disponíveis. De quantas maneiras podemos pintar essa roleta?

Solução:

2^o **tentativa:** Recorrência. Seja a_n o número de modos de pintar uma roleta com n setores. Queremos calcular a_{10}.

$\mathbf{a_2} = 5 \cdot 4 = 20, \quad \mathbf{a_3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60, \quad \mathbf{a_4} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \; + \; 5 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 4 \; = \; 260$



Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

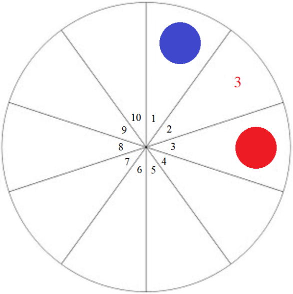
Exercício 11.41: Uma roleta tem 10 setores numerados. Deve-se pintar cada setor com uma cor diferente das de seus dois vizinhos. Há 5 cores disponíveis. De quantas maneiras podemos pintar essa roleta?

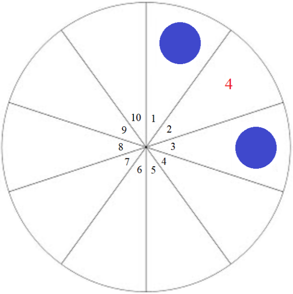
Solução:

2^o **tentativa:** Recorrência. Seja a_n o número de modos de pintar uma roleta com n setores. Queremos calcular a_{10}.

$\mathbf{a_2} = 20$, $\mathbf{a_3} = 60$, $\mathbf{a_4} = 260$

$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$, para $n \geq 5$





Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

Exercício 11.41: Uma roleta tem 10 setores numerados. Deve-se pintar cada setor com uma cor diferente das de seus dois vizinhos. Há 5 cores disponíveis. De quantas maneiras podemos pintar essa roleta?

Solução:

2^o **tentativa:** Recorrência. Seja a_n o número de modos de pintar uma roleta com n setores. Queremos calcular a_{10}.

$\mathbf{a_2} = 20$, $\mathbf{a_3} = 60$, $\mathbf{a_4} = 260$

$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$, para $n \geq 5$

Recorrência de 2^o-ordem: eq. caract. $\mathbf{x^2 - 3x - 4 = 0}$

Raízes $\mathbf{r_1 = 4}$ e $\mathbf{r_2 = -1} \implies a_n = c_1 \cdot 4^n + c_2 \cdot (-1)^n$

Podemos calcular facilmente $c_1 = 1$ e $c_2 = 4$ com os valores de a_2 e a_3.

$\mathbf{a_n = 4^n + 4 \cdot (-1)^n}$, para $n \geq 2$.

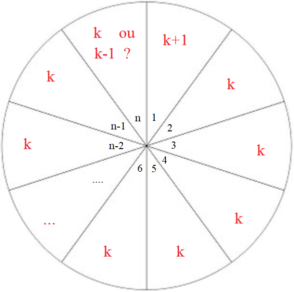
$\mathbf{a_{10}} = 4^{10} + 4 \cdot (-1)^{10} = (1024)^2 + 4 = \mathbf{1.048.580}$

Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

Exercício 11.41": Uma roleta tem n setores numerados. Deve-se pintar cada setor com uma cor diferente das de seus dois vizinhos. Há $k+1$ cores disponíveis. De quantas maneiras podemos pintar essa roleta?

Solução:

1^o **tentativa:** Escolhe uma das $k+1$ cores para o setor 1, depois uma das k cores para o setor 2, ... e k cores para o setor $n-1$.
Faltam as cores do setor n. Até aí temos $(k+1) \cdot k^{n-2}$ possibilidades.
Para o setor n, temos $k-1$ ou k possibilidades, dependendo se a cor do setor $n-1$ é diferente ou igual a do setor 1. *Não parece ser fácil por aí...*



Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

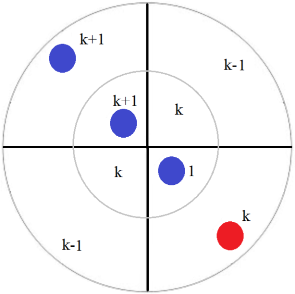
Exercício 11.41": Uma roleta tem n setores numerados. Deve-se pintar cada setor com uma cor diferente das de seus dois vizinhos. Há $k+1$ cores disponíveis. De quantas maneiras podemos pintar essa roleta?

Solução:

2^o **tentativa:** Recorrência. Seja a_n o número de modos de pintar uma roleta com n setores usando $k+1$ cores.

$\mathbf{a_2} = (k+1)\cdot k = \mathbf{k^2+k}$, $\mathbf{a_3} = (k+1)\cdot k\cdot(k-1) = \mathbf{k^3-k}$

$\mathbf{a_4} = (k+1)\cdot k\cdot(k-1)^2 + (k+1)\cdot 1\cdot k^2 = \mathbf{k^4+k}$



Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

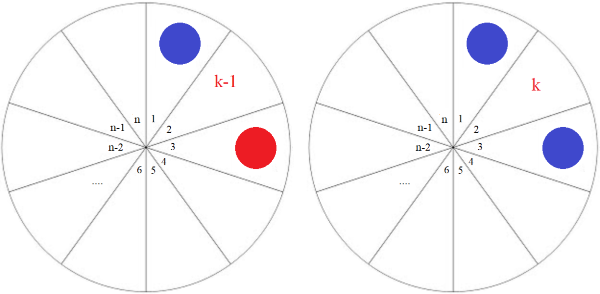
Exercício 11.41": Uma roleta tem n setores numerados. Deve-se pintar cada setor com uma cor diferente das de seus dois vizinhos. Há $k+1$ cores disponíveis. De quantas maneiras podemos pintar essa roleta?

Solução:

2^o **tentativa:** Recorrência. Seja a_n o número de modos de pintar uma roleta com n setores usando $k+1$ cores.

$\mathbf{a_2 = k^2 + k}$, $\mathbf{a_3 = k^3 - k}$, $\mathbf{a_4 = k^4 + k}$

$a_n = (k-1) \cdot a_{n-1} + k \cdot a_{n-2}$, para $n \geq 5$



Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

Exercício 11.41": Uma roleta tem n setores numerados. Deve-se pintar cada setor com uma cor diferente das de seus dois vizinhos. Há $k+1$ cores disponíveis. De quantas maneiras podemos pintar essa roleta?

Solução:

2^o **tentativa:** Recorrência. Seja a_n o número de modos de pintar uma roleta com n setores usando $k+1$ cores.

$\mathbf{a_2 = k^2 + k}$, $\quad \mathbf{a_3 = k^3 - k}$, $\quad \mathbf{a_4 = k^4 + k}$

$a_n \;=\; (k-1)\cdot a_{n-1} + k\cdot a_{n-2}$, para $n \geq 5$

Recorrência de 2^o-ordem: eq. caract. $\mathbf{x^2 - (k-1)x - k = 0}$

Raízes $\mathbf{r_1 = k}$ e $\mathbf{r_2 = -1} \quad \Longrightarrow \quad a_n \;=\; c_1 \cdot k^n + c_2 \cdot (-1)^n$

Podemos calcular facilmente $c_1 = 1$ e $c_2 = k$ com os valores de a_2 e a_3.

$\mathbf{a_n \;=\; k^n \;+\; k\cdot(-1)^n}$, $\quad$ para $n \geq 2$.

Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

Exercício 10(b) - Lista 3:
$\binom{p+n+1}{p+1} = \sum_{r=0}^{n} \binom{p+r}{p} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \ldots + \binom{p+n-1}{p} + \binom{p+n}{p}$

Resolução: equação $x_1 + x_2 + \ldots + x_{p+1} + x_{p+2} = n$

Número de soluções naturais: $\binom{n+(p+2)-1}{(p+2)-1} = \binom{\mathbf{p+n+1}}{\mathbf{p+1}}$

Resolução alternativa:

Caso 0: $x_{p+2} = 0 \implies$ **n^o soluções:** $\binom{(n-0)+(p+1)-1}{(p+1)-1} = \binom{p+n}{p}$

Caso 1: $x_{p+2} = 1 \implies$ **n^o soluções:** $\binom{(n-1)+(p+1)-1}{(p+1)-1} = \binom{p+n-1}{p}$

Caso 2: $x_{p+2} = 2 \implies$ **n^o soluções:** $\binom{(n-2)+(p+1)-1}{(p+1)-1} = \binom{p+n-2}{p}$

Caso 3: $x_{p+2} = 3 \implies$ **n^o soluções:** $\binom{(n-3)+(p+1)-1}{(p+1)-1} = \binom{p+n-3}{p}$

...

...

Caso n: $x_{p+2} = n \implies$ **n^o soluções:** $\binom{(n-n)+(p+1)-1}{(p+1)-1} = \binom{p}{p}$

Pelo princípio aditivo da contagem, temos por **dupla contagem**:
$\binom{p+n+1}{p+1} = \sum_{r=0}^{n} \binom{p+r}{p} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \ldots + \binom{p+n-1}{p} + \binom{p+n}{p}$

Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

Exercício 10(b) - Lista 3:

$$\binom{p+n+1}{p+1} = \sum_{r=0}^{n} \binom{p+r}{p} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \ldots + \binom{p+n-1}{p} + \binom{p+n}{p}$$

Exercício 10(a) - Lista 3:

$$\binom{n+p+1}{p} = \sum_{r=0}^{p} \binom{n+r}{r} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+p-1}{p-1} + \binom{n+p}{p}$$

Resolução:

$$\sum_{r=0}^{p} \binom{n+r}{r} = \sum_{r=0}^{p} \binom{n+r}{n} \overset{(b)}{=} \binom{n+p+1}{n+1} = \binom{n+p+1}{p}$$

Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

Exercício 10(c) - Lista 3: $\binom{n+2}{p+2} = \binom{n}{p} + 2 \cdot \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p+2}$

Resolução:

Em um grupo de n homens e 2 mulheres, selecionar $p+2$ pessoas.
Total: $\binom{n+2}{p+2}$

Resolução alternativa:
Caso 2: Tem 2 mulheres: $\binom{n}{p}$
Caso 1: Tem 1 mulher: $2 \cdot \binom{n}{p+1}$
Caso 0: Tem 0 mulheres: $\binom{n}{p+2}$

Pelo princípio aditivo da contagem, temos por **dupla contagem**:
$\binom{n+2}{p+2} = \binom{n}{p} + 2 \cdot \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p+2}$

Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

Exercício 10(d) - Lista 3: $\binom{n+3}{p+3} = \binom{n}{p} + 3 \cdot \binom{n}{p+1} + 3 \cdot \binom{n}{p+2} + \binom{n}{p+3}$

Resolução:

Em um grupo de n homens e 3 mulheres, selecionar $p+3$ pessoas.
Total: $\binom{n+3}{p+3}$

Resolução alternativa:

Caso 3: Tem 3 mulheres: $\binom{n}{p}$

Caso 2: Tem 2 mulheres: $3 \cdot \binom{n}{p+1}$

Caso 1: Tem 1 mulher: $3 \cdot \binom{n}{p+2}$

Caso 0: Tem 0 mulheres: $\binom{n}{p+3}$

Pelo princípio aditivo da contagem, temos por **dupla contagem**:
$\binom{n+3}{p+3} = \binom{n}{p} + 3 \cdot \binom{n}{p+1} + 3 \cdot \binom{n}{p+2} + \binom{n}{p+3}$

Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

Exercício 10(e) - Lista 3:
$\binom{n+4}{p+4} = \binom{n}{p} + 4 \cdot \binom{n}{p+1} + 6 \cdot \binom{n}{p+2} + 4 \cdot \binom{n}{p+3} + \binom{n}{p+4}$

Resolução:

Em um grupo de n homens e 4 mulheres, selecionar $p+4$ pessoas.
Total: $\binom{n+4}{p+4}$

Resolução alternativa:

Caso 4: Tem 4 mulheres: $\binom{n}{p}$

Caso 3: Tem 3 mulheres: $4 \cdot \binom{n}{p+1}$

Caso 2: Tem 2 mulheres: $6 \cdot \binom{n}{p+2}$

Caso 1: Tem 1 mulher: $4 \cdot \binom{n}{p+3}$

Caso 0: Tem 0 mulheres: $\binom{n}{p+4}$

Pelo princípio aditivo da contagem, temos por **dupla contagem**:
$\binom{n+4}{p+4} = \binom{n}{p} + 4 \cdot \binom{n}{p+1} + 6 \cdot \binom{n}{p+2} + 4 \cdot \binom{n}{p+3} + \binom{n}{p+4}$

Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

Exercício 10(f) - Lista 3: $\binom{n+k}{p+k} = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \cdot \binom{n}{p+r}$

Resolução:

Em um grupo de n homens e k mulheres, selecionar $p+k$ pessoas.
Total: $\binom{n+k}{p+k}$

Resolução alternativa:

Caso 0: Tem $k-0$ mulheres: $\binom{n}{p}$

Caso 1: Tem $k-1$ mulheres: $k \cdot \binom{n}{p+1}$

....

Caso r: Tem $k-r$ mulheres: $\binom{k}{k-r} \cdot \binom{n}{p+r} = \binom{k}{r} \cdot \binom{n}{p+r}$

....

Caso $k-2$: Tem 2 mulheres: $\binom{k}{2} \cdot \binom{n}{p+k-2} = \binom{k}{k-2} \cdot \binom{n}{p+k-2}$

Caso $k-1$: Tem 1 mulher: $k \cdot \binom{n}{p+k-1} = \binom{k}{k-1} \cdot \binom{n}{p+k-1}$

Caso $k-0$: Tem 0 mulheres: $\binom{n}{p+k}$

Pelo princípio aditivo da contagem, temos por **dupla contagem**:
$\binom{n+k}{p+k} = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \cdot \binom{n}{p+r}$

Questão 10 Lista 3 (soluções alternativas)

Exercício 10(a) - Lista 3:

$$\binom{n+p+1}{p} = \sum_{r=0}^{p} \binom{n+r}{r} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+p-1}{p-1} + \binom{n+p}{p}$$

Resolução: Relação de Stifel ou Identidade de Pascal

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \ldots + \binom{n+p}{p} =$$
$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \ldots + \binom{n+p}{p} =$$
$$\binom{n+2}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \binom{n+4}{4} + \ldots + \binom{n+p}{p} =$$
$$\binom{n+3}{2} + \binom{n+3}{3} + \binom{n+4}{4} + \binom{n+5}{5} + \ldots + \binom{n+p}{p} =$$
$$\binom{n+4}{3} + \binom{n+4}{4} + \binom{n+5}{5} + \binom{n+6}{6} + \ldots + \binom{n+p}{p} =$$
$$\binom{n+5}{4} + \binom{n+5}{5} + \binom{n+6}{6} + \binom{n+7}{7} + \ldots + \binom{n+p}{p} =$$

....

$$\binom{n+p-2}{p-3} + \binom{n+p-2}{p-2} + \binom{n+p-1}{p-1} + \binom{n+p}{p} =$$
$$\binom{n+p-1}{p-2} + \binom{n+p-1}{p-1} + \binom{n+p}{p} =$$
$$\binom{n+p}{p-1} + \binom{n+p}{p} =$$
$$\binom{\mathbf{n+p+1}}{\mathbf{p}}$$

