

Capítulo 5.6

INDUÇÃO MATEMÁTICA COMPLETA (ou FORTE)

Indução Matemática Forte (ou Completa)

Princípio da Indução Matemática Forte

- ▶ A indução matemática normal é contemplada pela indução forte.
- ▶ **Indução normal 1:** Provar que vale para $n + 1$ assumindo que vale para n
- ▶ **Indução normal 2:** Provar que vale para n assumindo que vale para $n - 1$
- ▶ **Indução forte:** Provar que vale para n assumindo que vale para todo valor menor que n

Números F_n de Fibonacci

Números de Fibonacci: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

- ▶ $F_0 = 0$; $F_1 = 1$
- ▶ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $\forall n \geq 2$

Limite superior: $F_n < 2^n$, $\forall n \geq 0$

- ▶ **Caso base:** $F_0 = 0 < 1 = 2^0$; $F_1 = 1 < 2^1$
- ▶ **H.I.:** Fixe $n \geq 2$ e suponha $F_k < 2^k$, $\forall 0 \leq k < n$
- ▶ **P.I.:** Vamos provar que $F_n < 2^n$.
- ▶ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} < 2^{n-1} + 2^{n-2} = 3 \cdot 2^{n-2} < 4 \cdot 2^{n-2} = 2^n$

Números F_n de Fibonacci

Números de Fibonacci: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

- ▶ $F_0 = 0$; $F_1 = 1$
- ▶ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $\forall n \geq 2$

Limite inferior: $F_n > (1.6^n)/3$, $\forall n > 0$

- ▶ **Caso base:** $F_1 = 1 > 1.6^1/3$; $F_2 = 1 > 1.6^2/3$
- ▶ **H.I.:** Fixe $n \geq 3$ e suponha $F_k > 1.6^k/3$, $\forall 1 \leq k < n$
- ▶ **P.I.:** Vamos provar que $F_n > 1.6^n/3$.
- ▶ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} > 1.6^{n-1}/3 + 1.6^{n-2}/3 =$
- ▶ $= 2.6 \cdot (1.6)^{n-2}/3 > 2.56 \cdot (1.6)^{n-2}/3 = 1.6^n/3$

Números F_n de Fibonacci

Números de Fibonacci: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

- ▶ $F_0 = 0$; $F_1 = 1$
- ▶ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $\forall n \geq 2$

Limite superior: $F_n < 1.618^n$, $\forall n \geq 0$

- ▶ **Proporção Áurea:** $x = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618 \implies x^2 = x + 1$.
- ▶ **Caso base:** $F_0 = 0 < 1 = 1.618^0$; $F_1 = 1 < 1.618^1$
- ▶ **H.I.:** Fixe $n \geq 2$ e suponha $F_k < 1.618^k$, $\forall 0 \leq k < n$
- ▶ **P.I.:** Vamos provar que $F_n < 1.618^n$.
- ▶ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} < 1.618^{n-1} + 1.618^{n-2} =$
- ▶ $= (2.618) \cdot 1.618^{n-2} = (1.618)^2 \cdot 1.618^{n-2} = 1.618^n$

Números F_n de Fibonacci

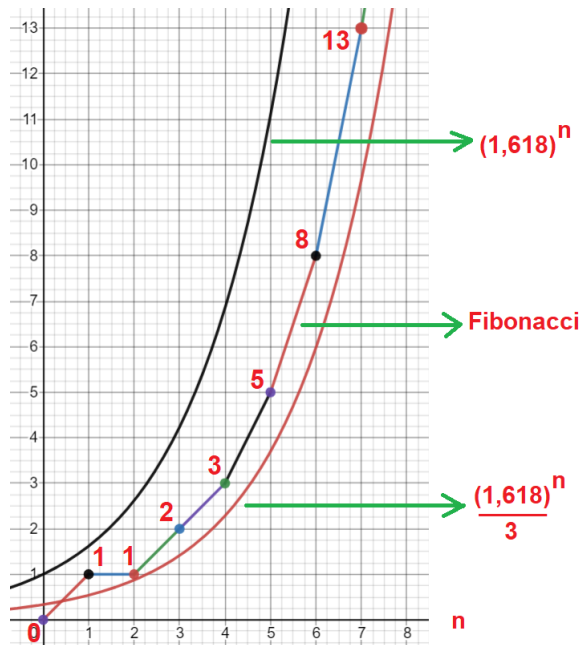
Números de Fibonacci: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

- ▶ $F_0 = 0$; $F_1 = 1$
- ▶ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $\forall n \geq 2$

Limite inferior: $F_n > (1.618^n)/3$, $\forall n > 0$

- ▶ **Proporção Áurea:** $x = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618 \implies x^2 = x + 1$.
- ▶ **Caso base:** $F_1 = 1 > 1.618^1/3$; $F_2 = 1 > 1.618^2/3$
- ▶ **H.I.:** Fixe $n \geq 3$ e suponha $F_k > 1.618^k/3$, $\forall 1 \leq k < n$
- ▶ **P.I.:** Vamos provar que $F_n > 1.618^n/3$.
- ▶ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} > 1.618^{n-1}/3 + 1.618^{n-2}/3 =$
- ▶ $= (2.618) \cdot 1.618^{n-2}/3 = (1.618)^2 \cdot 1.618^{n-2}/3 = 1.618^n/3$

Números F_n de Fibonacci: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...



Números F_n de Fibonacci: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

- ▶ $F_0 = 0$; $F_1 = 1$; $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $\forall n \geq 2$
- ▶ Proporção Áurea: $x^2 - x - 1 = 0 \implies$ raízes $\alpha, \beta = (1 \pm \sqrt{5})/2$.
- ▶ Provar por indução que: $F(n) = F'(n)$, onde

$$F'(n) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

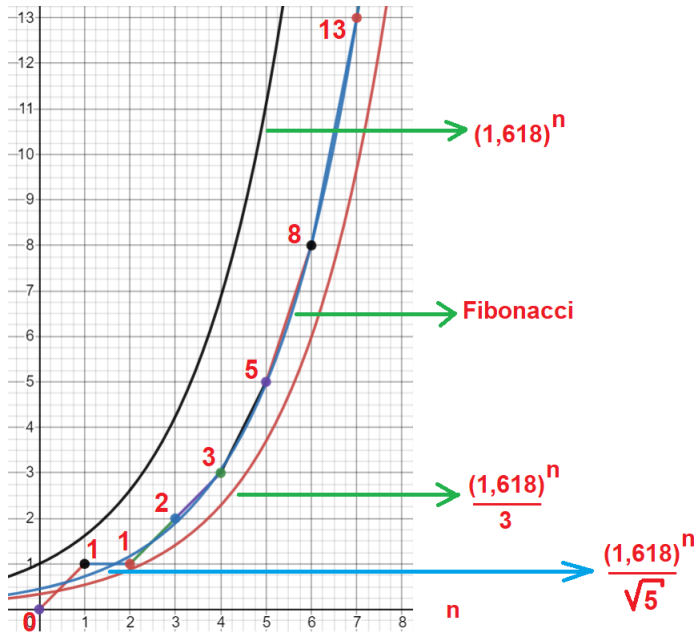
Prova por Indução Forte

- ▶ **BASE:** $F'(0) = 0$ e $F'(1) = 1$. OK
- ▶ **Hipótese de Indução:** Fixe $n \geq 2$ e suponha valer para todo valor $k = 0, \dots, n-1$.
- ▶ **Passo da Indução:** Vamos provar que vale para n .
- ▶ $F(n) = F(n-1) + F(n-2) = F'(n-1) + F'(n-2)$. Logo:

$$F(n) = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1} + \alpha^{n-2} - \beta^{n-2}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n-2}(\alpha + 1) - \beta^{n-2}(\beta + 1)}{\alpha - \beta}$$

- ▶ $F(n) = (\alpha^{n-2} \cdot \alpha^2 - \beta^{n-2} \cdot \beta^2) / (\alpha - \beta) = F'(n)$

Números F_n de Fibonacci: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...



Exercícios de prova passada

Prove que $\forall n \geq 700 : n < (1.01)^n$. **Dica:** $(1.01)^{231} < 10 < (1.01)^{232}$.

▶ Base: $696 < 700 < 10^3 < (1.01)^{3 \cdot 232} = (1.01)^{696} < 1.01^{700}$

▶ H.I: Fixe $n > 700$ e assumo valer para todo inteiro $700 \leq k < n$.

▶ P.I.:

$$1.01^n = 1.01 \cdot (1.01^{n-1}) > 1.01 \cdot (n-1) = n + 0.01 \cdot (n-100) > n$$

Prove que $\forall n \geq 96 : n^2 < (1.1)^n$. **Dica:** $(1.1)^{23} < 10 < (1.1)^{24}$.

▶ Base: $(96)^2 < (100)^2 = 10^4 < (1.1)^{4 \cdot 24} = (1.1)^{96}$

▶ H.I: Fixe $n > 96$ e assumo valer para todo inteiro $96 \leq k < n$.

▶ P.I.:

$$1.1^n = 1.1 \cdot (1.1^{n-1}) > 1.1 \cdot (n-1)^2 = n^2 + 0.1 \cdot (n^2 - 22n + 10) > n^2$$

Prove que $\forall n \geq 100 : n^{10} < 2^n$. **Dica:** $10^3 < 2^{10}$ e $(1.01)^{10} < 2$.

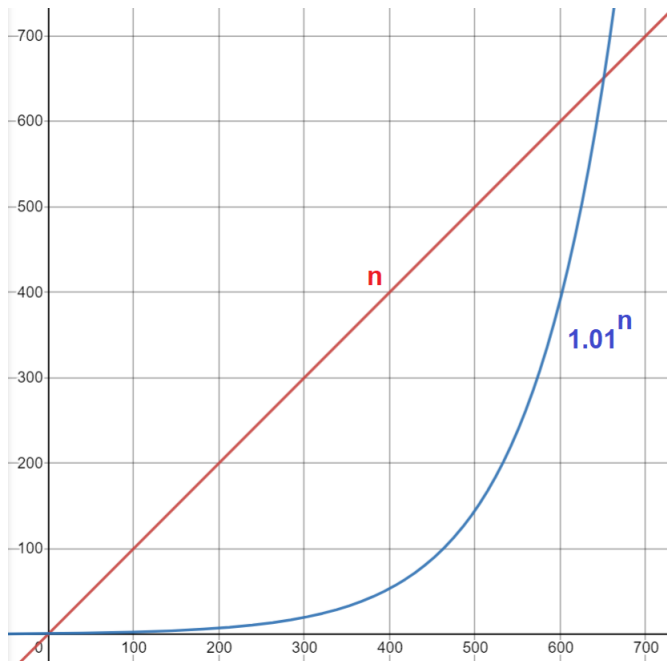
▶ Base: $100^{10} = 10^{20} < 10^{30} = (1000)^{10} < 1024^{10} = 2^{100}$

▶ H.I: Fixe $n > 100$ e assumo valer para todo inteiro $100 \leq k < n$.

