Algoritmos Probabilísticos

Lista 3 de Exercícios

1. Considere uma função $F : \{0, 1, ..., n-1\} \rightarrow \{0, 1, ..., m\}$ que satisfaz a seguinte condição:

$$F((x + y) \, mod \, n) = (F(x) + F(y)) \, mod \, m$$

   Suponha que os valores desta função foram armazenados em uma tabela, mas um acidente corrompeu 1/5 das entradas, de modo que não temos a garantia de que os valores nestas posições estão corretos.

   Descreva um algoritmo probabilístico que, dado um valor de entrada z, retorne o valor de $F(z)$ com a garantia de que este valor está correto com probabilidade 1/2, **para todo valor de entrada** z.

   Seu algoritmo deve fazer o menor número possível de consulta à tabela.

2. Considere a seguinte variação do problema da coleção de cupons.

   Cada caixa de cereal contém um cupom de uma coleção de 2n cupons. Os cupons são organizados em n pares, de modo que os cupons 1 e 2 formam um par, os cupons 3 e 4 formam um par, e assim por diante. A coleção é considerada completa quando possuímos pelo menos um cupom de cada par.

   a. Qual o número médio de caixas de cereal que devem ser compradas para completar a coleção?
   b. Generalize o resultado anterior para a situação em que existem kn cupons, organizados em n grupos com k cupons cada. Novamente, a coleção é considerada completa quando possuímos pelo menos um cupom de cada grupo.

3. Um modelo simples para o mercado de ações sugere que, a cada dia, uma ação com preço q aumenta o seu valor para qr, onde $r > 1$, com probabilidade p, e diminui seu valor para q/r com probabilidade $1 - p$, independentemente do seu comportamento nos dias anteriores.

   Suponha que em um determinado dia o preço de uma ação é igual a 1, e seja X_d o preço dessa ação após d dias. Calcule

   a. $E[X_d]$
   b. $Var(X_d)$

4. Neste problema, mostraremos como construir uma permutação aleatória π dos números no conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, utilizando uma caixa que fornece números aleatórios independentes e uniformemente distribuídos no conjunto $\{1, 2, \ldots, k\}$, onde $k \geq n$.

   A ideia é construir uma função injetiva $f : \{1, \ldots, n\} \rightarrow \{1, \ldots, k\}$. A permutação então é obtida ordenando os números em $\{1, \ldots, n\}$ de acordo com os valores de $f(.)$.

   A função é construída pelo seguinte algoritmo:

```
Para  j:=1  Ate  n

      escolha o valor de f(j) consultando sucessivamente a caixa,
        e atribuindo a f(j) o primeiro valor que ainda nao foi
        associado a nenhum outro numero
```

a. Prove que esse procedimento constrói uma permutação aleatória (i.e., que toda permutação tem probabilidade $1/n!$ de ser obtida).

b. Calcule o número médio de consulta à caixa quando $k = n$ e $k = 2n$.

c. Utilize a desigualdade de Chernoff para estimar a probabilidade de que o número de consulta exceda $4n$, quando $k = 2n$.

5. Seja $G = (V, E)$ um grafo não-direcionado com n vértices. Considere o seguinte método para encontrar um conjunto independente de G. Dada uma permutação σ dos vértices, defina o subconjunto $S(\sigma)$ da seguinte maneira: para cada vértice i, coloque i no subconjunto $S(\sigma)$ se e somente se nenhum vizinho de i no grafo precede o vértice i na permutação σ.

   a. Mostre que $S(\sigma)$ é um conjunto independente de G.

   b. Apresente um algoritmo probabilístico que encontre um conjunto independente de G com tamanho médio
   $$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i + 1}$$
   onde d_i é o grau do vértice i em G.

   c. Prove que todo grafo G possui um conjunto independente com pelo menos $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i+1}$ vértices.