Questão 10 Lista 3 (soluções alternativas)

Exercício 10(b) - Lista 3:

$$\binom{p+n+1}{p+1} = \sum_{r=0}^{n} \binom{p+r}{p} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \ldots + \binom{p+n-1}{p} + \binom{p+n}{p}$$

Resolução: Relação de Stifel ou Identidade de Pascal

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \binom{p+3}{p} + \ldots + \binom{p+n}{p} =$$
$$\binom{p+1}{0} + \binom{p+1}{1} + \binom{p+2}{2} + \binom{p+3}{3} + \ldots + \binom{p+n}{n} =$$
$$\binom{p+2}{1} + \binom{p+2}{2} + \binom{p+3}{3} + \binom{p+4}{4} + \ldots + \binom{p+n}{n} =$$
$$\binom{p+3}{2} + \binom{p+3}{3} + \binom{p+4}{4} + \binom{p+5}{5} + \ldots + \binom{p+n}{n} =$$
$$\binom{p+4}{3} + \binom{p+4}{4} + \binom{p+5}{5} + \binom{p+6}{6} + \ldots + \binom{p+n}{n} =$$
$$\binom{p+5}{4} + \binom{p+5}{5} + \binom{p+6}{6} + \binom{p+7}{7} + \ldots + \binom{p+n}{n} =$$

....

$$\binom{p+n-2}{n-3} + \binom{p+n-2}{n-2} + \binom{p+n-1}{n-1} + \binom{p+n}{n} =$$
$$\binom{p+n-1}{n-2} + \binom{p+n-1}{n-1} + \binom{p+n}{n} =$$
$$\binom{p+n}{n-1} + \binom{p+n}{n} =$$
$$\boldsymbol{\binom{p+n+1}{n}}$$

Questão 10 Lista 3 (soluções alternativas)

Exercício 10(c) - Lista 3: $\binom{n+2}{p+2} = \binom{n}{p} + 2\binom{n}{p+1} + \binom{n}{p+2}$

Resolução: Relação de Stifel ou Identidade de Pascal

$$\binom{n}{p} \quad + \quad 2\binom{n}{p+1} \quad + \quad \binom{n}{p+2} =$$
$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} \quad + \quad \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p+2} =$$
$$\binom{n+1}{p+1} \quad + \quad \binom{n+1}{p+2} =$$

$$\binom{\mathbf{n+2}}{\mathbf{p+2}}$$

Questão 10 Lista 3 (soluções alternativas)

Exercício 10(d) - Lista 3: $\binom{n+3}{p+3} = \binom{n}{p} + 3\binom{n}{p+1} + 3\binom{n}{p+2} + \binom{n}{p+3}$

Resolução: Relação de Stifel ou Identidade de Pascal

$$\binom{n}{p} + 3\binom{n}{p+1} + 3\binom{n}{p+2} + \binom{n}{p+3} =$$

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} + 2\binom{n}{p+1} + 2\binom{n}{p+2} + \binom{n}{p+2} + \binom{n}{p+3} =$$

$$\binom{n+1}{p+1} + 2\binom{n+1}{p+2} + \binom{n+1}{p+3} \overset{(c)}{=}$$

$$\boldsymbol{\binom{n+3}{p+3}}$$

Questão 10 Lista 3 (soluções alternativas)

Exercício 10(e) - Lista 3:
$\binom{n+4}{p+4} = \binom{n}{p} + 4 \cdot \binom{n}{p+1} + 6 \cdot \binom{n}{p+2} + 4 \cdot \binom{n}{p+3} + \binom{n}{p+4}$

Resolução: Relação de Stifel ou Identidade de Pascal

$$\binom{n}{p} + 4\binom{n}{p+1} + 6\binom{n}{p+2} + 4\binom{n}{p+3} + \binom{n}{p+4} =$$
$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1} + 3\binom{n}{p+1}+3\binom{n}{p+2} + 3\binom{n}{p+2}+3\binom{n}{p+3} + \binom{n}{p+3}+\binom{n}{p+4} =$$
$$\binom{n+1}{p+1} + 3\binom{n+1}{p+2} + 3\binom{n+1}{p+3} + \binom{n+1}{p+4} \overset{(d)}{=}$$

$$\boldsymbol{\binom{n+4}{p+4}}$$

Exercício 10(f) - Lista 3: $\binom{n+k}{p+k} = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \cdot \binom{n}{p+r}$
É possível provar por indução em k usando esse mesmo esquema.

Seção 11.12 - Princípio Subtrativo da Contagem

Exercício 11.43: Quantas mãos de 4 cartas podem ser tiradas de um baralho comum (de 52 cartas) nas quais aparecem pelo menos dois ases?

Solução pelo Princípio Subtrativo: Tudo menos 0 ou 1 Ás

Total $= \binom{52}{4}$

Complemento (no máximo 1 Ás): $\binom{48}{4} + 4 \cdot \binom{48}{3}$

Resultado $= \binom{52}{4} - \binom{48}{4} - 4 \cdot \binom{48}{3} = \frac{52!}{4!48!} - \frac{48!}{4!44!} - 4 \cdot \frac{48!}{3!45!}$

$$= \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - 4 \cdot \frac{48 \cdot 47 \cdot 46}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{6961}$$

Solução pelo Princípio Aditivo: 4 Ases + 3 Ases + 2 Ases

Resultado =

$$\binom{4}{4}\binom{48}{0} + \binom{4}{3} \cdot \binom{48}{1} + \binom{4}{2}\binom{48}{2} = 1 + 4 \cdot 48 + 6 \cdot \frac{48 \cdot 47}{2} = \mathbf{6961}$$

Capítulo 11.13
INCLUSÃO E EXCLUSÃO

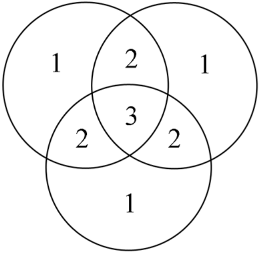
Seção 11.13 - Princípio da Inclusão e Exclusão

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C} \cup \mathbf{D}| \ = \ & |A| + |B| + |C| + |D| \ - \\
& -|A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| \ + \\
& +|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| \ - \\
& -|A \cap B \cap C \cap D|
\end{aligned}
$$

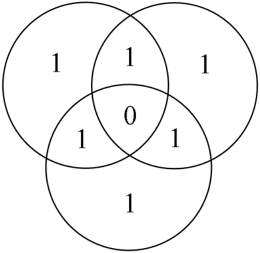
$$
|\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C} \cup \mathbf{D} \cup \mathbf{E}| \ = \ |A| + |B| + |C| + |D| + |E| \ -
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{-}|\mathrm{A}\cap\mathrm{B}|\text{-}|\mathrm{A}\cap\mathrm{C}|\text{-}|\mathrm{A}\cap\mathrm{D}|\text{-}|\mathrm{A}\cap\mathrm{E}|\text{-}|\mathrm{B}\cap\mathrm{C}|\text{-}|\mathrm{B}\cap\mathrm{D}|\text{-}|\mathrm{B}\cap\mathrm{E}|\text{-}|\mathrm{C}\cap\mathrm{D}|\text{-}|\mathrm{C}\cap\mathrm{E}|\text{-}|\mathrm{D}\cap\mathrm{E}| \ + \\
&+|\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C}|+|\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{D}|+|\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{E}|+|\mathrm{A}\cap\mathrm{C}\cap\mathrm{D}|+|\mathrm{A}\cap\mathrm{C}\cap\mathrm{E}|+ \\
&+|\mathrm{A}\cap\mathrm{D}\cap\mathrm{E}|+|\mathrm{B}\cap\mathrm{C}\cap\mathrm{D}|+|\mathrm{B}\cap\mathrm{C}\cap\mathrm{E}|+|\mathrm{B}\cap\mathrm{D}\cap\mathrm{E}|+|\mathrm{C}\cap\mathrm{D}\cap\mathrm{E}| \ - \\
&\text{-}|\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C}\cap\mathrm{D}|\text{-}|\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C}\cap\mathrm{E}|\text{-}|\mathrm{A}\cap\mathrm{C}\cap\mathrm{D}\cap\mathrm{E}|\text{-}|\mathrm{B}\cap\mathrm{C}\cap\mathrm{D}\cap\mathrm{E}| \\
&+|A \cap B \cap C \cap D \cap E|
\end{aligned}
$$