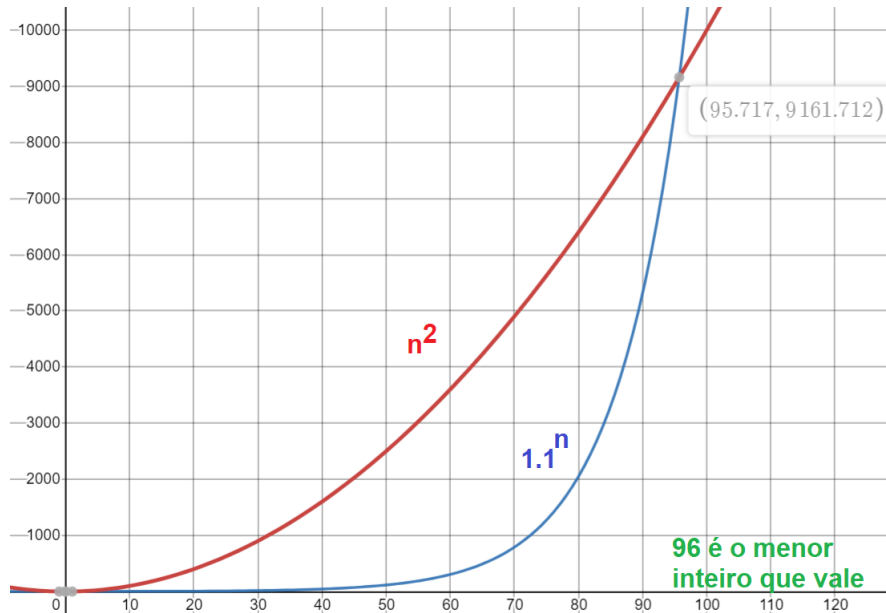
▶ P.I.: $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} > 2(n-1)^{10} > (1.01)^{10}(n-1)^{10} =$

▶ $= (1.01n - 1.01)^{10} = (n + 0.01 \cdot (n - 101))^{10} \geq n^{10}$

Exercícios de prova passada



Exercícios de prova passada



Exercícios de prova passada

Prove que, para todo inteiro $n \geq 2$, o **complemento da interseção** de n conjuntos quaisquer A_1, A_2, \dots, A_n é igual a **união dos complementos** desses n conjuntos.

Prova por indução forte (apesar da indução normal ser suficiente)

- ▶ **Base** $n = 2$: $\overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ (OK por De Morgan)
- ▶ **H.I.:** Fixe $n > 2$ e assumo valer para todo inteiro $2 \leq k < n$.
- ▶ **P.I.:** Vamos provar que vale para n

$$\overline{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n} = \overline{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}} \cup \overline{A_n} = \overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_{n-1}} \cup \overline{A_n}$$

Exercícios de prova passada

Prove que, para todo inteiro $n \geq 2$, o **complemento da união** de n conjuntos quaisquer A_1, \dots, A_n é igual a **interseção dos complementos** desses n conjuntos.

Prova por indução forte (apesar da indução normal ser suficiente)

- ▶ **Base** $n = 2$: $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ (OK por De Morgan)
- ▶ **H.I.**: Fixe $n > 2$ e assumo valer para todo inteiro $2 \leq k < n$.
- ▶ **P.I.**: Vamos provar que vale para n

$$\overline{A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup A_n} = \overline{A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}} \cap \overline{A_n} = \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

Capítulo 6

RELAÇÕES

Relações - Exercício 6.1

Exercício 6.1:

Seja A o conjunto de todas as pessoas vivas hoje. Seja \mathcal{R} o conjunto de todos os pares $(p, q) \in A \times A$ tais que a pessoa p é filha ou filho da pessoa q . Descreva os conjuntos $Dom(\mathcal{R})$, $Img(\mathcal{R})$, $Dom(\mathcal{R}) \cap Img(\mathcal{R})$ e $Dom(\mathcal{R}) \cup Img(\mathcal{R})$.

Solução

- ▶ $Dom(\mathcal{R})$ = conjunto das pessoas vivas com pai ou mãe vivos.
- ▶ $Img(\mathcal{R})$ = conjunto das pessoas vivas com um filho vivo.
- ▶ $Dom(\mathcal{R}) \cap Img(\mathcal{R})$ = conjunto das pessoas vivas com pai ou mãe vivos e um filho vivo.
- ▶ $Dom(\mathcal{R}) \cup Img(\mathcal{R})$ = conjunto das pessoas vivas com pai, mãe ou um filho vivos.

Relações - Exercício 6.2

Exercício 6.2:

Seja \mathcal{R} a relação que consiste de todos os pares (x, y) de números reais tais que $(x^2 - 2)^2 + y^2 = 1$. Determine $Dom(\mathcal{R})$ e $Img(\mathcal{R})$.

Solução

- ▶ $(x^2 - 2)^2 = 1 - y^2 \implies 1 - y^2 \geq 0 \implies y^2 \in [0, 1] \implies y \in [-1, 1]$.
- ▶ $Img(\mathcal{R}) = [-1, 1]$
- ▶ $(x^2 - 2) = \pm\sqrt{1 - y^2} \implies x = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{1 - y^2}}$
- ▶ $y \in [-1, 1] \implies \sqrt{1 - y^2} \in [0, 1] \implies 2 \pm \sqrt{1 - y^2} \in [1, 3]$
- ▶ $\implies \sqrt{2 \pm \sqrt{1 - y^2}} \in [1, \sqrt{3}] \implies x \in [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$
- ▶ $Dom(\mathcal{R}) = [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$

Relações - Exercício 6.3

Exercício 6.3:

Seja A o conjunto dos inteiros entre 0 e 10, inclusive. Seja \mathcal{R} a relação com todos os pares da forma $(x, x^2 - 5)$ que estão em $A \times A$. Determine $Dom(\mathcal{R})$ e $Img(\mathcal{R})$.

Solução

- ▶ $(0, 0 - 5), (1, 1 - 5), (2, 4 - 5)$
- ▶ $(3, 9 - 5) = (3, 4)$
- ▶ $(4, 16 - 5), (5, 25 - 5), \dots, (10, 100 - 5)$
- ▶ $x^2 - 5 \geq 0 \implies x^2 \geq 5 \implies x \geq 3$
- ▶ $x^2 - 5 \leq 10 \implies x^2 \leq 15 \implies x \leq 3$
- ▶ $\mathcal{R} = \{(3, 4)\} \implies Dom(\mathcal{R}) = \{3\}$ e $Img(\mathcal{R}) = \{4\}$

Relações - Exercício 6.4

Exercício 6.4:

Prove que, para qualquer relação \mathcal{R} , a imagem $Img(\mathcal{R})$ é vazia se e somente se o domínio $Dom(\mathcal{R})$ é vazio.

Solução

- ▶ $\mathcal{R} = \emptyset \implies \nexists (a, b) \in \mathcal{R} \implies Img(\mathcal{R}) = \emptyset$
- ▶ $\mathcal{R} \neq \emptyset \implies \exists (a, b) \in \mathcal{R} \implies \exists b : b \in Img(\mathcal{R}) \implies Img(\mathcal{R}) \neq \emptyset$
- ▶ **Conclusão:** $Img(\mathcal{R}) = \emptyset \iff \mathcal{R} = \emptyset$
- ▶ **Analogamente:** $Dom(\mathcal{R}) = \emptyset \iff \mathcal{R} = \emptyset$
- ▶ **Portanto:** $Img(\mathcal{R}) = \emptyset \iff \mathcal{R} = \emptyset \iff Dom(\mathcal{R}) = \emptyset$

Definição de **restrição** de uma relação

Seja R uma relação. Para conjuntos quaisquer A e B , definimos $R[A, B]$ como sendo a **restrição** de R a A e B : ou seja, $R[A, B] = R \cap (A \times B)$. Por simplicidade, seja $R[A] = R[A, A]$.

Propriedades das relações restritas

$$P1: R[A \cap B] = R[A] \cap R[B]$$

$$P2: R[A \cup B] \supseteq R[A] \cup R[B]$$

$$P3: R[A - B] \subseteq R[A] - R[B]$$

Demonstração-P1: seja $(x, y) \in R$

- ▶ $(x, y) \in R[A \cap B] \iff x \in A \cap B \wedge y \in A \cap B \iff$
- ▶ $\iff x \in A \wedge x \in B \wedge y \in A \wedge y \in B \iff$
- ▶ $\iff (x, y) \in R[A] \wedge (x, y) \in R[B] \iff (x, y) \in R[A] \cap R[B]$
- ▶ \square

Definição de **restrição** de uma relação

Seja R uma relação. Para conjuntos quaisquer A e B , definimos $R[A, B]$ como sendo a **restrição** de R a A e B : ou seja, $R[A, B] = R \cap (A \times B)$. Por simplicidade, seja $R[A] = R[A, A]$.

Propriedades das relações restritas

$$P1: R[A \cap B] = R[A] \cap R[B]$$

$$P2: R[A \cup B] \supseteq R[A] \cup R[B]$$

$$P3: R[A - B] \subseteq R[A] - R[B]$$

Demonstração-P2: seja $(x, y) \in R$

- ▶ $(x, y) \in R[A] \cup R[B] \iff (x, y) \in R[A] \vee (x, y) \in R[B] \iff$
- ▶ $\iff (x \in A \wedge y \in A) \vee (x \in B \wedge y \in B) \iff$
- ▶ $\iff (x \in A \vee x \in B) \wedge (y \in A \vee y \in B) \wedge (\neg \vee \neg) \wedge (\neg \vee \neg) \implies$
- ▶ $\implies x \in A \cup B \wedge y \in A \cup B \iff (x, y) \in R[A \cup B]$

Definição de **restrição** de uma relação

Seja R uma relação. Para conjuntos quaisquer A e B , definimos $R[A, B]$ como sendo a **restrição** de R a A e B : ou seja, $R[A, B] = R \cap (A \times B)$. Por simplicidade, seja $R[A] = R[A, A]$.

Propriedades das relações restritas

$$P1: R[A \cap B] = R[A] \cap R[B]$$

$$P2: R[A \cup B] \supseteq R[A] \cup R[B]$$

$$P3: R[A - B] \subseteq R[A] - R[B]$$

Demonstração-P2: contraexemplo para igualdade

- ▶ $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$
- ▶ $R[A] = \{(1, 1)\}$, $R[B] = \{(2, 2)\}$, $R[A] \cup R[B] = \{(1, 1), (2, 2)\}$
- ▶ $R[A \cup B] = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$
- ▶ \square

Definição de **restrição** de uma relação

Seja R uma relação. Para conjuntos quaisquer A e B , definimos $R[A, B]$ como sendo a **restrição** de R a A e B : ou seja, $R[A, B] = R \cap (A \times B)$. Por simplicidade, seja $R[A] = R[A, A]$.

Propriedades das relações restritas

$$P1: R[A \cap B] = R[A] \cap R[B]$$

$$P2: R[A \cup B] \supseteq R[A] \cup R[B]$$

$$P3: R[A - B] \subseteq R[A] - R[B]$$

Demonstração-P3: seja $(x, y) \in R$

- ▶ $(x, y) \in R[A - B] \iff x \in A - B \wedge y \in A - B \iff$
- ▶ $\iff (x \in A) \wedge (x \notin B) \wedge (y \in A) \wedge (y \notin B) \implies$
- ▶ $\implies ((x, y) \in R[A]) \wedge ((x, y) \notin R[B]) \iff$
- ▶ $\iff (x, y) \in R[A] - R[B] \quad \square$

Definição de **restrição** de uma relação

Seja R uma relação. Para conjuntos quaisquer A e B , definimos $R[A, B]$ como sendo a **restrição** de R a A e B : ou seja, $R[A, B] = R \cap (A \times B)$. Por simplicidade, seja $R[A] = R[A, A]$.

Propriedades das relações restritas

$$P1: R[A \cap B] = R[A] \cap R[B]$$

$$P2: R[A \cup B] \supseteq R[A] \cup R[B]$$

$$P3: R[A - B] \subseteq R[A] - R[B]$$

Demonstração-P3: contraexemplo para igualdade

- ▶ $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$
- ▶ $R[A] = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, $R[B] = \{(2, 2), (3, 3)\}$
- ▶ $R[A] - R[B] = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$
- ▶ $A - B = \{1\} \implies R[A - B] = \{(1, 1)\}$ □

Definição de **restrição** de uma relação

Seja R uma relação. Para conjuntos quaisquer A e B , definimos $R[A, B]$ como sendo a **restrição** de R a A e B : ou seja, $R[A, B] = R \cap (A \times B)$. Por simplicidade, seja $R[A] = R[A, A]$.

