Universidade Federal do Ceará
Departamento de Computação

Fundamentos Matemáticos da Computação
Lista de exercícios 1

Cada $\surd$ denota um nível de dificuldade: $\surd$ fácil, $\surd\surd$ médio e $\surd\surd\surd$ difícil.

$\surd$ **1.** Seja $\oplus$ o operador "xor" (Exclusive Or) definido como $P \oplus Q \ := \ \neg(P \leftrightarrow Q)$. Construa a tabela verdade de $P \oplus Q$ e depois prove os seguintes itens, onde P, Q e R são sentenças lógicas quaisquer:

(a) $(P \oplus Q) \iff (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$

(b) $(P \oplus Q) \iff (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

(c) $P \oplus (Q \oplus R) \iff (P \oplus Q) \oplus R$

(d) $P \wedge (Q \oplus R) \iff (P \wedge Q) \oplus (P \wedge R)$

$\surd$ **2.** Construa a tabela verdade para as seguintes sentenças, onde P, Q e R são sentenças lógicas:

(a) $(P \to \neg Q) \vee \neg P$

(b) $(P \vee \neg Q) \to \neg Q$

(c) $P \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

(d) $(P \vee (Q \oplus R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \oplus (P \vee R))$

(e) $(P \to (Q \to R)) \leftrightarrow ((P \to Q) \to R)$

(f) $(P \to (Q \oplus R)) \leftrightarrow ((P \to Q) \oplus (P \to R))$

$\surd$ **3.** Prove que o operador condicional ($\to$) é distributivo com todos operadores ($\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$). Ou seja, prove os seguintes itens, onde P, Q e R são sentenças lógicas quaisquer:

(a) $P \to (Q \wedge R) \iff ((P \to Q) \wedge (P \to R))$

(b) $P \to (Q \vee R) \iff ((P \to Q) \vee (P \to R))$

(c) $P \to (Q \to R) \iff ((P \to Q) \to (P \to R))$

(d) $P \to (Q \leftrightarrow R) \iff ((P \to Q) \leftrightarrow (P \to R))$

$\surd\surd$ **4.** Considerando as quatro sentenças abaixo, a última sentença é verdadeira? Justifique.

- Existem quatro sentenças nesta questão.
- Três das sentenças desta questão são falsas.
- A última sentença é verdadeira.
- Esta lista de exercícios está muito fácil.

$\surd\surd$ **5.** (OBMEP Nível 1 - 2018) Vovó Vera quis saber qual de suas cinco netinhas fez um desenho na parede de sua sala. As netinhas fizeram as seguintes declarações. Se apenas uma delas mentiu, descubra quem fez o desenho. Escreva a argumentação da sua resposta.

- Emília: *Não fui eu.*
- Rafaela: *Não foi a Luísa.*
- Luísa: *Quem desenhou foi a Marília ou a Rafaela.*
- Marília: *Não foi a Rafaela nem a Vitória.*
- Vitória: *Luísa não está dizendo a verdade.*

$\surd\surd\surd$ **6.** Um náufrago chega em uma ilha onde convivem duas tribos A e B. Todos os nativos da tribo A sempre mentem. Todos os nativos da tribo B sempre falam a verdade. Ao se deparar com um nativo, o náufrago fez a seguinte pergunta: "*Existe ouro nesta ilha ?*". O nativo respondeu: "*Existe ouro na ilha se e somente se eu falo a verdade*". Usando lógica matemática, descubra se existe ou não ouro na ilha.

$\surd$ **7.** Substitua "___" por "$\in$" ou "$\subseteq$" ou ambos nos itens abaixo:

(a) $\{\emptyset\}$ ___ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

(b) $\{\emptyset\}$ ___ $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$.

(c) $\{\{\emptyset\}\}$ ___ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

(d) $\{\{\emptyset\}\}$ ___ $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$.

(e) $\{\{\emptyset\}\}$ ___ $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

(f) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ___ $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}$.

$\surd$ **8.** Prove que $\langle a, b\rangle = \langle a', b'\rangle \iff (a = a') \wedge (b = b')$, onde $\langle a, b\rangle := \{\{a, \emptyset\}, \{b, \{\emptyset\}\}\}$.

$\surd\surd$ **9.** A Diferença Simétrica $\triangle$ entre conjuntos é definida como $A \triangle B := \{x \in U : (x \in A) \oplus (x \in B)\}$. Prove os seguintes itens, onde A, B e C são conjuntos quaisquer e $\mathcal{P}(\cdot)$ é o conjunto das partes.

(a) $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$.

(b) $A \triangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

(c) $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

(d) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. Quando é igual?

(e) $A \triangle B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$.

(f) $A \triangle B = \overline{A} \triangle \overline{B}$.

(g) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.

(h) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

$\surd\surd$ **10.** Prove ou dê um contra-exemplo para os itens abaixo, onde A, B e C são conjuntos.

(a) $A - (B - C) = (A - B) - C$

(b) $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

(c) $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

(d) $A \cup (B \triangle C) = (A \cup B) \triangle (A \cup C)$

(e) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(f) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$\surd\surd$ **11.** Prove que se $A \subseteq B$, então $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ e $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Também determine $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))$.

$\surd\surd$ **12.** Prove por **indução** os itens abaixo, onde $n, a, b \in \mathbb{N}$ (conjunto dos números naturais). **Dicas** para os itens (k) e (ℓ): $(1.1)^7 < 2 < (1.1)^8$ e $(1.001)^{2303} < 10 < (1.001)^{2304}$.

(a) $\forall n \geq 8 \;\; \exists a, b : \;\; n = 3a + 5b$.

(b) $\forall n \geq 18 \;\; \exists a, b : \;\; n = 4a + 7b$.

(c) $\forall n \geq 64 \;\; \exists a, b : \;\; n = 5a + 17b$.

(d) $\forall n \geq 0 : \;\; \exists a : \;\; 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7a$.

(e) $\forall n \geq 0 : \;\; \exists a : \;\; 3^{2n+2} + 2^{6n+1} = 11a$.

(f) $\forall n \geq 0 : \;\; \exists a : \;\; 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 133a$.

(g) $\forall n \geq 0 : \;\; n < 2^n$.

(h) $\forall n \geq 10 : \;\; 100n < 2^n$.

(i) $\forall n \geq 4 : \;\; n^2 \leq 2^n < n!$

(j) $\forall n \geq 0 : \;\; n < (1.5)^n$.

(k) $\forall n \geq 48 : \;\; n < (1.1)^n$.

(ℓ) $\forall n \geq 9216 : \;\; n < (1.001)^n$.

$\surd\surd$ **13.** Prove por **indução matemática** os seguintes resultados sobre somatórios:

(a) $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(b) $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(c) $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(d) $$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

(e) $$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

(f) $$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$$

$\surd\surd\surd$ **14.** Encontre as fórmulas fechadas para os seguinte somatórios e prove-as por indução. (**Dica:** teste casos pequenos com $n = 1, 2, 3, 4$).

(a) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

(b) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$