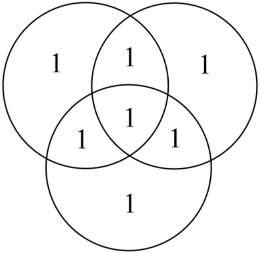
Seção 11.13 - Princípio da Inclusão e Exclusão



$|A| + |B| + |C|$

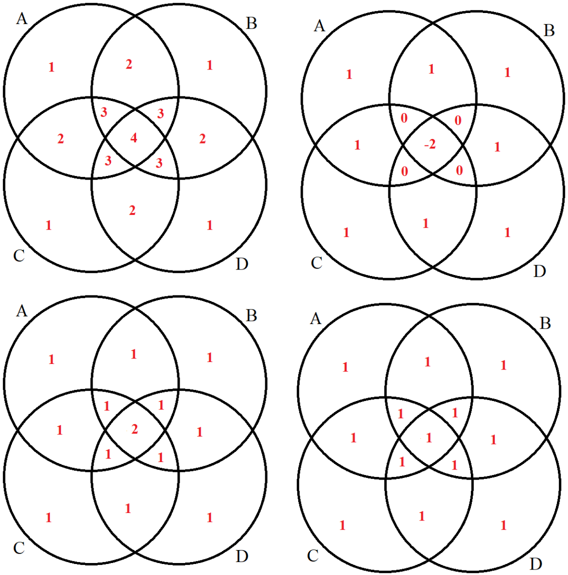


$|A| + |B| + |C|$
$-(|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|)$



$|A| + |B| + |C|$
$-(|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|)$
$+|A \cap B \cap C|$

Seção 11.13 - Princípio da Inclusão e Exclusão



Seção 11.13 - Princípio da Inclusão e Exclusão

Exercício: Quantos números entre 1 e 60 não são divisíveis por 2, 3 ou 5?

Solução pelo Princípio da Inclusão e Exclusão

A_k: conjunto dos múltiplos de k de 1 a 60 $\Longrightarrow$ $|A_k| = \left\lfloor \frac{60}{k} \right\rfloor$.

$|A_2| = \left\lfloor \frac{60}{2} \right\rfloor = 30$ $\qquad$ $|A_3| = \left\lfloor \frac{60}{3} \right\rfloor = 20$

$|A_5| = \left\lfloor \frac{60}{5} \right\rfloor = 12$

$|A_2 \cap A_3| = |A_{2.3}| = \left\lfloor \frac{60}{6} \right\rfloor = 10$

$|A_2 \cap A_5| = |A_{2.5}| = \left\lfloor \frac{60}{10} \right\rfloor = 6$

$|A_3 \cap A_5| = |A_{3.5}| = \left\lfloor \frac{60}{15} \right\rfloor = 4$

$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = |A_{2.3.5}| = \left\lfloor \frac{60}{30} \right\rfloor = 2$

Pelo Princípio da Inclusão e Exclusão, temos que:

$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 30 + 20 + 12 - 10 - 6 - 4 + 2 = \mathbf{44}$

Resultado final = 60 - 44 = **16** (Princípio Subtrativo)

1,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,**49**,53,59

Seção 11.13 - Princípio da Inclusão e Exclusão

Exercício: Quantos números entre 1 e 1001 não são divisíveis por 7, 11 ou 13?

Solução pelo Princípio da Inclusão e Exclusão

A_k: conjunto dos múltiplos de k de 1 a 1001 $\Longrightarrow\ |A_k| = \left\lfloor \frac{1001}{k} \right\rfloor$.

$|A_7| = \left\lfloor \frac{1001}{7} \right\rfloor = 143$ $\qquad |A_{11}| = \left\lfloor \frac{1001}{11} \right\rfloor = 91$

$|A_{13}| = \left\lfloor \frac{1001}{13} \right\rfloor = 77$

$|A_7 \cap A_{11}| = |A_{7\cdot 11}| = \left\lfloor \frac{1001}{77} \right\rfloor = 13$

$|A_7 \cap A_{13}| = |A_{7\cdot 13}| = \left\lfloor \frac{1001}{91} \right\rfloor = 11$

$|A_{11} \cap A_{13}| = |A_{11\cdot 13}| = \left\lfloor \frac{1001}{143} \right\rfloor = 7$

$|A_7 \cap A_{11} \cap A_{13}| = |A_{7\cdot 11\cdot 13}| = \left\lfloor \frac{1001}{1001} \right\rfloor = 1$

Pelo Princípio da Inclusão e Exclusão, temos que:

$|A_7 \cup A_{11} \cup A_{13}| = 143 + 91 + 77 - 13 - 11 - 7 + 1 = \mathbf{281}$

Resultado final = 1001 - 281 = **720** (Princípio Subtrativo)

Seção 11.13 - Princípio da Inclusão e Exclusão

Ex. 02 da Lista 3: Quantos números entre 1 e 350.000 não são divisíveis por 7, 11, 13, 17 ou 19?

Solução pelo Princípio da Inclusão e Exclusão

A_k: conjunto dos múltiplos de k de 1 a 350.000 $\Longrightarrow$ $|A_k| = \left\lfloor \frac{350.000}{k} \right\rfloor$.

$$|A_7| = \left\lfloor \frac{350.000}{7} \right\rfloor = 50000 \qquad |A_{11}| = \left\lfloor \frac{350.000}{11} \right\rfloor = 31818$$
$$|A_{13}| = \left\lfloor \frac{350.000}{13} \right\rfloor = 26923 \qquad |A_{17}| = \left\lfloor \frac{350.000}{17} \right\rfloor = 20588$$
$$|A_{19}| = \left\lfloor \frac{350.000}{19} \right\rfloor = 18421$$

$$\begin{aligned}
|A_7 \cap A_{11}| &= |A_{7\cdot 11}| = \left\lfloor \frac{350.000}{7\cdot 11} \right\rfloor = 4545\\
|A_7 \cap A_{13}| &= |A_{7\cdot 13}| = \left\lfloor \frac{350.000}{7\cdot 13} \right\rfloor = 3846\\
|A_7 \cap A_{17}| &= |A_{7\cdot 17}| = \left\lfloor \frac{350.000}{7\cdot 17} \right\rfloor = 2941\\
|A_7 \cap A_{19}| &= |A_{7\cdot 19}| = \left\lfloor \frac{350.000}{7\cdot 19} \right\rfloor = 2631\\
|A_{11} \cap A_{13}| &= |A_{11\cdot 13}| = \left\lfloor \frac{350.000}{11\cdot 13} \right\rfloor = 2447\\
|A_{11} \cap A_{17}| &= |A_{11\cdot 17}| = \left\lfloor \frac{350.000}{11\cdot 17} \right\rfloor = 1871\\
|A_{11} \cap A_{19}| &= |A_{11\cdot 19}| = \left\lfloor \frac{350.000}{11\cdot 19} \right\rfloor = 1674\\
|A_{13} \cap A_{17}| &= |A_{13\cdot 17}| = \left\lfloor \frac{350.000}{13\cdot 17} \right\rfloor = 1583\\
|A_{13} \cap A_{19}| &= |A_{13\cdot 19}| = \left\lfloor \frac{350.000}{13\cdot 19} \right\rfloor = 1417\\
|A_{17} \cap A_{19}| &= |A_{17\cdot 19}| = \left\lfloor \frac{350.000}{17\cdot 19} \right\rfloor = 1083
\end{aligned}$$

Seção 11.13 - Princípio da Inclusão e Exclusão

Ex. 02 da Lista 3: Quantos números entre 1 e 350.000 não são divisíveis por 7, 11, 13, 17 ou 19?