Propriedades das relações restritas

$$P1: R[A \cap B] = R[A] \cap R[B]$$

$$P2: R[A \cup B] \supseteq R[A] \cup R[B]$$

$$P3: R[A - B] \subseteq R[A] - R[B]$$

$$P1++: R[A \cap B, X \cap Y] = R[A, X] \cap R[B, Y]$$

$$P2++: R[A \cup B, X \cup Y] \supseteq R[A, X] \cup R[B, Y]$$

$$P3++: R[A - B, X - Y] \subseteq R[A, X] - R[B, Y]$$

Exercício 6.7:

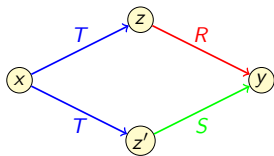
Seja R o conjunto de todos os pares (x, x^2) onde x é um número inteiro.
Seja S o conjunto de todos os pares $(3y, y)$ onde y é um número natural.
Descreva as relações $R \circ S$ e $S \circ R$.

Solução

- ▶ $(x, y) \in S \circ R \iff \exists z : (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S \iff$
- ▶ $\iff x^2 = z = 3y \iff y = x^2/3 \iff x = 3a \ (a \in \mathbb{Z}) \iff$
- ▶ $S \circ R = \{(3a, 3a^2) : a \in \mathbb{Z}\}$
- ▶ \square
- ▶ $(x, y) \in R \circ S \iff \exists z \in \mathbb{N} : (x, z) \in S \wedge (z, y) \in R \iff$
- ▶ $\iff x = 3z \wedge y = z^2 \iff y = x^2/9 \iff x = 3a \ (a \in \mathbb{N}) \iff$
- ▶ $R \circ S = \{(3a, a^2) : a \in \mathbb{N}\}$
- ▶ \square

Algumas propriedades sobre Existenciais

- ▶ $(\exists x : P(x) \wedge Q(x)) \implies (\exists x : P(x)) \wedge (\exists x' : Q(x'))$
- ▶ $(\exists x : P(x) \vee Q(x)) \iff (\exists x : P(x)) \vee (\exists x' : Q(x'))$
- ▶ $(\exists x : P(x)) \wedge (\forall x' : P(x') \rightarrow Q(x')) \implies (\exists x : P(x) \wedge Q(x))$



Exercício 6.8:

Sejam R, S, T relações quaisquer. Prove que:

- ▶ $(R \cap S) \circ T \subseteq R \circ T \cap S \circ T$
- ▶ $(R \cup S) \circ T = R \circ T \cup S \circ T$
- ▶ $(R - S) \circ T \supseteq R \circ T - S \circ T$

Solução

- ▶ $(x, y) \in (R \cap S) \circ T \Leftrightarrow \exists z : (x, z) \in T \wedge (z, y) \in R \cap S \Leftrightarrow$
- ▶ $\Leftrightarrow \exists z : (x, z) \in T \wedge (z, y) \in R \wedge (z, y) \in S \Rightarrow$
- ▶ $\Rightarrow (\exists z : (x, z) \in T \wedge (z, y) \in R) \wedge (\exists z' : (x, z') \in T \wedge (z', y) \in S) \Leftrightarrow$
- ▶ $\Leftrightarrow (x, y) \in R \circ T \wedge (x, y) \in S \circ T \Leftrightarrow$
- ▶ $\Leftrightarrow (x, y) \in R \circ T \cap S \circ T \quad \square$

Contraexemplo da igualdade

- ▶ $T = \{(x, z), (x, z')\}, R = \{(z, y)\}, S = \{(z', y)\} \Rightarrow$
- ▶ $\Rightarrow R \cap S = \emptyset \Rightarrow (R \cap S) \circ T = \emptyset$
- ▶ $R \circ T = \{(x, y)\}$ e $S \circ T = \{(x, y)\} \Rightarrow R \circ T \cap S \circ T = \{(x, y)\}$

Exercício 6.8:

Sejam R, S, T relações quaisquer. Prove que:

- ▶ $(R \cap S) \circ T \subseteq R \circ T \cap S \circ T$
- ▶ $(R \cup S) \circ T = R \circ T \cup S \circ T$
- ▶ $(R - S) \circ T \supseteq R \circ T - S \circ T$

Solução

- ▶ $(x, y) \in (R \cup S) \circ T \Leftrightarrow \exists z : (x, z) \in T \wedge (z, y) \in R \cup S \Leftrightarrow$
- ▶ $\Leftrightarrow \exists z : (x, z) \in T \wedge ((z, y) \in R \vee (z, y) \in S) \Leftrightarrow$
- ▶ $\Leftrightarrow \exists z : ((x, z) \in T \wedge (z, y) \in R) \vee ((x, z) \in T \wedge (z, y) \in S) \Leftrightarrow$
- ▶ $\Leftrightarrow \exists z : ((x, z) \in T \wedge (z, y) \in R) \vee \exists z' : ((x, z') \in T \wedge (z', y) \in S) \Leftrightarrow$
- ▶ $\Leftrightarrow (x, y) \in R \circ T \vee (x, y) \in S \circ T \Leftrightarrow$
- ▶ $\Leftrightarrow (x, y) \in R \circ T \cup S \circ T \quad \square$

Exercício 6.8:

Sejam R, S, T relações quaisquer. Prove que:

- ▶ $(R \cap S) \circ T \subseteq R \circ T \cap S \circ T$
- ▶ $(R \cup S) \circ T = R \circ T \cup S \circ T$
- ▶ $(R - S) \circ T \supseteq R \circ T - S \circ T$

Solução

- ▶ $(x, y) \in R \circ T - S \circ T \Leftrightarrow$
- ▶ $\Leftrightarrow (x, y) \in R \circ T \wedge (x, y) \notin S \circ T \Leftrightarrow$
- ▶ $\Leftrightarrow \exists z : ((x, z) \in T \wedge (z, y) \in R) \wedge \forall z' : (x, z') \in T \rightarrow (z', y) \notin S \Rightarrow$
- ▶ $\Rightarrow \exists z : (x, z) \in T \wedge (z, y) \in R \wedge (z, y) \notin S \Leftrightarrow$
- ▶ $\Leftrightarrow \exists z : (x, z) \in T \wedge (z, y) \in R - S \Leftrightarrow (x, y) \in (R - S) \circ T$

Contraexemplo da igualdade

- ▶ $T = \{(x, z), (x, z')\}, R = \{(z, y)\}, S = \{(z', y)\} \Rightarrow$
- ▶ $\Rightarrow R - S = \{(z, y)\} \Rightarrow (R - S) \circ T = \{(x, y)\}$
- ▶ $R \circ T = \{(x, y)\}$ e $S \circ T = \{(x, y)\} \Rightarrow R \circ T - S \circ T = \emptyset$

Exercício 6.9:

Seja $n \geq 1$ um número natural e A o conjunto dos inteiros entre 1 e n , inclusive. Note que o conjunto $A \times A$ tem n^2 pares. Encontre duas relações R e S sobre A , cada uma com no máximo $2n$ pares, tal que $R \circ S$ seja o conjunto $A \times A$.

Solução

- ▶ $S = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), \dots, (n, 1)\}$
- ▶ $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (1, n)\}$
- ▶ $\forall x, y \in A: (x, 1) \in S \text{ e } (1, y) \in R \implies (x, y) \in R \circ S$
- ▶ $R \circ S = A \times A$

Inversa da Composta

Lema (inversa da composta)

Dadas relações R e S , temos que

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$$

Prova:

- ▶ $(x, y) \in (S \circ R)^{-1} \iff (y, x) \in S \circ R \iff$
- ▶ $\iff \exists z : (y, z) \in R \wedge (z, x) \in S \iff$
- ▶ $\iff \exists z : (x, z) \in S^{-1} \wedge (z, y) \in R^{-1} \iff$
- ▶ $\iff (x, y) \in R^{-1} \circ S^{-1}$

Associatividade da Composição de Relações

Lema

Dadas relações R , S e T , temos que:

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$$

Prova - Exercício 6.13

- ▶ $(a, d) \in T \circ (S \circ R) \iff \exists c : (a, c) \in S \circ R \wedge (c, d) \in T \iff$
- ▶ $\exists c : (\exists b : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S) \wedge (c, d) \in T \iff$
- ▶ $\exists b : \exists c : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S \wedge (c, d) \in T \iff$
- ▶ $\exists b : (a, b) \in R \wedge (b, d) \in T \circ S \iff (a, d) \in (T \circ S) \circ R$



Potência de uma Relação R

Definição recursiva

$R^1 = R$ e $\forall m \in \mathbb{N}, m \geq 1: R^{m+1} = R^m \circ R$

Exemplo:

Seja R a relação em \mathbb{N} tal que $(x, y) \in R \iff y = x + 1$. Ou seja, $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), \dots\}$.

Descreva R^m para $m \geq 1$ qualquer

- ▶ $\forall x \in \mathbb{N}: (x, x+1) \in R$ e $(x+1, x+2) \in R \iff (x, x+2) \in R^2$
- ▶ $\forall x \in \mathbb{N}: (x, x+1) \in R$ e $(x+1, x+3) \in R^2 \iff (x, x+3) \in R^3$
- ▶ $\forall x \in \mathbb{N}: (x, x+1) \in R$ e $(x+1, x+4) \in R^3 \iff (x, x+4) \in R^4$
- ▶ ...
- ▶ $R^m = \{(x, x+m) : x \in \mathbb{N}\}$

Potência de uma Relação R

Definição recursiva

$$R^1 = R \text{ e } \forall m \in \mathbb{N}, m \geq 1: R^{m+1} = R^m \circ R$$

Exemplo:

Seja R a relação em \mathbb{N} tal que $(x, y) \in R \iff y = x + 1 \vee y = x + 2$.

Ou seja, $R = \{(x, x + 1), (x, x + 2) : x \in \mathbb{N}\}$.

Ou seja, $R = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), \dots\}$.

Descreva R^m para $m \geq 1$ qualquer

- ▶ $R^2 = \{(x, x + 2), (x, x + 3), (x, x + 4) : x \in \mathbb{N}\}$
- ▶ $R^3 = \{(x, x + 3), (x, x + 4), (x, x + 5), (x, x + 6) : x \in \mathbb{N}\}$
- ▶ $R^4 = \{(x, x + 4), \dots, (x, x + 8) : x \in \mathbb{N}\}$
- ▶ ...
- ▶ $R^m = \{(x, x + m), \dots, (x, x + 2m) : x \in \mathbb{N}\}$

Potência de uma Relação R

Definição recursiva

$$R^1 = R \text{ e } \forall m \in \mathbb{N}, m \geq 1: R^{m+1} = R^m \circ R$$

Exercício 6.16

Prove que, para toda relação R e quaisquer m e n inteiros positivos:
 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$.

