

Fundamentos Matemáticos da Computação  
Lista de exercícios 2

Cada  $\sqrt{\quad}$  denota um nível de dificuldade:  $\sqrt{\quad}$  fácil,  $\sqrt{\sqrt{\quad}}$  médio e  $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\quad}}}$  difícil.

$\sqrt{\sqrt{\quad}}$  **1. (indução)** O Jogo da Torre de Hanói possui 3 hastes A, B e C com  $n$  discos de tamanhos diferentes empilhados na haste A (discos maiores embaixo de discos menores). O objetivo é levar todos os discos (um por um) da haste A até a haste B, usando a haste C como auxiliar, sem deixar um disco maior sobre um disco menor. Prove por indução que o menor número de movimentos para levar  $n$  discos da haste A até a haste B da Torre de Hanói, usando a haste C como auxiliar, é  $2^n - 1$ .

$\sqrt{\sqrt{\quad}}$  **2. (indução)** Mostre por indução que, se  $n \in \mathbb{N}^*$  é uma potência de 2 ( $n = 2^k$ , para algum  $k \in \mathbb{N}$ ) e  $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função tal que  $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n$  e  $T(1) = 1$ , então  $T(n) = n \log_2 n + n$ .

$\sqrt{\sqrt{\quad}}$  **3. (relações)** Sejam  $R$  uma relação binária e  $A$  e  $B$  conjuntos. Por simplicidade de notação, escrevemos  $R[X]$ , onde  $X$  é um conjunto, para indicar  $R[X, X]$ . Prove ou construa um contra-exemplo:

- |  |  |
|--|--|
| (a) $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$ . | (d) $R[A \cap B] \supseteq R[A] \cap R[B]$ . |
| (b) $R[A \cup B] \subseteq R[A] \cup R[B]$ . | (e) $R[A \cup B] \supseteq R[A] \cup R[B]$ . |
| (c) $R[A - B] \subseteq R[A] - R[B]$ .       | (f) $R[A - B] \supseteq R[A] - R[B]$ .       |

$\sqrt{\sqrt{\quad}}$  **4. (relações)** Mostre que se  $R$  é uma relação reflexiva e transitiva, então  $R \cap R^{-1}$  é uma relação de equivalência, onde  $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$ .

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\quad}}}$  **5. (relações)** Sejam  $A$  um conjunto e  $R \subseteq A \times A$ . Seja ainda

$$S = \{(a, a') \mid \exists a'' \in A, (a, a'') \in R \wedge (a'', a') \in R\}.$$

Prove ou dê um contra-exemplo:

- (a) se  $R$  é uma relação de equivalência, então  $S$  também o é.  
(b) se  $S$  é uma relação de equivalência, então  $R$  também o é.

$\sqrt{\quad}$  **6. (relações)** Sejam  $A$  um conjunto e  $R \subseteq A \times A$  uma ordem parcial em  $A$ . Mostre que se  $B \subseteq A$ , então  $R \cap (B \times B)$  é uma ordem parcial em  $B$ .

$\sqrt{\quad}$  **7. (funções)** Dada um função bijetiva qualquer  $F : A \rightarrow A$  em um conjunto  $A$ , determine qual é a função  $(F \circ F) \circ ((F^{-1} \circ F^{-1}) \circ F)$ . Justifique.

✓✓ **8. (funções)** Para  $n \geq 3$ , considere  $n$  funções  $f_1, \dots, f_n$  tais que  $Img(f_k) \subseteq Dom(f_{k+1})$  para  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ . Prove por indução que:

$$f_n \circ (f_{n-1} \circ (\dots \circ (f_3 \circ (f_2 \circ f_1)) \dots)) = ((\dots ((f_n \circ f_{n-1}) \circ f_{n-2}) \circ \dots) \circ f_2) \circ f_1.$$

✓✓ **9. (relações)** Considere a relação  $R = \{(S_1, S_2) : S_1, S_2 \subsetneq \{a, b, c, d\} \text{ e } S_1 \subseteq S_2\}$ .

- (a) Represente a relação  $R$  graficamente.
- (b) Prove que  $R$  é uma **ordem parcial**.
- (c)  $R$  tem elemento mínimo? minimal? máximo? maximal? Se sim, quais?

✓✓ **10. (funções)** Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções tais que a composta  $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é bijetora. Prove que  $f$  injetora e que  $g$  é sobrejetora.

✓✓✓ **11. (funções)** Sejam  $f$  e  $g$  as funções

$$f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} \qquad g(x) = 3^x.$$

- (a) Determine a função  $f^{-1}(x)$  (a função **inversa** de  $f$ ).
- (b) Determine a função  $h(x) = g(f^{-1}(x))$  (**composta** de  $g$  com  $f^{-1}$ ).

✓✓ **12. (funções)** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função  $f(x) = x^2 - 8x + 15$ .

- (a) Explique porque  $f$  não é **injetora**. Explique porque  $f$  não é **sobrejetora**.
- (b) Mude o mínimo possível o domínio e o contra-domínio para que  $f$  fique **bijetora**.
- (c) Com as mudanças do item (b), determine a função **inversa**  $f^{-1}$  de  $f$ .

✓✓ **13. (somatórios)** Resolva os seguintes somatórios, sem usar resultados de somatórios já vistos nas aulas:

$$(a) \sum_{k=1}^n (2k-1) \qquad (b) \sum_{k=1}^n 6k^2 \qquad (c) \sum_{k=1}^n 4k^3 \qquad (d) \sum_{k=1}^n (4k^3 + 6k^2 + 2k - 1)$$

✓✓✓ **14. (somatórios)** Prove os seguintes somatórios, sem usar indução matemática, mostrando em detalhes todas as contas. Dica: soma telescópica + resultados obtidos na questão anterior.

$$(a) \sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \qquad (b) \sum_{k=1}^n k^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$