Solução pelo Princípio da Inclusão e Exclusão

A_k: conjunto dos múltiplos de k de 1 a 350.000 $\Longrightarrow$ $|A_k| = \left\lfloor \frac{350.000}{k} \right\rfloor$.

$$
\begin{aligned}
|A_7 \cap A_{11} \cap A_{13}| &= |A_{7\cdot 11\cdot 13}| = \left\lfloor \frac{350.000}{7\cdot 11\cdot 13} \right\rfloor = 349 \\
|A_7 \cap A_{11} \cap A_{17}| &= |A_{7\cdot 11\cdot 17}| = \left\lfloor \frac{350.000}{7\cdot 11\cdot 17} \right\rfloor = 267 \\
|A_7 \cap A_{11} \cap A_{19}| &= |A_{7\cdot 11\cdot 19}| = \left\lfloor \frac{350.000}{7\cdot 11\cdot 19} \right\rfloor = 239 \\
|A_7 \cap A_{13} \cap A_{17}| &= |A_{7\cdot 13\cdot 17}| = \left\lfloor \frac{350.000}{7\cdot 13\cdot 17} \right\rfloor = 226 \\
|A_7 \cap A_{13} \cap A_{19}| &= |A_{7\cdot 13\cdot 19}| = \left\lfloor \frac{350.000}{7\cdot 13\cdot 19} \right\rfloor = 202 \\
|A_7 \cap A_{17} \cap A_{19}| &= |A_{7\cdot 17\cdot 19}| = \left\lfloor \frac{350.000}{7\cdot 17\cdot 19} \right\rfloor = 154 \\
|A_{11} \cap A_{13} \cap A_{17}| &= |A_{11\cdot 13\cdot 17}| = \left\lfloor \frac{350.000}{11\cdot 13\cdot 17} \right\rfloor = 143 \\
|A_{11} \cap A_{13} \cap A_{19}| &= |A_{11\cdot 13\cdot 19}| = \left\lfloor \frac{350.000}{11\cdot 13\cdot 19} \right\rfloor = 128 \\
|A_{11} \cap A_{17} \cap A_{19}| &= |A_{11\cdot 17\cdot 19}| = \left\lfloor \frac{350.000}{11\cdot 17\cdot 19} \right\rfloor = 98 \\
|A_{13} \cap A_{17} \cap A_{19}| &= |A_{13\cdot 17\cdot 19}| = \left\lfloor \frac{350.000}{13\cdot 17\cdot 19} \right\rfloor = 83
\end{aligned}
$$

Ex. 02 da Lista 3: Quantos números entre 1 e 350.000 não são divisíveis por 7, 11, 13, 17 ou 19?

Solução pelo Princípio da Inclusão e Exclusão

A_k: conjunto dos múltiplos de k de 1 a 350.000 $\Longrightarrow$ $|A_k| = \left\lfloor \frac{350.000}{k} \right\rfloor$.

$$\begin{aligned}
|A_7 \cap A_{11} \cap A_{13} \cap A_{17}| &= |A_{7\cdot 11\cdot 13\cdot 17}| = \left\lfloor \frac{350.000}{7\cdot 11\cdot 13\cdot 17} \right\rfloor = 20 \\
|A_7 \cap A_{11} \cap A_{13} \cap A_{19}| &= |A_{7\cdot 11\cdot 13\cdot 19}| = \left\lfloor \frac{350.000}{7\cdot 11\cdot 13\cdot 19} \right\rfloor = 18 \\
|A_7 \cap A_{11} \cap A_{17} \cap A_{19}| &= |A_{7\cdot 11\cdot 17\cdot 19}| = \left\lfloor \frac{350.000}{7\cdot 11\cdot 17\cdot 19} \right\rfloor = 14 \\
|A_7 \cap A_{13} \cap A_{17} \cap A_{19}| &= |A_{7\cdot 13\cdot 17\cdot 19}| = \left\lfloor \frac{350.000}{7\cdot 13\cdot 17\cdot 19} \right\rfloor = 11 \\
|A_{11} \cap A_{13} \cap A_{17} \cap A_{19}| &= |A_{11\cdot 13\cdot 17\cdot 19}| = \left\lfloor \frac{350.000}{11\cdot 13\cdot 17\cdot 19} \right\rfloor = 7
\end{aligned}$$

$$|A_7 \cap A_{11} \cap A_{13} \cap A_{17} \cap A_{19}| = |A_{7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19}| = \left\lfloor \frac{350.000}{7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19} \right\rfloor = 1$$

Seção 11.13 - Princípio da Inclusão e Exclusão

Ex. 02 da Lista 3: Quantos números entre 1 e 350.000 não são divisíveis por 7, 11, 13, 17 ou 19?

Solução pelo Princípio da Inclusão e Exclusão

Pelo Princípio da Inclusão e Exclusão, temos que:

$|A_7 \cup A_{11} \cup A_{13} \cup A_{17} \cup A_{19}| = 50000+31818+26923+20588+18421 \ -$
-4545-3846-2941-2631-2447-1871-1674-1583-1417-1083 $+$
$+349+267+239+226+202+154+143+128+98+83 \ -$
$-20-18-14-11-7 \quad +1 \ = \ \mathbf{125.532}$

Pelo Princípio Subtrativo da Contagem:
Resultado final = 350.000 - 125.532 = **224.468**

Seção 11.13 - Princípio da Inclusão e Exclusão

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Prova Combinatória:

Seja x um elemento que aparece em exatamente m dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Quantos conjuntos da forma $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ com $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ contém x?

Resposta: $\binom{m}{k}$ para $1 \leq k \leq m$, pois é o número de modos de escolher k conjuntos entre os os m conjuntos que contém x.

No lado direito da Inclusão e Exclusão, x será contado quantas vezes?

$\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \binom{m}{4} + \cdots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m}$

Já vimos que:

$$\binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \binom{m}{4} - \cdots + (-1)^m \binom{m}{m} = (1-1)^m = 0$$

$$\Longrightarrow \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \binom{m}{4} + \cdots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m} = \binom{m}{0} - 0 = \mathbf{1}.$$

Logo x será contado exatamente 1 vez.

PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS

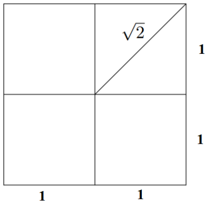
Princípio da Casa dos Pombos (PCP)

1^o versão: Se em n caixas colocarmos mais de n objetos, alguma caixa terá mais de um objeto.

2^o versão: Se em n caixas colocarmos mais de $k \cdot n$ objetos, alguma caixa terá mais de k objetos.

Prova por contradição: Se todas as caixas tiverem no máximo k objetos, então o número de objetos será no máximo $k \cdot n$. Como são mais de $k \cdot n$, objetos, alguma caixa terá mais de k objetos.