Solução

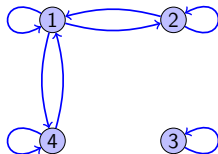
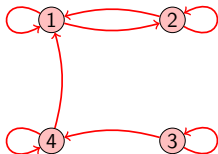
- ▶ Prova por indução em n .
- ▶ **Caso base:** $n = 1 \Rightarrow R^m \circ R^1 = R^m \circ R = R^{m+1}$. OK
- ▶ **HI:** Fixe $n > 1$ e assumamos que vale para todo $n' < n$. Ou seja, para todo $1 \leq n' < n: R^m \circ R^{n'} = R^{m+n'}$.
- ▶ **PI:** Vamos provar que vale para n .
- ▶ $R^m \circ R^n = R^m \circ (R^{n-1} \circ R) = (R^m \circ R^{n-1}) \circ R =$
- ▶ $= R^{m+n-1} \circ R = R^{m+n}$

Relação R em A - $R \subseteq A \times A$ - $Dom(R) \cup Img(R) \subseteq A$

- ▶ Reflexiva sobre A : $\forall a \in A : (a, a) \in R$ Todos os laços
- ▶ Irreflexiva: $\nexists a : (a, a) \in R$ Nenhum laço
- ▶ Simétrica: $(x, y) \in R \implies (y, x) \in R$ Vai e volta
- ▶ Antissimétrica: $(x, y) \in R, x \neq y \implies (y, x) \notin R$ Vai, não volta
- ▶ Transitiva: $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \implies (x, z) \in R$

Exemplos: $A = \{1, 2, 3, 4\}$

- ▶ $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$
- ▶ $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$
- ▶ $R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 4), (4, 1), (4, 4)\}$

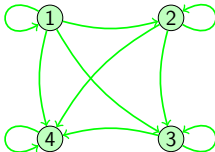
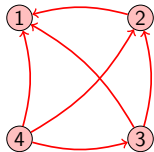


Relação R em A - $R \subseteq A \times A$ - $Dom(R) \cup Img(R) \subseteq A$

- ▶ Reflexiva sobre A : $\forall a \in A : (a, a) \in R$ Todos os laços
- ▶ Irreflexiva: $\nexists a : (a, a) \in R$ Nenhum laço
- ▶ Simétrica: $(x, y) \in R \implies (y, x) \in R$ Vai e volta
- ▶ Antissimétrica: $(x, y) \in R, x \neq y \implies (y, x) \notin R$ Vai, não volta
- ▶ Transitiva: $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \implies (x, z) \in R$

Exemplos: $A = \{1, 2, 3, 4\}$

- ▶ $R_4 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$
- ▶ $R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$
- ▶ $R_6 = \{(3, 4)\}$



6.3. Propriedades de Relações

Exercício 6.17

Prove que uma relação R é irreflexiva se e somente se ela é disjunta de I_A onde $A = \text{Dom}(R)$ ou $A = \text{Img}(R)$.

Lembrete:

- ▶ $I_A = \{(a, a) : a \in A\}$ (relação Identidade do conjunto A)
- ▶ R é irreflexiva se e só se $\nexists a : (a, a) \in R$.

Solução

- ▶ R é irreflexiva $\iff \nexists a : (a, a) \in R \iff$
- ▶ $\iff \nexists a \in \text{Dom}(R) : (a, a) \in R \iff R \cap I_{\text{Dom}(R)} = \emptyset$
- ▶ ...
- ▶ $\iff \nexists a \in \text{Img}(R) : (a, a) \in R \iff R \cap I_{\text{Img}(R)} = \emptyset$

6.3. Propriedades de Relações

Exercício 6.18

Prove que uma relação R é simétrica se e somente se ela é igual à sua inversa.

Lembrete:

- ▶ $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$ (relação Inversa de R)
- ▶ R é simétrica se e só se $\forall(x, y) \in R : (y, x) \in R$.

Solução

- ▶ R é simétrica $\iff \forall(x, y) \in R : (y, x) \in R \iff$
- ▶ $\iff \forall(x, y) \in R : (x, y) \in R^{-1} \iff R \subseteq R^{-1} \iff$
- ▶ ...
- ▶ $\iff \forall(y, x) \in R^{-1} : (y, x) \in R \iff R^{-1} \subseteq R \iff$
- ▶ ...
- ▶ $\iff R = R^{-1}$

6.3. Propriedades de Relações

Exercício 6.19

Prove que uma relação R é antissimétrica e irreflexiva se e somente se ela é disjunta de sua inversa.

Lembretes:

- ▶ A e B são disjuntos se e só se $A \cap B = \emptyset$
- ▶ $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$ (relação Inversa de R)
- ▶ R é antissimétrica se e só se $\forall x \neq y : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$.

Solução

- ▶ R é antissimétrica e irreflexiva $\iff \forall (x, y) \in R : (y, x) \notin R \iff$
- ▶ $\iff \forall (x, y) \in R : (x, y) \notin R^{-1} \iff R \cap R^{-1} = \emptyset$

6.3. Propriedades de Relações

Exercício 6.20

Seja R uma relação simétrica e transitiva sobre um conjunto A . Prove que, se para todo $x \in A$, existe um $y \in A$ tal que xRy , então R é reflexiva.

Lembretes:

- ▶ $xRy \iff (x, y) \in R$
- ▶ R é simétrica se e só se $\forall (x, y) \in R : (y, x) \in R$.
- ▶ R é transitiva se e só se $\forall (x, y), (y, z) \in R : (x, z) \in R$.
- ▶ R é reflexiva sobre A se e só se $\forall a \in A : (a, a) \in R$.

Solução

- ▶ Seja R uma relação simétrica e transitiva tal que $\forall x \in A : \exists y : xRy$.
- ▶ Seja x um elemento qualquer de A . Logo existe y tal que $(x, y) \in R$.
- ▶ R é simétrica: $(y, x) \in R$.
- ▶ Como R é transitiva: $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \iff (x, x) \in R$.
- ▶ Como $\forall x \in A : (x, x) \in R$, então R é reflexiva.

Exercício Lista 2

Mostre que se R é uma relação reflexiva e transitiva, então $R \cap R^{-1}$ é uma reflexiva, simétrica e transitiva.

Solução

- ▶ **REF:** $x \in \text{Dom}(R \cap R^{-1}) \implies (x, x) \in R \implies (x, x) \in R^{-1} \implies$
- ▶ $\implies (x, x) \in R \cap R^{-1} \implies R \cap R^{-1}$ é reflexiva
- ▶ **SIM:** $(x, y) \in R \cap R^{-1} \implies (x, y) \in R \implies (y, x) \in R^{-1}$
- ▶ $(x, y) \in R \cap R^{-1} \implies (x, y) \in R^{-1} \implies (y, x) \in R$
- ▶ $(x, y) \in R \cap R^{-1} \implies (y, x) \in R \cap R^{-1} \implies R \cap R^{-1}$ é simétrica
- ▶ **TR:** $(x, y), (y, z) \in R \cap R^{-1} \implies (x, y), (y, z) \in R \implies (x, z) \in R$.
- ▶ $(x, y), (y, z) \in R \cap R^{-1} \implies (x, y), (y, z) \in R^{-1} \implies$
- ▶ $\implies (z, y), (y, x) \in R \implies (z, x) \in R \implies (x, z) \in R^{-1}$.
- ▶ $(x, y), (y, z) \in R \cap R^{-1} \implies (x, z) \in R \cap R^{-1} \implies R \cap R^{-1}$ é transitiva

Exercício Lista 2

Sejam A um conjunto e $R \subseteq A \times A$. Seja ainda $S = R^2 = R \circ R$:

$$S = \{(a, a') \mid \exists a'' \in A, (a, a'') \in R \wedge (a'', a') \in R\}.$$

Prove ou dê um contra-exemplo:

- (a) R é reflexiva, simétrica e transitiva $\implies S$ também o é.
- (b) S é reflexiva, simétrica e transitiva $\implies R$ também o é.

Solução (b): Contraexemplo

- ▶ $R = \{(1, 2), (2, 1)\} \implies S = \{(1, 1), (2, 2)\} \implies$
- ▶ $\implies S$ é reflexiva, simétrica e transitiva, mas R **não** é reflexiva.



Exercício Lista 2

Sejam A um conjunto e $R \subseteq A \times A$. Seja ainda $S = R^2 = R \circ R$:

$$S = \{(a, a') \mid \exists a'' \in A, (a, a'') \in R \wedge (a'', a') \in R\}.$$

Prove ou dê um contra-exemplo:

- (a) R é reflexiva, simétrica e transitiva $\implies S$ também o é.
- (b) S é reflexiva, simétrica e transitiva $\implies R$ também o é.

Solução (a):

- ▶ **REF:** $a \in A \implies (a, a) \in R \implies$
- ▶ $\implies (a, a) \in R \wedge (a, a) \in R \implies (a, a) \in S \implies S$ é reflexiva.
- ▶ **SIM:** $(a, c) \in S \implies \exists b : (a, b), (b, c) \in R \implies$
- ▶ $\implies (c, b), (b, a) \in R \implies (c, a) \in S \implies S$ é simétrica.
- ▶ **TR:** $(a, c), (c, e) \in S \implies \exists b, d : (a, b), (b, c), (c, d), (d, e) \in R \implies$
- ▶ $\implies (a, c), (c, e) \in R \implies (a, e) \in S \implies S$ é transitiva.

6.3.1. Composição e Transitividade

Exercício 6.21

Demonstre a afirmação, ou encontre um contraexemplo: “Se $R^4 \subseteq R$, então R é transitiva”.

Lembretes:

- ▶ Teorema 6.3: R é transitiva $\iff R \circ R = R^2 \subseteq R$
- ▶ Teorema 6.4: R é transitiva $\iff R^n \subseteq R, \forall n \geq 1$

Solução: contraexemplo

- ▶ $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$
- ▶ $R^2 = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$
- ▶ $R^3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
- ▶ $R^4 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$
- ▶ $R^4 = R$, mas R **não** é transitiva
- ▶ \square

6.3.1. Composição e Transitividade

Exercício 6.21'

Demonstre a afirmação, ou encontre um contraexemplo: “Se $R^5 \subseteq R$, então R é transitiva”.

Lembretes:

- ▶ Teorema 6.3: R é transitiva $\iff R \circ R = R^2 \subseteq R$
- ▶ Teorema 6.4: R é transitiva $\iff R^n \subseteq R, \forall n \geq 1$

Solução: contraexemplo

- ▶ $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$
- ▶ $R^2 = \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$
- ▶ $R^3 = \{(1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$
- ▶ $R^4 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- ▶ $R^5 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$
- ▶ $R^5 = R$, mas R **não** é transitiva \square

6.3.1. Composição e Transitividade

Exercício 6.21"

Demonstre a afirmação, ou encontre um contraexemplo: "Se $R^3 \subseteq R$, então R é transitiva".

Lembretes:

- ▶ Teorema 6.3: R é transitiva $\iff R \circ R = R^2 \subseteq R$
- ▶ Teorema 6.4: R é transitiva $\iff R^n \subseteq R, \forall n \geq 1$

Solução: contraexemplo

- ▶ $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$
- ▶ $R^2 = \{(1, 1), (2, 2)\}$
- ▶ $R^3 = \{(1, 2), (2, 1)\}$
- ▶ $R^3 = R$, mas R **não** é transitiva \square
- ▶ pois $(1, 2) \in R$ e $(2, 1) \in R$, mas $(1, 1) \notin R$ e $(2, 2) \notin R$
- ▶ \square

6.4. Representação de Relações usando Matrizes

Notações \sum (somatório) e \prod (produtório)

Sejam x_1, x_2, \dots, x_n números reais.

$$\sum_{k=1}^n x_k = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

$$\prod_{k=1}^n x_k = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n$$

Notações \wedge e \vee

Sejam S_1, S_2, \dots, S_n sentenças lógicas (com valor **F** ou **V**).

$$\bigvee_{k=1}^n S_k = S_1 \vee S_2 \vee S_3 \vee \dots \vee S_n$$

$$\bigwedge_{k=1}^n S_k = S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge \dots \wedge S_n$$

6.4. Representação de Relações usando Matrizes

Notações \cap e \cup

Sejam C_1, C_2, \dots, C_n conjuntos.

$$\bigcup_{k=1}^n C_k = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \dots \cup C_n$$

$$\bigcap_{k=1}^n C_k = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \dots \cap C_n$$

Notações \wedge e \vee

Sejam S_1, S_2, \dots, S_n sentenças lógicas (com valor **F** ou **V**).

$$\bigvee_{k=1}^n S_k = S_1 \vee S_2 \vee S_3 \vee \dots \vee S_n$$

$$\bigwedge_{k=1}^n S_k = S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge \dots \wedge S_n$$

Fecho Reflexivo

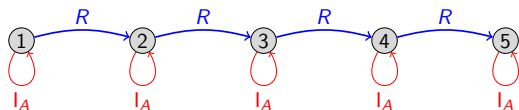
Exemplo: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

▶ $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$

▶

▶ $I_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$

▶ Fecho Reflexivo de $R = R \cup I_A$



Fecho Simétrico

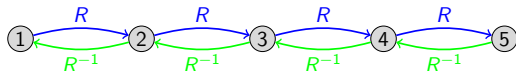
Exemplo: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

▶ $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$



▶ $R^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4)\}$

▶ Fecho Simétrico de $R = R \cup R^{-1}$



Fecho Transitivo

Exemplo: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

▶ $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$

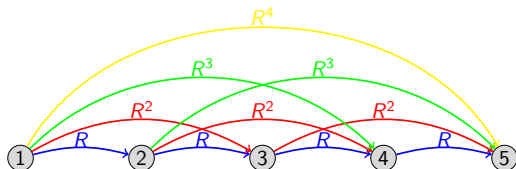


▶ $R^2 = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$

▶ $R^3 = \{(1, 4), (2, 5)\}$

▶ $R^4 = \{(1, 5)\}$

▶ Fecho Transitivo $R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$



Fecho Transitivo

Teorema 6.6: Relação S transitiva: $R \subseteq S \implies R^* \subseteq S$

Dada uma relação R , toda relação transitiva S que contém R também contém o fecho transitivo R^* de R .

