Universidade Federal do Ceará
Departamento de Computação

Matemática Discreta

Lista de exercícios 2

Cada $\surd$ denota um nível de dificuldade: $\surd$ fácil, $\surd\surd$ médio e $\surd\surd\surd$ difícil.

$\surd\surd$ **1.** (**indução**) O Jogo da Torre de Hanói possui 3 hastes A, B e C com n discos de tamanhos diferentes empilhados na haste A (discos maiores embaixo de discos menores). O objetivo é levar todos os discos (um por um) da haste A até a haste B, usando a haste C como auxiliar, sem deixar um disco maior sobre um disco menor. Prove por indução que o menor número de movimentos para levar n discos da haste A até a haste B da Torre de Hanói, usando a haste C como auxiliar, é $2^n - 1$.

$\surd\surd$ **2.** (**indução**) Mostre por indução que, se $n \in \mathbb{N}^*$ é uma potência de 2 ($n = 2^k$, para algum $k \in \mathbb{N}$) e $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n$ e $T(1) = 1$, então $T(n) = n \log_2 n + n$.

$\surd\surd$ **3.** (**relações**) Sejam R uma relação binária e A e B conjuntos. Por simplicidade de notação, escrevemos $R[X]$, onde X é um conjunto, para indicar $R[X, X]$. Prove ou construa um contra-exemplo:

(a) $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$.

(b) $R[A \cup B] \subseteq R[A] \cup R[B]$.

(c) $R[A - B] \subseteq R[A] - R[B]$.

(d) $R[A \cap B] \supseteq R[A] \cap R[B]$.

(e) $R[A \cup B] \supseteq R[A] \cup R[B]$.

(f) $R[A - B] \supseteq R[A] - R[B]$.

$\surd\surd$ **4.** (**relações**) Mostre que se R é uma relação reflexiva e transitiva, então $R \cap R^{-1}$ é uma relação de equivalência, onde $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$.

$\surd\surd\surd$ **5.** (**relações**) Sejam A um conjunto e $R \subseteq A \times A$. Seja ainda

$$S = \{(a, a') \mid \exists a'' \in A, (a, a'') \in R \wedge (a'', a') \in R\}.$$

Prove ou dê um contra-exemplo:

(a) se R é uma relação de equivalência, então S também o é.

(b) se S é uma relação de equivalência, então R também o é.

$\surd$ **6.** (**relações**) Sejam A um conjunto e $R \subseteq A \times A$ uma ordem parcial em A. Mostre que se $B \subseteq A$, então $R \cap (B \times B)$ é uma ordem parcial em B.

$\surd$ **7.** (**funções**) Dada um função bijetiva qualquer $F : A \to A$ em um conjunto A, determine qual é a função $(F \circ F) \circ ((F^{-1} \circ F^{-1}) \circ F)$. Justifique.

$\surd\surd$ **8.** (**funções**) Para $n \geq 3$, considere n funções $f_1, \ldots, f_n$ tais que $Img(f_k) \subseteq Dom(f_{k+1})$ para $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Prove por indução que:

$$f_n \circ (f_{n-1} \circ (\ldots \circ (f_3 \circ (f_2 \circ f_1)) \ldots)) \quad = \quad ((\ldots((f_n \circ f_{n-1}) \circ f_{n-2}) \circ \ldots) \circ f_2) \circ f_1.$$

$\surd\surd$ **9.** (**relações**) Considere a relação $R = \{(S_1, S_2) \ : \ S_1, S_2 \subsetneq \{a, b, c, d\} \text{ e } S_1 \subseteq S_2\}$.

(a) Represente a relação R graficamente.

(b) Prove que R é uma **ordem parcial**.

(c) R tem elemento mínimo? minimal? máximo? maximal? Se sim, quais?

$\surd\surd$ **10.** (**funções**) Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções tais que a composta $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é bijetora. Prove que f injetora e que g é sobrejetora.

$\surd\surd\surd$ **11.** (**funções**) Sejam f e g as funções

$$f(x) \ = \ \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} \qquad\qquad g(x) \ = \ 3^x.$$

(a) Determine a função $f^{-1}(x)$ (a função **inversa** de f).

(b) Determine a função $h(x) = g(f^{-1}(x))$ (**composta** de g com f^{-1}).

$\surd\surd$ **12.** (**funções**) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função $f(x) = x^2 \ - \ 8x \ + \ 15$.

(a) Explique porque f não é **injetora**. Explique porque f não é **sobrejetora**.

(b) Mude o mínimo possível o domínio e o contra-domínio para que f fique **bijetora**.

(c) Com as mudanças do item (b), determine a função **inversa** f^{-1} de f.

$\surd\surd$ **13.** (**somatórios**) Resolva os seguintes somatórios, sem usar resultados de somatórios já vistos nas aulas:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 6k^2$ **(c)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 4k^3$ **(d)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (4k^3+6k^2+2k-1)$

$\surd\surd\surd$ **14.** (**somatórios**) Prove os seguintes somatórios, sem usar indução matemática, mostrando em detalhes todas as contas. Dica: soma telescópica + resultados obtidos na questão anterior.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 \ = \ \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^5 \ = \ \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$