Exemplo: Em um quadrado de lado 2, prove que todo conjunto de **5** pontos tem pelo menos 2 a distância $\leq \sqrt{2}$, que todo conjunto de **9** pontos tem pelo menos 3 a distância $\leq \sqrt{2}$ e que todo conjunto de **13** pontos tem pelo menos 4 a distância $\leq \sqrt{2}$ entre si.

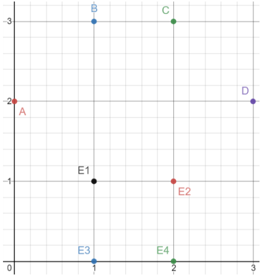


Princípio da Casa dos Pombos (PCP)

2º versão: Se em n caixas colocarmos mais de $k \cdot n$ objetos, alguma caixa terá mais de k objetos.

Exemplo: Dados 5 pontos no plano com coordenadas inteiras, prove que pelo menos um dos dez pontos médio gerados por eles também possui coordenadas inteiras.

Solução: Dividir os pontos em 4 grupos: PP (x e y pares), PI (x par e y ímpar), IP (x ímpar e y par) e II (x e y ímpares). Dois pontos de um mesmo grupo tem o ponto médio entre eles com coordenadas inteiras, pois $x_m = (x_1 + x_2)/2$ e $y_m = (y_1 + y_2)/2$. PCP

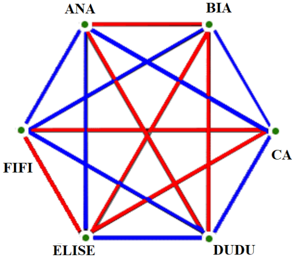


Princípio da Casa dos Pombos

2^o versão: Se em n caixas colocarmos mais de $k \cdot n$ objetos, alguma caixa terá mais de k objetos.

Exemplo (Ramsey): Em um grupo de 6 pessoas, há 3 pessoas que se conhecem mutuamente ou há 3 pessoas que não se conhecem mutuamente.

Solução: Pessoas A, B, C, D, E e F. Pelo PCP, F conhece 3 ou desconhece 3 pessoas em A, B, C, D, E. Suponha que F conhece A, B e D, sem perda de generalidade. Se A, B e D não se conhecem, Ok. Se A e B, ou A e D, ou B e D se conhecem, teremos com F três pessoas que se conhecem.



Princípio da Casa dos Pombos

Questão 3 da Lista 3: Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \subseteq \{0, 1, \cdots, 2n-1\}$. Mostre que se $|A| = n+2$, então $\exists a, a' \in A$, $a \neq a'$, tais que $a + a' = 2n$.

Solução: Considere o conjunto $A' = A - \{0, n\}$ (pombos). Como $|A| = n+2$, então $|A'| \geq n$. Vamos formar $n-1$ casa de pombos: $\{1, 2n-1\}, \{2, 2n-2\}, \{3, 2n-3\}, \ldots, \{n-2, n+2\}, \{n-1, n+1\}$. Como A' tem mais de $n-1$ pombos, dois pombos estão na mesma casa. Logo A tem dois números somando $2n$.

Princípio da Casa dos Pombos (PCP)

Questão 4 da Lista 3: $A \subseteq \mathbb{N}$. Prove que:

(a) $|A| = n+1 \implies \exists a, a' \in A,\ a \neq a'$: $a - a'$ é múltiplo de n.

(b) $|A| = n+2 \implies \exists a, a' \in A,\ a \neq a'$: ($a - a'$ é múltiplo de $2n$) ou ($a + a'$ é múltiplo de $2n$).

Solução (a): Na divisão por n, existem n restos possíveis (0 a $n-1$). Pelo **PCP**, A tem números a e a' com mesmo resto na divisão por n. Logo $a - a'$ é múltiplo de n.

Solução (b): Se A tem dois números a e a' com mesmo resto na divisão por $2n$, então $a - a'$ é múltiplo de $2n$. OK. Suponha então, na divisão dos números em A por $2n$, todos os restos são diferentes. Pela Questão 3, existe $a, a' \in A$ tais que a soma de seus restos é igual a $2n$. Portanto, $a + a'$ é múltiplo de $2n$.

Princípio da Casa dos Pombos (PCP)

Questão 5 da Lista 3: Mostre que, em todo grupo de $n \geq 2$ pessoas, há duas pessoas com o mesmo número de amigos no grupo. Considere que a relação "ser amigo" é simétrica mas não é reflexiva.

Solução: Em um grupo de n pessoas, os valores possíveis para número de amigos vão de 0 a $n - 1$ (são n valores). No entanto:

- Se alguém conhece 0 pessoas, então ninguém conhece $n - 1$ pessoas;
- Se alguém conhece $n - 1$ pessoas, então ninguém conhece 0 pessoas;

Então teremos na realidade $n - 1$ valores possíveis para número de amigos, pois 0 e $n - 1$ se excluem mutuamente.
Pelo PCP, duas pessoas tem o mesmo número de amigos.

Princípio da Casa dos Pombos (PCP)

Questão 9 da Lista 3: Quantas são as soluções de:

(a) $w + x + y + z = 50$, sendo w, x, y e z números naturais?

(b) $w + x + y + z = 120$, sendo w, x, y e z números naturais tais que pelo menos um deles é maior que 27?

Solução (a): $\binom{50+4-1}{4-1} = \binom{53}{3}$

Solução (b):
Pelo **PCP**, alguma variável w, x, y, z terá valor ≥ 30.
Então a restrição sempre ocorrerá.

Resposta $= \binom{120+4-1}{4-1} = \binom{123}{3}$.

Capítulo 12
PROBABILIDADE

Um **espaço de probabilidade discreto** (Ω, Pr) é dado por um conjunto Ω (chamado espaço amostral, finito ou infinito enumerável) e uma função de probabilidade $Pr : \Omega \to [0, 1]$ tal que $\sum_{\omega \in \Omega} Pr(\omega) = 1$.

Exemplo: Uma moeda não-viciada é lançada até se obter uma coroa. Seja S o espaço amostral $\{1, 2, 3, \ldots\}$ do número de lançamentos da moeda. Determine a função de probabilidade $\mathbb{P} : S \to [0, 1]$.

Solução: $\mathbb{P}(n) \;=\; (\frac{1}{2})^{n-1} \cdot (\frac{1}{2}) \;=\; (\frac{1}{2})^n$

Note que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(n) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n \;=\; \frac{1/2}{1-1/2} \;=\; 1$ (**soma de PG**).

Exemplo: Uma moeda viciada é lançada até se obter uma coroa, que tem probabilidade $2/3$ de ocorrência. Seja S o espaço amostral $\{1, 2, 3, \ldots\}$ do número de lançamentos da moeda. Determine a função de probabilidade $\mathbb{P} : S \to [0, 1]$.

Solução: $\mathbb{P}(n) \;=\; (\frac{1}{3})^{n-1} \cdot (\frac{2}{3}) \;=\; 2(\frac{1}{3})^n$

Note que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(n) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} 2(\frac{1}{3})^n \;=\; \frac{2/3}{1-1/3} \;=\; 1$ (**soma de PG**).

Exemplo: Uma moeda não-viciada é lançada 5 vezes. Qual é a probabilidade de aparecer apenas uma cara? E aparecer duas caras?