Prova:

- ▶ Relações R e S tais que $R \subseteq S$ e S é transitiva.
- ▶ **Teorema 6.2:** $R \subseteq S \implies R^n \subseteq S^n, \forall n \geq 1$.
- ▶ **Teorema 6.4:** S transitiva $\implies S^n \subseteq S, \forall n \geq 1$.
- ▶ Logo $R^n \subseteq S, \forall n \geq 1$.
- ▶ $R^* = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \subseteq S. \square$

Fechos de uma Relação - Exercício 6.22

Exercício 6.22:

Encontre os fechos reflexivo, simétrico e transitivo das seguintes relações:

- ▶ $A = \{a, b, c\}$ e $R_1 = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, b)\}$.
- ▶ $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $R_2 = \{(0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 0)\}$.

Solução:

- ▶ Reflexivo = $R_1 \cup \{(b, b), (c, c)\}$
- ▶ Simétrico = $R_1 \cup \{(b, a)\}$
- ▶ Transitivo $R_1^* = R_1 \cup \{(a, c), (b, b), (c, c)\}$
- ▶
- ▶
- ▶ Reflexivo = $R_2 \cup \{(0, 0), (3, 3)\}$
- ▶ Simétrico = $R_2 \cup \{(1, 0), (2, 1), (0, 2), (0, 3)\}$
- ▶ Transitivo $R_2^* = R_2 \cup \{(0, 2), (0, 0), (1, 0), (2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$

Fechos de uma Relação - Exercício 6.23

Exercício 6.23:

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e

$R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 5), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 4)\}$. Encontre as potências R^2, R^3, R^4, R^5, R^6 e o fecho transitivo R^* .

Solução:

$$R^2 = \{(1,1), (1,5), (2,3), (3,3), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,5), (5,3), (5,4)\}$$

$$R^3 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,5), (3,1), (3,3), (3,4), (3,5), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (5,1), (5,3), (5,5)\}$$

$$R^4 = \{(1, \underline{1-3-4-5}), (2, \underline{1-2-3-4}), (3, \underline{1-2-3-4-5}), (4, \underline{1-3-4-5}), (5, \underline{1-2-3-4-5})\}$$

$$R^5 = \{(1, \underline{1-2-3-4-5}), (2, \underline{1-3-4-5}), (3, \underline{1-2-3-4-5}), (4, \underline{1-2-3-4-5}), (5, \underline{1-2-3-4-5})\}$$

$$R^6 = \{(1, \underline{1-\dots-5}), (2, \underline{1-\dots-5}), (3, \underline{1-\dots-5}), (4, \underline{1-\dots-5}), (5, \underline{1-\dots-5})\}$$

$$\blacktriangleright R^* = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup R^5 \cup R^6 = R^6 = A \times A$$

$$\blacktriangleright (1, 3), (3, 5), (5, 2), (2, 4), (4, 3), (3, 1) \in R$$

$$\blacktriangleright \text{Ciclo com todos os elementos de } A \implies R^* = A \times A$$

Fechos de uma Relação - Exercício 6.24

Exercício 6.24:

Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Encontre a menor relação contendo a relação $R = \{(1, 2), (1, 4), (3, 3), (4, 1)\}$ que é:

- (a) Simétrica e reflexiva sobre A .
- (b) Reflexiva sobre A e transitiva.
- (c) Simétrica e transitiva.
- (d) Reflexiva sobre A , simétrica e transitiva.

Solução:

- (a) $R \cup \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (4, 4), (5, 5), (2, 1)\}$
- (b) $R \cup \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (4, 4), (5, 5)\}$
- (c) $R \cup \{(2, 1), (1, 1), (2, 2), (4, 4)\}$
- (d) $R \cup \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (4, 4), (5, 5), (2, 1)\}$

Fechos de uma Relação - Exercício 6.25

Exercício 6.25:

Sejam R_1 e R_2 relações sobre o conjunto A , tais que $R_1 \subseteq R_2$.

- ▶ S_1 e S_2 fechos **reflexivos** de R_1 e R_2 . Prove que $S_1 \subseteq S_2$.
- ▶ S_1 e S_2 fechos **simétricos** de R_1 e R_2 . Prove que $S_1 \subseteq S_2$.
- ▶ S_1 e S_2 fechos **transitivos** de R_1 e R_2 . Prove que $S_1 \subseteq S_2$.

Solução:

▶ **REF:** $R_1 \subseteq R_2 \implies R_1 \cup I_A \subseteq R_2 \cup I_A \implies S_1 \subseteq S_2$. \square

▶ **SIM:**

$$R_1 \subseteq R_2 \implies R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1} \implies R_1 \cup R_1^{-1} \subseteq R_2 \cup R_2^{-1} \implies S_1' \subseteq S_2'. \\ \square$$

▶ **TR:** $R_1 \subseteq R_2 \implies R_1^n \subseteq R_2^n, \forall n \geq 1 \implies R_1^1 \cup R_1^2 \cup R_1^3 \dots \subseteq \\ R_2^1 \cup R_2^2 \cup R_2^3 \dots \implies R_1^* \subseteq R_2^*$. \square

Fechos de uma Relação - Exercício 6.26

Sejam R_1 e R_2 relações sobre o conjunto A , e $R = R_1 \cup R_2$.

- ▶ S_1 , S_2 e S fechados **reflexivos** de R_1 , R_2 e R . Prove $S_1 \cup S_2 = S$.
- ▶ S_1 , S_2 e S fechados **simétricos** de R_1 , R_2 e R . Prove $S_1 \cup S_2 = S$.
- ▶ S_1 , S_2 e S fechados **transitivos** de R_1 , R_2 e R . Prove $S_1 \cup S_2 \subseteq S$.
Encontre um exemplo em que não é igual.

Solução:

- ▶ **REF:** $S = (R_1 \cup R_2) \cup I_A = (R_1 \cup I_A) \cup (R_2 \cup I_A) = S_1 \cup S_2$. \square
- ▶ **SIM:**
 $S = (R_1 \cup R_2) \cup (R_1 \cup R_2)^{-1} = (R_1 \cup R_2) \cup (R_1^{-1} \cup R_2^{-1}) = S_1 \cup S_2$. \square
- ▶ **TR:** $R_1^n \cup R_2^n \subseteq (R_1 \cup R_2)^n, \forall n \geq 1 \implies R_1^* \cup R_2^* \subseteq (R_1 \cup R_2)^*$.
- ▶ **Exemplo:** $R_1 = \{(1, 2)\}, R_2 = \{(2, 3)\} \implies$
- ▶ $\implies R_1^* \cup R_2^* = \{(1, 2), (2, 3)\} \neq \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\} = (R_1 \cup R_2)^*$.

Fechos de uma Relação - Exercício 6.27

Sejam R_1 e R_2 relações sobre o conjunto A , e $R = R_1 \cap R_2$.

- ▶ S_1 , S_2 e S fechados **reflexivos** de R_1 , R_2 e R . Prove $S = S_1 \cap S_2$.
- ▶ S_1 , S_2 e S fechados **simétricos** de R_1 , R_2 e R . Prove $S \subseteq S_1 \cap S_2$.
Mostre um exemplo em que não é igual.
- ▶ S_1 , S_2 e S fechados **transitivos** de R_1 , R_2 e R . Prove $S \subseteq S_1 \cap S_2$.
Mostre um exemplo em que não é igual.

Solução:

- ▶ **REF:** $S = (R_1 \cap R_2) \cup I_A = (R_1 \cup I_A) \cap (R_2 \cup I_A) = S_1 \cap S_2$. \square
- ▶ **SIM:** $S = (R_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap R_2)^{-1} = (R_1 \cap R_2) \cup (R_1^{-1} \cap R_2^{-1}) = S_1 \cap S_2 \cap (R_1 \cup R_2^{-1}) \cap (R_2 \cup R_1^{-1})$. \square
- ▶ $R_1 = \{(1, 2)\}$, $R_2 = \{(2, 1)\} \Rightarrow R = \emptyset$, $S_1 = S_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$
- ▶ **TR:** $(R_1 \cap R_2)^n \subseteq R_1^n \cap R_2^n$, $\forall n \geq 1 \Rightarrow (R_1 \cap R_2)^* \subseteq R_1^* \cap R_2^*$.
- ▶ **Exemplo:** $R_1 = \{(1, 2), (2, 4)\}$, $R_2 = \{(1, 3), (3, 4)\} \Rightarrow$
- ▶ $\Rightarrow (R_1 \cap R_2)^* = \emptyset \neq \{(1, 4)\} = R_1^* \cap R_2^*$.

Fechos de uma Relação - Exercício 6.28

Exercício 6.28:

Seja R a relação sobre o conjunto dos números inteiros positivos tal que aRb se e somente se existe um número primo p tal que $a = pb$. Qual é o fecho reflexivo de R ? Qual é o fecho transitivo de R ? Qual é o fecho transitivo e reflexivo?

Solução:

- ▶ **REF:** $S = R \cup I_{\mathbb{N}^*}$, onde $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$. Ou seja,
- ▶ aSb se e só se $a = pb$ para p primo ou igual a $p = 1$.
- ▶ **TR:** aR^*b se e só se $a > b > 0$ e a é múltiplo de b .
- ▶ **TR+REF:** $aR^{**}b$ se e só se $a \geq b > 0$ e a é múltiplo de b
- ▶ **Exemplo:** $300R100, 100R50, 50R10, 10R2 \Rightarrow 100R^*2$
- ▶ **Mais formalmente:**
 $aR^n b \iff \exists \text{ primos } p_1, \dots, p_n : a = p_1 p_2 \dots p_n b$. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, todo número > 1 pode ser decomposto em um produto de números primos e por $R^* = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \dots$

Capítulo 7.1

ORDENS PARCIAIS

Ordens Parciais - Exercício 7.1

Exercício 7.1:

Seja R a relação sobre o conjunto dos números inteiros positivos ($\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}^*$) tal que aRb se e somente se existe um inteiro positivo k tal que $a = k \cdot b$. Prove que R é uma relação de ordem.