Solução: Seja C (cara) e K (coroa).
As possibilidades de lançamentos com 1 cara são:
CKKKK, KCKKK, KKCKK, KKKCK, KKKKC:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{número de caras} = 0) &= \tbinom{5}{0}/2^5 = 1/32.\\
\mathbb{P}(\text{número de caras} = 1) &= \tbinom{5}{1}/2^5 = 5/32.\\
\mathbb{P}(\text{número de caras} = 2) &= \tbinom{5}{2}/2^5 = 10/32.\\
\mathbb{P}(\text{número de caras} = 3) &= \tbinom{5}{3}/2^5 = 10/32\\
\mathbb{P}(\text{número de caras} = 4) &= \tbinom{5}{4}/2^5 = 5/32.\\
\mathbb{P}(\text{número de caras} = 5) &= \tbinom{5}{5}/2^5 = 1/32.
\end{aligned}$$

Exemplo: Qual a probabilidade de se obter um "*four*" no pôquer (4 cartas de uma mesmo valor em uma mão de 5)?

Solução:

$$\mathbb{P}(\text{“}\mathit{four}\text{''}) = \frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}}$$

Capítulo 12 - Probabilidade

Exemplo: Dez dados não-viciados são lançados de modo independente. Qual é a probabilidade de nenhum mostrar o número 6?

Solução 1: $\mathbb{P}(\text{Dado } i \neq 6) \;=\; 5/6$ para qualquer dado $i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$.
$\mathbb{P}(\text{Todos os Dados} \neq 6) \;=\; (\frac{5}{6})^{10} \;\approx\; 16.15\%$.

Solução 2: Número de lançamentos: $6 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 6 \;=\; 6^n$.
Número de lançamentos sem 6: $5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5 \;=\; 5^n$.
$\mathbb{P}(\text{Todos os Dados} \neq 6) \;=\; \frac{5^{10}}{6^{10}} \;\approx\; 16.15\%$.

Exemplo: Qual é o evento mais provável numa família com 4 filhos: (A) 2 meninos e 2 meninas, ou (B) 3 de um sexo e 1 do outro?

Solução: Total $= 2^4 \;=\; 16$.
A: hhmm, hmhm, hmmh, mhhm, mhmh, mmhh.
B: hhhm, hhmh, hmhh, mhhh, mmmh, mmhm, mhmm, hmmm.
$\mathbb{P}(A) \;=\; 6/16 \;=\; 37.5\%$. $\qquad \mathbb{P}(B) \;=\; 8/16 \;=\; 50\%$.

Exemplo: Qual é a probabilidade de 4 pessoas terem aniversário diferente? E de pelo menos duas delas terem mesmo aniversário? Assuma que ninguém nasceu em 29 de fevereiro.

Solução: Total $= 365^4$. Seja A o evento "todos aniversários diferentes".
$\mathbb{P}(A) \;=\; (365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362)/365^4 \;=\; 98.4\%.$
$\mathbb{P}(\overline{A}) \;=\; 1 - \mathbb{P}(A) \;=\; 1.64\%.$

Exemplo (Problema dos aniversários): Qual é o menor número n de alunos numa sala tal que é mais provável encontrar dois alunos com a mesma data de aniversário do que o contrário?

Solução: Pelo PCP, $n \leq 365$.

$$\mathbb{P}(A) \;=\; \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}.$$

Tomando $n = 23$: $\mathbb{P}(A) = 49.27\%$. Portanto, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 50.73\%$.

Seção 12.7 - Probabilidade Condicional

Exemplo: Uma moeda é lançada 5 vezes. Qual é a probab. da 1^o jogada ser C (cara), sabendo que ocorreram exatamente 3 coroas (K)?

Solução: Seja A o evento "1^o jogada é C" e B o evento "exatam. 3 K's".
$Pr(B) = \binom{5}{3}(\frac{1}{2})^5 = 10 \cdot 2^{-5}$. $\quad Pr(A \wedge B) = \binom{4}{3}(\frac{1}{2})^5 = 4 \cdot 2^{-5}$.

$$Pr(A \mid B) = \frac{Pr(A \wedge B)}{Pr(B)} = \frac{4 \cdot 2^{-5}}{10 \cdot 2^{-5}} = \frac{2}{5}$$

Exemplo: Considere um sorteio onde objetos $1, 2, \ldots, n$ podem ser escolhidos com probab. $p_1, p_2, \ldots, p_n$, tais que $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Sabendo que o objeto sorteado foi o 1, 2 ou 3, qual a probabilidade de ter sido o objeto 1?

Solução: Seja A o evento "foi o 1" e B o evento "foi o 1, 2 ou 3".
$Pr(B) = p_1 + p_2 + p_3$. $\quad Pr(A \wedge B) = Pr(A) = p_1$.

$$Pr(A \mid B) = \frac{Pr(A \wedge B)}{Pr(B)} = \frac{p_1}{p_1 + p_2 + p_3}$$

Seção 12.7 - Probabilidade Condicional

Problema de Monty-Hall: Um prêmio atrás de 3 portas. Assuma que o participante escolhe a porta 1, s.p.g. Seja P_i o evento "o **prêmio** está na porta i" e seja A_j o evento "MH **abriu** a porta j" (sem o prêmio principal).

$\mathbb{P}(P_i \wedge A_1) = 0, \forall i. \qquad \mathbb{P}(P_i \wedge A_i) = 0, \forall i.$
$\mathbb{P}(P_1 \wedge A_2) = \mathbb{P}(P_1 \wedge A_3) = \mathbb{P}(P_1)/2 = 1/6.$
$\mathbb{P}(P_2 \wedge A_3) = \mathbb{P}(P_2) = 1/3. \qquad \mathbb{P}(P_3 \wedge A_2) = \mathbb{P}(P_3) = 1/3.$

$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2 \wedge P_1) + \mathbb{P}(A_2 \wedge P3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1/2.$
$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_3 \wedge P_1) + \mathbb{P}(A_3 \wedge P2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1/2.$ **Portanto:**

$$\mathbb{P}(P_1 \mid A_2) = \frac{\mathbb{P}(P_1 \wedge A_2)}{\mathbb{P}(A_2)} = \frac{1/6}{1/2} = \mathbf{1/3}$$

$$\mathbb{P}(P_3 \mid A_2) = \frac{\mathbb{P}(P_3 \wedge A_2)}{\mathbb{P}(A_2)} = \frac{1/3}{1/2} = \mathbf{2/3}$$

$$\mathbb{P}(P_1 \mid A_3) = \frac{\mathbb{P}(P_1 \wedge A_3)}{\mathbb{P}(A_3)} = \frac{1/6}{1/2} = \mathbf{1/3}$$

$$\mathbb{P}(P_2 \mid A_3) = \frac{\mathbb{P}(P_2 \wedge A_3)}{\mathbb{P}(A_3)} = \frac{1/3}{1/2} = \mathbf{2/3}$$

Problema de Monty-Hall: E se fossem 4 portas?