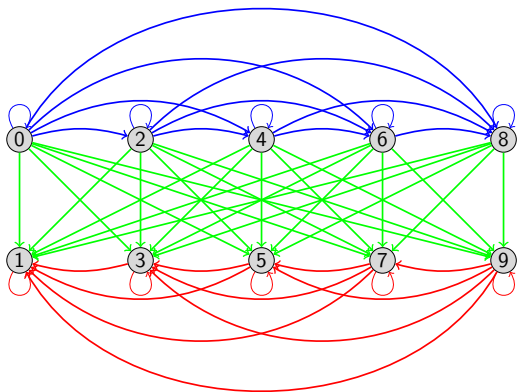
Solução:

- ▶ **REF:** $a = 1 \cdot a, \forall a \in \mathbb{Z}^+ \iff aRa \iff (a, a) \in R. \quad \square$
- ▶ **AntiSIM:** $aRb \wedge a \neq b \implies a = kb$ para $k \geq 2 \implies b < a \implies (b, a) \notin R. \quad \square$
- ▶ **TR:** $aRb \wedge bRc \implies a = k_1 \cdot b \wedge b = k_2 \cdot c$ com $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^+ \implies a = k_1 k_2 \cdot c \implies aRc \iff (a, c) \in R. \quad \square$

Ordens Parciais - Exercício 7.2

Exercício 7.2:

Seja A o conjunto dos inteiros de 0 a 9 e seja R a relação sobre A tal que aRb se e somente se a é par e b é ímpar, ou ambos são pares e $a \leq b$, ou ambos são ímpares e $a \geq b$. Esta é uma relação de ordem?



Ordens Parciais - Exercício 7.2

Exercício 7.2:

Seja A o conjunto dos inteiros de 0 a 9 e seja R a relação sobre A tal que aRb se e somente se a é par e b é ímpar, ou ambos são pares e $a \leq b$, ou ambos são ímpares e $a \geq b$. Esta é uma relação de ordem?

Solução: SIM

▶ REF: $a \leq a \wedge a \geq a \iff aRa, \forall a \in \mathbb{Z}$. \square

▶ AntiSIM:

i aRb, a par e b ímpar $\implies (b, a) \notin R$ \square

ii aRb, a, b pares e $a < b \implies b \not\leq a \implies (b, a) \notin R$. \square

iii aRb, a, b ímpares e $a > b \implies b \not\geq a \implies (b, a) \notin R$. \square

▶ TR: $aRb \wedge bRc$:

▶ a, b, c pares e $a \leq b \leq c \implies a, c$ pares e $a \leq c \implies aRc$

▶ a, b pares, c ímpar e $a \leq b \implies a$ par e c ímpar $\implies aRc$

▶ a par, b, c ímpares e $b \leq c \implies a$ par e c ímpar $\implies aRc$

▶ a, b, c ímpares e $a \geq b \geq c \implies a, c$ ímpares e $a \geq c \implies aRc$

Ordens Parciais - Exercício 7.3

Exercício 7.3:

Considere a relação R sobre os pares ordenados de inteiros $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $(a, b)R(c, d) \iff (a \leq c) \vee (b \leq d)$ para quaisquer inteiros a, b, c e d . Esta é uma relação de ordem?

Solução: **NÃO**

- ▶ Contraexemplo:
- ▶ $a = d = 1$ e $b = c = 2 \implies (1, 2)R(2, 1)$, pois $a \leq c$
- ▶ $a = d = 2$ e $b = c = 1 \implies (2, 1)R(1, 2)$, pois $b \leq d$
- ▶ Portanto R não é antissimétrica. Logo R não é uma relação de ordem.

Ordens Parciais - Exercício 7.3b

Exercício 7.3b:

Considere a relação R sobre os pares ordenados de inteiros $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $(a, b)R(c, d) \iff (a \leq c) \wedge (b \leq d)$ para quaisquer inteiros a, b, c e d . Esta é uma relação de ordem?

Solução: **SIM**

- ▶ **REF:** $a \leq a \wedge b \leq b \implies (a, b)R(a, b), \forall a, b \in \mathbb{Z}. \quad \square$
- ▶ **AntiSIM:** $(a, b)R(c, d) \wedge (c, d)R(a, b) \implies a \leq c \wedge b \leq d \wedge c \leq a \wedge d \leq b \implies a = c \wedge b = d \implies (a, b) = (c, d). \quad \square$
- ▶ **TR:** $(a, b)R(c, d) \wedge (c, d)R(x, y) \implies a \leq c \leq x \wedge b \leq d \leq y \implies a \leq x \wedge b \leq y \implies (a, b)R(x, y). \quad \square$

Ordens Parciais - Exercício 7.4

Exercício 7.4:

Seja R uma relação de ordem sobre um conjunto B ($R \subseteq B \times B$). Prove que, para todo subconjunto A de B ($A \subseteq B$), a restrição R' de R a A é uma relação de ordem sobre A .

Solução:

- ▶ **Lembrete:** $xR'y \iff xRy \wedge x, y \in A$
- ▶ **REF:** $a \in A \implies a \in B \implies (a, a) \in R \implies (a, a) \in R'$. \square
- ▶ **AntiSIM:** $xR'y \implies xRy \implies (y, x) \notin R \implies (y, x) \notin R'$. \square
- ▶ **TR:** $xR'y \wedge yR'z \implies x, y, z \in A \wedge xRy \wedge yRz \implies x, z \in A \wedge xRz \implies xR'z$. \square

Ordens Parciais - Exercício 7.5

Exercício 7.5:

Para quaisquer relações de ordem R e S sobre um conjunto A , a relação $R \cup S$ é sempre uma relação de ordem sobre A ? E a relação $R \cap S$?

Prove suas respostas.

Solução: **NÃO** para $R \cup S$

- ▶ Contraexemplo: $A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$ e $S = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\} \implies R$ e S são ordens parciais.
- ▶ No entanto, $\{(1, 2), (2, 3)\} \subseteq R \cup S$, mas $(1, 3) \notin R \cup S$.

Solução: **SIM** para $R \cap S$

- ▶ **REF**: $(a, a) \in R \wedge (a, a) \in S, \forall a \in A \implies (a, a) \in R \cap S. \quad \square$
- ▶ **AntiSIM**: $(x, y) \in R \cap S \wedge x \neq y \implies (y, x) \notin R \wedge (y, x) \notin S \implies (y, x) \notin R \cap S. \quad \square$
- ▶ **TR**: $(x, y) \in R \cap S \wedge (y, z) \in R \cap S \implies (x, z) \in R \wedge (x, z) \in S \implies (x, z) \in R \cap S. \quad \square$

Ordens Parciais - Exercício 7.6

Exercício 7.6:

Seja A o conjunto de todos os arquivos em um sistema de arquivos e seja R a relação sobre A tal que aRb se e somente se o arquivo a contém uma cópia do conteúdo do arquivo b , possivelmente com informações adicionais antes do início de b ou depois do fim de b . A relação R é uma relação de ordem?

Solução: SIM

- ▶ **REF:** Arquivo a contém $a \implies (a, a) \in R$. \square
- ▶ **AntiSIM:** $(a, b) \in R \wedge a \neq b \implies$ arquivo a tem cópia do arquivo b e possui dados extras antes ou depois de sua cópia interna de $b \implies b$ não tem cópia de $a \implies (b, a) \notin R$. \square
- ▶ **TR:** $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \implies a$ tem cópia de b e b tem cópia de $c \implies a$ tem cópia de $c \implies (a, c) \in R$. \square

Ordens Parciais - Exercício 7.7

Exercício 7.7:

Seja A um conjunto de caixas e seja R a relação sobre A tal que aRb se e somente se a caixa a cabe dentro da caixa b . Prove que R é uma relação de ordem estrita.

Solução:

- ▶ **IRREF:** Caixa a não cabe em $a \implies (a, a) \notin R$. \square
- ▶ **AntiSIM:** $(a, b) \in R \implies$ caixa a cabe em $b \implies$ caixa b não cabe em $a \implies (b, a) \notin R$. \square
- ▶ **TR:** $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \implies$ caixa a cabe em b e caixa b cabe em $c \implies$ caixa a cabe na caixa $c \implies (a, c) \in R$. \square

Ordens Parciais - Exercício 7.8

Exercício 7.8:

A ordem estrita sobre um conjunto de caixas definida no exercício 7.7 é uma ordem total?

Solução: **NÃO**

- ▶ Podem existir duas caixas a e b tais que a não cabe em b e também b não cabe em a .
- ▶ Por exemplo, caixas com medidas $1 \times 1 \times 5$ e $2 \times 2 \times 2$.

Ordens Parciais - Exercício 7.9

Exercício 7.9:

Seja R uma relação de ordem **total** sobre um conjunto B ($R \subseteq B \times B$). Prove que, para todo subconjunto A de B ($A \subseteq B$), a restrição R' de R a A também é uma relação de ordem **total** sobre A . (Veja o exercício 7.4.)

Exercício 7.4:

Seja R uma relação de ordem **total** sobre um conjunto B ($R \subseteq B \times B$). Prove que, para todo subconjunto A de B ($A \subseteq B$), a restrição R' de R a A também é uma relação de ordem **total** sobre A .

Solução Ex. 7.9:

- ▶ **Lembrete:** $xR'y \iff xRy \wedge x, y \in A$
- ▶ No Exercício 7.4, provamos que R' é uma relação de ordem. Falta provar que é **total**.
- ▶ $x, y \in A \implies x, y \in B \implies xRy \vee yRx \implies xR'y \vee yR'x. \quad \square$

Exercício 7.10:

Seja R uma relação sobre um conjunto A e seja S a relação complementar, $S = (A \times A) - R$. Prove ou mostre um contraexemplo:

- (i) R é de ordem **se e só se** S é de ordem estrita. (F)
- (ii) R é de ordem **total se e só se** S é de ordem estrita **total**. (V)

-
- ▶ **Contraexemplo (i):** $A = \{1, 2\}$, $1R1$, $2R2$, $1S2$ e $2S1$.
 - ▶ R é ordem, mas S não é antissimétrica (não é ordem estrita)

-
- ▶ **Prova (ii):** R é reflexiva se e somente se S é irreflexiva. Ok.
 - ▶ Suponha que R é uma ordem total e $x, y, z \in A$ são distintos.
 - ▶ $x, y \in A \implies xRy \vee yRx$ (pois R é **total**)
 - ▶ $\implies (xRy \wedge \cancel{yRx}) \vee (yRx \wedge \cancel{xRy})$ (pois R é **antissimétrica**)
 - ▶ $\implies (x\cancel{S}y \wedge ySx) \vee (y\cancel{S}x \wedge xSy) \implies S$ é **total e antissimétrica**
 - ▶ $xSy \wedge ySz \implies zRy \wedge yRx \implies zRx \implies xSz \implies S$ **transitiva**.
 - ▶ Argumento análogo para: S é de ordem estrita $\implies R$ é de ordem.

Conjunto A^k de k -uplas sobre um alfabeto A

Definição k -upla

- ▶ **k -upla** = generalização de Par Ordenado para k ordenadas.
- ▶ pares (duplas $k=2$), triplas ($k=3$), quádruplas ($k=4$), quintuplas ($k=5$), ...
- ▶ **Ex1:** Triplas pitagóricas (3,4,5), (5,12,13), (6,8,10).
- ▶ **Ex2:** Pontos (x, y, z) da esfera de raio 1: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Definição $A^k = A \times A \times \dots \times A$ (k vezes)

Dado conjunto A , definimos A^k o conjunto das k -uplas (ordenadas) com elementos de A .

- ▶ **Ex1:** \mathbb{R}^3 : pontos do espaço tridimensional.
- ▶ **Ex2:** $\{C, K\}^5$ = conjunto dos possíveis resultados ao lançar uma moeda 5 vezes, para C (cara) e K (coroa) = $\left\{ (C,C,C,C,C), (C,C,C,C,K), (C,C,C,K,C), (C,C,C,K,K), (C,C,K,C,C), \dots \right\}$.

Conjunto A^* de palavras sobre um conjunto A

Definição A^* (A estrela)

Dado conjunto A (alfabeto), definimos A^* (A estrela) como o conjunto das seqüências (palavras) finitas de elementos de A (a ordem importa).

▶ **Ex1:** $A = \{a\}$, $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, \dots\}$.

▶ **Ex2:** $A = \{a, b\}$, $A^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \dots\}$.

Chamaremos os elementos de A de letras e os elementos de A^* de palavras. O tamanho de uma palavra u é o seu número de letras. A palavra vazia, denotada por ε ou $()$, tem tamanho 0.

Concatenação:

Dadas duas palavras u e v , a **concatenação** de u e v , escrita uv é a palavra obtida ao se escrever as letras de u seguidas das letras de v .

▶ **Exemplo:** Alfabeto $A = \{a, b\}$, $u = ab$ e $v = ba$.

▶ $uv = abba$, $vu = baab$, $uuvv = ababbaba$

▶ baa é **prefixo** de vu ; aba é **sufixo** de $uuvv$.

Ordem Lexicográfica R^* de uma relação R

É uma Relação de Ordem (R^*) sobre o conjunto A^* de palavras sobre um alfabeto A (dada uma relação de ordem R sobre os elementos de A). *Não confundir com fecho transitivo R^* .* **Exemplo:** dicionário.

Ordem lexicográfica R^* de uma relação R

Dada uma relação de ordem R sobre um conjunto A , seja R^* (**ordem lexicográfica induzida** por R) a relação sobre A^* tal que uR^*v se e só se:

- (i) u é prefixo de v ; ou
- (ii) $u = wau'$ e $v = wbv'$, onde w é o maior prefixo comum entre u e v , os sufixos $u', v' \in A^*$ e as letras $a, b \in A$ satisfazem aRb .

Exemplo: Dicionário

- ▶ $A = \{a, b, c, \dots\}$ e R a relação natural das letras: $aRbRcRdR\dots$
- ▶ $\varepsilon R^* a R^* aa R^* amar R^* amo R^* amor R^* amora R^* b R^* ba$.

Ordem Lexicográfica R^* de uma relação R

É uma Relação de Ordem (R^*) sobre o conjunto A^* de palavras sobre um alfabeto A (dada uma relação de ordem R sobre os elementos de A). Não confundir com fecho transitivo R^* . **Exemplo:** dicionário.

Ordem lexicográfica R^* de uma relação R

Dada uma relação de ordem R sobre um conjunto A , seja R^* (ordem lexicográfica induzida por R) a relação sobre A^* tal que:

- (L1) Para toda palavra $u \in A^*$: $\varepsilon R^* u$.
- (L2) Para toda palavra $u \in A^*$: $u \neq \varepsilon \implies u R^* \varepsilon$.
- (L3) u e v palavras não vazias: $u R^* v$ se e só se $(u_1 \neq v_1 \wedge u_1 R v_1) \vee (u_1 = v_1 \wedge u' R^* v')$, onde u_1 e v_1 são as letras iniciais de u e v , e u' e v' são o que resta de u e v retirando-se estes elementos iniciais.

Exemplo: Dicionário

- ▶ $A = \{a, b, c, \dots\}$ e R a relação natural das letras: $a R b R c R d R \dots$
- ▶ $\varepsilon R^* a R^* aa R^* amar R^* amo R^* amor R^* amora R^* b R^* ba$.

Ordens Parciais - Exercício 7.11

Exercício 7.11:

Seja R uma relação de ordem parcial sobre um conjunto A . Prove que a ordem lexicográfica R^* induzida por R é reflexiva.

Prova:

- ▶ Seja $u \in A^*$ uma palavra qualquer. Queremos provar que uR^*u por indução no tamanho n de u .
- ▶ **Caso base:** $n = 0 \implies u = \varepsilon \implies uR^*u$. (Ok)
- ▶ **H.I.:** Fixe $n \geq 1$ e suponha valer para toda palavra de tam $< n$.
- ▶ **P.I.:** Vamos provar que vale para n . Ou seja, se u de tamanho n , então uR^*u .
- ▶ Seja u_1 a letra inicial de u e seja u' a palavra que resta de u retirando-se este elemento inicial.
- ▶ Por indução, temos que $u'R^*u'$, pois u' tem tamanho $n - 1 < n$.
- ▶ Portanto, pela definição recursiva, uR^*u .

Ordens Parciais - Exercício 7.12

Exercício 7.12:

Seja R uma relação de ordem parcial sobre um conjunto A . Prove que a ordem lexicográfica R^* induzida por R é antissimétrica.

Prova: por Indução

- ▶ Provar por indução no tam n de u que $uR^*v \Rightarrow vR^*u, \forall v \neq u$.
- ▶ **Caso base:** $n = 0 \implies u = \varepsilon$. Por definição $vR^*\varepsilon$. (Ok)
- ▶ **H.I.:** Fixe $n \geq 1$ e suponha valer para toda palavra u de tam $< n$.
- ▶ **P.I.:** Vamos provar que vale para n . Ou seja, se u tem tamanho n , $v \neq u$ e uR^*v , então vR^*u .
- ▶ Sejam u_1 e v_1 as letras iniciais de u e v e sejam u' e v' as palavras que restam de u e v retirando-se estas letras iniciais.
- ▶ Por definição $(u_1 \neq v_1 \wedge u_1Rv_1) \vee (u_1 = v_1 \wedge u'R^*v')$.
- ▶ Se $u_1 \neq v_1$, então $u_1Rv_1 \Rightarrow v_1R^*u_1 \Rightarrow vR^*u$, pois R é antissimétrica.
- ▶ Se $u_1 = v_1$, então $u'R^*v' \implies v'R^*u' \implies vR^*u$.

Ordens Parciais - Exercício 7.13

Exercício 7.13:

Seja R uma relação de ordem parcial sobre um conjunto A . Prove que a ordem lexicográfica R^* induzida por R é transitiva.

Prova: por Indução

- ▶ Provar por indução no tam n de u que $uR^*v \wedge vR^*w \Rightarrow uR^*w$.
- ▶ **Caso base:** $n = 0 \Rightarrow u = \varepsilon$. Por definição uR^*w . (**Ok**).
- ▶ **H.I.:** Fixe $n \geq 1$ e suponha valer para toda palavra u de tam $< n$.
- ▶ **P.I.:** Vamos provar que vale para n . Ou seja, se u tem tamanho n , uR^*v e vR^*w , então uR^*w .
- ▶ Sejam u_1, v_1 e w_1 as letras iniciais de u, v e w e sejam u', v' e w' as palavras que restam de u, v e w retirando-se estas letras iniciais.
- ▶ Se $u_1 \neq w_1$, então u_1Rw_1 e portanto uR^*w (**OK**)
- ▶ Suponha então $u_1 = w_1$. Portanto $v_1 = u_1$.
- ▶ Logo $u'R^*v'$ e $v'R^*w'$. Por H.I: $u'R^*w'$ (pois u' tem tam. $n-1$)
- ▶ Pela definição recursiva de R^* , temos: uR^*w .

Ordens Parciais - Exercício 7.14

Exercício 7.14:

Seja R uma relação de ordem parcial sobre um conjunto A . Prove que a ordem lexicográfica R^* induzida por R é total **se e só se** R é total.

Prova (ida)

- ▶ Contrapositiva: $(P \rightarrow Q) \iff (\neg Q \rightarrow \neg P)$
- ▶ Suponha que R não é total.
- ▶ Então existem letras $a, b \in A$ tais que ~~aRb~~ e ~~bRa~~ .
- ▶ Portanto as palavras $a, b \in A^*$ de uma letra apenas
- ▶ também satisfazem ~~aR^*b~~ e ~~bR^*a~~ .
- ▶ Logo R^* não é total.

Ordens Parciais - Exercício 7.14

Exercício 7.14:

Seja R uma relação de ordem parcial sobre um conjunto A . Prove que a ordem lexicográfica R^* induzida por R é total **se e só se** R é total.

Prova (**volta**): por Indução

- ▶ Palavras distintas $u, v \in A^*$ com tam. $u \leq$ tam. v .
- ▶ Provar por indução no tam n de u que $uR^*v \vee vR^*u$.
- ▶ **Caso base:** $n = 0 \implies u = \varepsilon$. Logo uR^*v , por definição. (**Ok**)
- ▶ **H.I.:** Fixe $n \geq 1$ e suponha valer para toda palavra u de tam $< n$.
- ▶ **P.I.:** Vamos provar que vale para n . Ou seja, se u tem tamanho n , então uR^*v ou vR^*u para todo $v \in A^*$.
- ▶ Sejam u_1 e v_1 as letras iniciais de u e v e sejam u' e v' as palavras que restam de u e v retirando-se estas letras iniciais.
- ▶ $u_1 \neq v_1 \implies u_1Rv_1 \vee v_1Ru_1$ (pois R total) $\implies uR^*v \vee vR^*u$.
- ▶ Portanto suponha $u_1 = v_1$. Logo pela H.I.: $u'R^*v' \vee v'R^*u'$.
- ▶ Logo, por definição, $uR^*v \vee vR^*u$.

Diagrama de Hasse - Exercício 7.15

Exercício 7.15:

Seja A o conjunto dos inteiros entre 1 e 20, inclusive. Seja R a relação sobre A tal que xRy se e somente se x divide y . Construa o diagrama de Hasse de R .

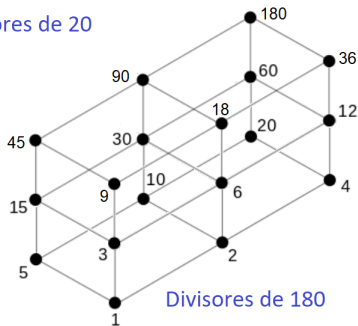
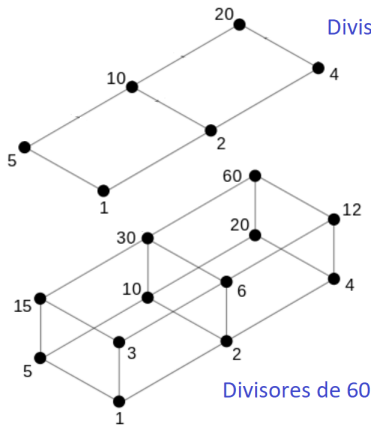


Diagrama de Hasse - Exercício 7.15

Exercício 7.15:

Seja A o conjunto dos inteiros entre 1 e 20, inclusive. Seja R a relação sobre A tal que xRy se e somente se x divide y . Construa o diagrama de Hasse de R .

Todos os inteiros de 1 a 20

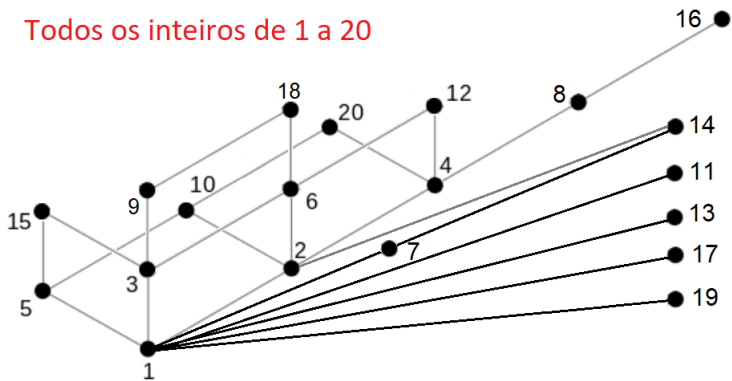


Diagrama de Hasse - Exercício 7.16

Exercício 7.16:

Uma subpalavra de uma palavra x é uma sequência de letras que aparecem em posições consecutivas em x , na mesma ordem. Por exemplo, 'nan' é uma subpalavra de 'banana', mas 'bn' e 'nab' não são. Seja A o conjunto de todas as subpalavras de 'banana' e seja ' \sqsubset ' a relação sobre A tal que $x \sqsubset y$ se e somente se x é subpalavra de y .

(a) Prove que ' \sqsubset ' é uma relação de ordem.