$\mathbb{P}(P_i \wedge A_1) = 0, \forall i. \qquad \mathbb{P}(P_i \wedge A_i) = 0, \forall i.$

$\mathbb{P}(P_1 \wedge A_2) = \mathbb{P}(P_1 \wedge A_3) = \mathbb{P}(P_1 \wedge A_4) = \mathbb{P}(P_1)/3 = 1/12.$

$\mathbb{P}(P_2 \wedge A_3) = \mathbb{P}(P_2 \wedge A_4) = \mathbb{P}(P_2)/2 = 1/8.$

$\mathbb{P}(P_3 \wedge A_2) = \mathbb{P}(P_3 \wedge A_4) = \mathbb{P}(P_3)/2 = 1/8.$

$\mathbb{P}(P_4 \wedge A_2) = \mathbb{P}(P_4 \wedge A_3) = \mathbb{P}(P_4)/2 = 1/8.$

$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2 \wedge P_1) + \mathbb{P}(A_2 \wedge P_3) + \mathbb{P}(A_2 \wedge P_4) = \frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1/3.$

$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_3 \wedge P_1) + \mathbb{P}(A_3 \wedge P_2) + \mathbb{P}(A_3 \wedge P_4) = \frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1/3.$

$\mathbb{P}(A_4) = \mathbb{P}(A_4 \wedge P_1) + \mathbb{P}(A_4 \wedge P_2) + \mathbb{P}(A_4 \wedge P_3) = \frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1/3.$

Portanto:

$$\mathbb{P}(P_1 \mid A_2) = \frac{\mathbb{P}(P_1 \wedge A_2)}{\mathbb{P}(A_2)} = \frac{1/12}{1/3} = \mathbf{1/4} = \mathbb{P}(P_1 \mid A_3) = \mathbb{P}(P_1 \mid A_4)$$

$$\mathbb{P}(P_2 \mid A_3) = \frac{\mathbb{P}(P_2 \wedge A_3)}{\mathbb{P}(A_3)} = \frac{1/8}{1/3} = \mathbf{3/8} = \mathbb{P}(P_2 \mid A_4)$$

Igualmente: $\mathbb{P}(P_3|A_2) = \mathbb{P}(P_3|A_4) = \mathbb{P}(P_4|A_2) = \mathbb{P}(P_4|A_3) = \mathbf{3/8}.$

Seção 12.7 - Probabilidade Condicional

Problema de Monty-Hall: E se fossem 5 portas?

$\mathbb{P}(P_i \wedge A_1) = 0, \forall i. \qquad \mathbb{P}(P_i \wedge A_i) = 0, \forall i.$

$\mathbb{P}(P_1 \wedge A_2) = \mathbb{P}(P_1 \wedge A_3) = \mathbb{P}(P_1 \wedge A_4) = \mathbb{P}(P_1 \wedge A_5) = \mathbb{P}(P_1)/4 = 1/20.$

$\mathbb{P}(P_2 \wedge A_3) = \mathbb{P}(P_2 \wedge A_4) = \mathbb{P}(P_2 \wedge A_5) = \mathbb{P}(P_2)/3 = 1/15.$

$\mathbb{P}(P_3 \wedge A_2) = \mathbb{P}(P_3 \wedge A_4) = \mathbb{P}(P_3 \wedge A_5) = \mathbb{P}(P_3)/3 = 1/15.$

$\mathbb{P}(P_4 \wedge A_2) = \mathbb{P}(P_4 \wedge A_3) = \mathbb{P}(P_4 \wedge A_5) = \mathbb{P}(P_4)/3 = 1/15.$

$\mathbb{P}(P_5 \wedge A_2) = \mathbb{P}(P_5 \wedge A_3) = \mathbb{P}(P_5 \wedge A_4) = \mathbb{P}(P_5)/3 = 1/15.$

$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2 \wedge P_1) + \mathbb{P}(A_2 \wedge P_3) + \mathbb{P}(A_2 \wedge P_4) + \mathbb{P}(A_2 \wedge P_5) = \frac{1}{20} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = 1/4. \qquad \mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_4) = \mathbb{P}(A_5) = 1/4.$

Portanto:

$$\mathbb{P}(P_1|A_2) = \frac{\mathbb{P}(P_1 \wedge A_2)}{\mathbb{P}(A_2)} = \frac{1/20}{1/4} = \mathbf{1/5} = \mathbb{P}(P_1|A_3) = \mathbb{P}(P_1|A_4) = \mathbb{P}(P_1|A_5)$$

$$\mathbb{P}(P_2|A_3) = \frac{\mathbb{P}(P_2 \wedge A_3)}{\mathbb{P}(A_3)} = \frac{1/15}{1/4} = \mathbf{4/15} = \mathbb{P}(P_2|A_4) = \mathbb{P}(P_2|A_5)$$

Igualmente: $\mathbb{P}(P_3|A_2) = \mathbb{P}(P_4|A_2) = \mathbb{P}(P_5|A_2) = \mathbf{4/15}.$

Seção 12.7 - Probabilidade Condicional

Problema de Monty-Hall: Explicação com menos contas.

3 portas: Probabilidade $1/3$ de estar na Porta 1 e $2/3$ de não estar. Aberta a Porta 2, toda a probabilidade $2/3$ fica concentrada na Porta 3.

4 portas: Probabilidade $1/4$ de estar na Porta 1 e $3/4$ de não estar. Aberta a Porta 2, toda a probabilidade $3/4$ fica concentrada nas Portas 3 e 4. Escolhendo aleat. uma dessas 2 portas, temos probabilidade $3/8$.

5 portas: Probabilidade $1/5$ de estar na Porta 1 e $4/5$ de não estar. Aberta a Porta 2, toda a probabilidade $4/5$ fica concentrada nas Portas 3, 4 e 5. Escolhendo aleat. uma dessas 3 portas, temos probab. $4/15$.

6 portas: Probabilidade $1/6$ de estar na Porta 1 e $5/6$ de não estar. Aberta a Porta 2, toda a probabilidade $5/6$ fica concentrada nas Portas 3, 4, 5 e 6. Escolhendo aleat. uma dessas 4 portas, temos prob. $5/24$.

7 portas: Probabilidade $1/7$ de estar na Porta 1 e $6/7$ de não estar. Aberta a Porta 2, toda a probabilidade $6/7$ fica concentrada nas Portas 3, 4, 5, 6 e 7. Escolhendo aleat. uma dessas 5 portas, temos prob. $6/35$.

Seção 12.7 - Probabilidade Condicional

Problema de Monty-Hall: Variação: O apresentador abre 2 portas ao invés de 1.

4 portas: Probabilidade $1/4$ de estar na Porta 1 e $3/4$ de não estar. Abertas as Portas 2 e 3, toda a prob. $3/4$ fica concentrada na Porta 4.

5 portas: Probabilidade $1/5$ de estar na Porta 1 e $4/5$ de não estar. Abertas as Portas 2 e 3, toda a prob. $4/5$ fica concentrada nas Portas 4 e 5. Escolhendo aleat. uma dessas 2 portas, temos prob. $4/10$.

6 portas: Probabilidade $1/6$ de estar na Porta 1 e $5/6$ de não estar. Abertas as Portas 2 e 3, toda a prob. $5/6$ fica concentrada nas Portas 4, 5 e 6. Escolhendo aleat. uma dessas 3 portas, temos prob. $5/18$.

7 portas: Probabilidade $1/7$ de estar na Porta 1 e $6/7$ de não estar. Abertas as Portas 2 e 3, toda a prob. $6/7$ fica concentrada nas Portas 4, 5, 6 e 7. Escolhendo aleat. uma dessas 4 portas, temos prob. $6/28$.

Variação de Monty-Hall: 100 portas. Participante escolhe Porta ℓ.

MH abre 98 portas diferentes da Porta ℓ e sem o prêmio. Seja k a única porta não aberta. Probabilidade 1% de estar na Porta ℓ e 99% de não estar. Após abrir as portas, toda a prob. 99% se concentra na Porta k.

MH abre 97 portas diferentes da Porta ℓ e sem o prêmio. Sejam k_1 e k_2 as únicas portas não abertas. Probabilidade 1% de estar na Porta ℓ e 99% de não estar. Após abrir as portas, toda a prob. 99% se concentra nas Portas k_1 e k_2. Escolhendo uma das duas aleat., temos prob. 49.5%

MH abre 96 portas diferentes da Porta ℓ e sem o prêmio. Sejam k_1, k_2 e k_3 as únicas portas não abertas. Probabilidade 1% de estar na Porta ℓ e 99% de não estar. Após abrir as portas, toda a prob. 99% se concentra nas Portas k_1, k_2 e k_3. Escolhendo uma das três aleat., temos prob. 33%