Solução:

- ▶ ' \sqsubset ' é **reflexiva**, pois toda palavra é subpalavra de si mesma.
- ▶ ' \sqsubset ' é **antissimétrica**, pois, se $x \sqsubset y$ (x é subpalavra de y) e $x \neq y$, então y é maior que x e portanto y não pode ser subpalavra de x ($y \not\sqsubset x$).
- ▶ ' \sqsubset ' é **transitiva**, pois, se $x \sqsubset y$ e $y \sqsubset z$, então x é subpalavra de y e y é subpalavra de z , e portanto x é subpalavra de z ($x \sqsubset z$).

Diagrama de Hasse - Exercício 7.16

(b) Construa o diagrama de Hasse de ' \sqsubset '.

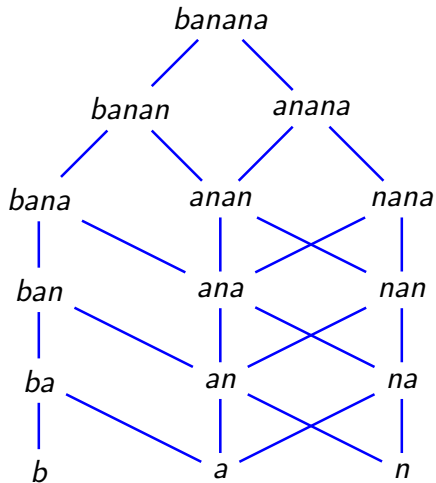


Diagrama de Hasse - Exercício 7.16'

- (b') Construa o diagrama de Hasse de ' \sqsubset ' sobre as subpalavras de "comida".

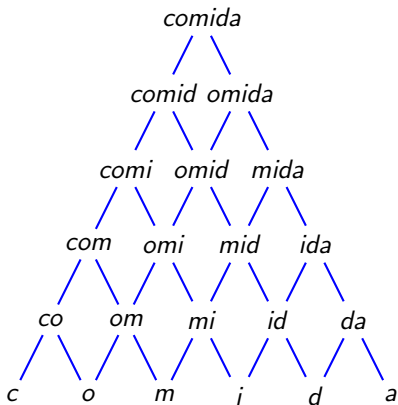


Diagrama de Hasse - Exercício 7.17

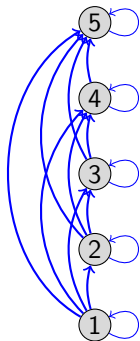
Exercício 7.17:

Descreva o diagrama de Hasse de uma ordem total sobre um conjunto finito A .

Solução:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Relação ' \leq ' sobre A

Conclusão: O diagrama de Hasse de uma Ordem Total é uma linha reta.



Mínimos e Máximos - Exercício 7.20

Exercício 7.20:

Prove que todo conjunto ordenado tem no máximo um elemento mínimo e um elemento máximo.

Solução:

- ▶ Provar por contradição que não pode haver 2 mínimos.
- ▶ Seja R uma relação de ordem sobre um conjunto A qualquer.
- ▶ Suponha que existam dois mínimos a e b distintos em A .
- ▶ Pela definição de mínimo: $\forall x \in A : aRx$ e bRx .
- ▶ Portanto aRb e bRa . Contradição, pois R é antissimétrica.
- ▶ Argumento análogo para o máximo.

Mínimos e Máximos - Exercício 7.21

Exercício 7.21:

Prove que um conjunto finito B não vazio **totalmente** ordenado tem exatamente um elemento mínimo e um elemento máximo.

Solução: por indução

- ▶ Seja R uma relação de ordem **total** sobre o conjunto B .
- ▶ Vamos provar por indução no tamanho n de B .
- ▶ **Caso base:** $n = 1 \implies$ o único elemento de B é mínimo. (**Ok**)
- ▶ **H.I.:** Fixe $n > 1$ e assumamos valer para todo conjunto de tamanho $< n$.
- ▶ **P.I.:** Vamos provar que vale para n . Ou seja, se B tem tamanho n , então B tem elemento mínimo sob a relação R .
- ▶ Seja $b \in B$. Por H.I., $B - \{b\}$ tem elemento mínimo m sob R .
- ▶ R é total $\implies mRb$ ou bRm . Se mRb , então m é mínimo de B .
- ▶ Suponha então bRm . Como $\forall x \in B - \{b\} : mRx$,
- ▶ então $\forall x \in B - \{b\} : bRx$ por transitividade.
- ▶ Como bRb (pois R é reflexiva em B), então b é mínimo em B sob R .

Notação $a \leq_R b$ para uma relação de ordem R

Notação \leq_R

Dada uma **relação de ordem parcial** R , existem três modos de representar pares de R :

- ▶ $(a, b) \in R$; ou
- ▶ aRb ; ou
- ▶ $a \leq_R b$.

Muitas vezes, dizemos que \leq_R é a própria relação de ordem.

Exemplo:

- ▶ Reflexiva em A : $x \leq_R x, \forall x \in A$.
- ▶ Antissimétrica: Se $x \leq_R y$ e $x \neq y$, então $y \not\leq_R x$.
- ▶ Antissimétrica: Se $x \leq_R y$ e $y \leq_R x$, então $x = y$.
- ▶ Transitiva: Se $x \leq_R y$ e $y \leq_R z$, então $x \leq_R z$.

Notações \leq_R , \geq_R , $<_R$ e $>_R$

- ▶ \leq_R é a própria relação de ordem R
- ▶ \geq_R é a relação de ordem inversa R^{-1} de R
- ▶ $<_R$ é a relação de ordem estrita associada a R
- ▶ $>_R$ é a relação de ordem estrita associada a R^{-1}

Definições:

- ▶ $x \geq_R y$ **se e somente se** $y \leq_R x$.
- ▶ $x <_R y$ **se e somente se** $x \leq_R y$ e $x \neq y$.
- ▶ $x >_R y$ **se e somente se** $x \geq_R y$ e $x \neq y$.
- ▶ R é total **se e somente se** $x \leq_R y$ ou $x \geq_R y$, $\forall x, y$.

Exemplo: R relação de continência \subseteq

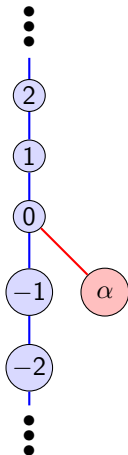
- ▶ \leq_R é a própria relação de ordem \subseteq .
- ▶ \geq_R é a relação de ordem \supseteq .
- ▶ $<_R$ é a relação de ordem estrita \subsetneq .
- ▶ $>_R$ é a relação de ordem estrita \supsetneq .

Exercício 7.23:

Encontre um conjunto A e uma relação de ordem R sobre A tal que existe um único elemento minimal em A sob R , mas que não é mínimo.

Solução:

Conjunto $A = \mathbb{Z} \cup \{\alpha\}$. Relação R sobre A tal que $x \leq_R y$ **se e somente se** x e y estão em \mathbb{Z} , ou $x = \alpha$ e $y \in \mathbb{Z}$ e $y \geq 0$, ou $x = y = \alpha$.



Minimais e Maximais - Exercício 7.24

Exercício 7.24:

Prove que um conjunto finito ordenado **não vazio** tem pelo menos um elemento minimal e um elemento maximal.

Solução: por indução

- ▶ Seja R uma relação de ordem sobre um conjunto finito B .
- ▶ Vamos provar por indução no tamanho n de B .
- ▶ **Caso base:** $n = 1 \implies$ o único elemento de B é minimal e maximal. (**Ok**)
- ▶ **H.I:** Fixe $n > 1$ e assumamos valer para todo conjunto de tamanho $< n$.
- ▶ **P.I:** Vamos provar que vale para n . Ou seja, se B tem tamanho n , então B tem elemento minimal e maximal sob a relação R .
- ▶ Seja $b \in B$. Por H.I., $B - \{b\}$ tem minimal m e maximal M sob R .
- ▶ Por definição, $\forall x \in B - \{b\} : x \not\leq_R m$ e $M \not\leq_R x$.
- ▶ Se $b \not\leq_R m \implies m$ é minimal em B . Se $b \leq_R m \implies b$ é minimal em B .
- ▶ Se $M \not\leq_R b \implies M$ é maximal em B . Se $M \leq_R b \implies b$ é maximal em B .

Minimais e Maximais - Exercício 7.25

Seja $A = \{3, 6, 9, \dots\}$ o conjunto dos múltiplos positivos de 3 e seja R a relação sobre A tal que $x \leq_R y$ se e só se todos os algarismos decimais de x aparecem em y na mesma sequência. Por exemplo, $262 \leq_R 12682$, mas $262 \not\leq_R 12268$. Ache os minimais de A sob R . Existe algum maximal?

Solução:

- ▶ **Não há maximal.** Todo x múltiplo de 3 é sequência de $10 \cdot x$.
- ▶ **Minimais** pertencem à A : múltiplos de 3. Não tem sequência múltipla de 3 em sua sequência de algarismos, além dele mesmo.
- ▶ 3,6,9,12,15,18,21,24,27,42,45,48,51,54,57,72,75,78,81,84,87
- ▶ 111, 114, 117, 141, 144, 147, 171, 174, 177,
- ▶ 222, 225, 228, 252, 255, 258, 282, 285, 288,
- ▶ 411, 414, 417, 441, 444, 447, 471, 474, 477,
- ▶ 522, 525, 528, 552, 555, 558, 582, 585, 588,
- ▶ 711, 714, 717, 741, 744, 747, 771, 774, 777,
- ▶ 822, 825, 828, 852, 855, 858, 882, 885, 888,
- ▶ **Não há minimais com 4 algarismos ou mais. PROVE.**

Minimais e Maximais - Exercício 7.25

Seja $A = \{3, 6, 9, \dots\}$ o conjunto dos múltiplos positivos de 3 e seja R a relação sobre A tal que $x \leq_R y$ se e só se todos os algarismos decimais de x aparecem em y na mesma sequência. Por exemplo, $262 \leq_R 12682$, mas $262 \not\leq_R 12268$. Ache os minimais de A sob R . Existe algum maximal?

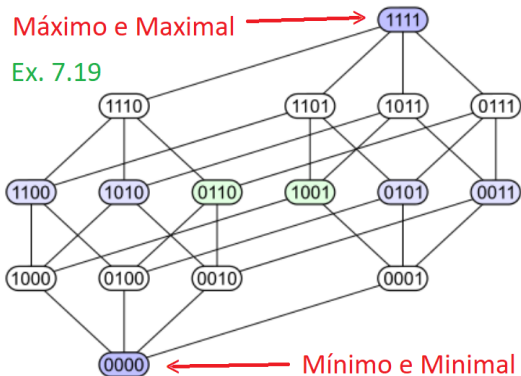
Solução:

- ▶ 1 algarismo: deve ser múltiplo de três: 3, 6 e 9.
- ▶ 2 algarismos: Não pode ter algarismo múltiplo de 3: um resto 1 e outro resto 2 na divisão por 3.
- ▶ 3 algarismos: Não pode ter algarismo múltiplo de 3, não pode ter um com resto 1 e outro resto 2 na divisão por 3: todos tem resto 1 ou resto 2.
- ▶ ≥ 4 algarismos: terá uma sequência de tamanho 1, 2 ou 3 de um número múltiplo de 3.

Minimais e Maximais - Exercício 7.28

Exercício 7.28:

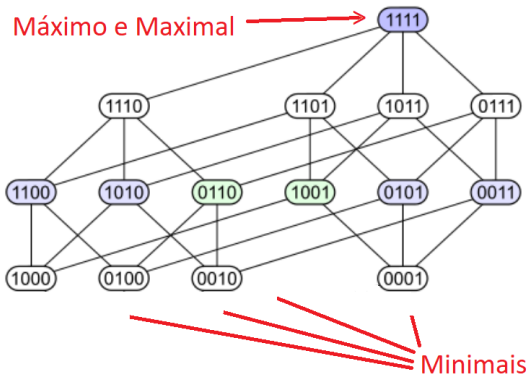
Seja A o conjunto das seqüências de 4 bits (algarismos 0 ou 1), exceto a seqüência 0000, e seja R a relação de ordem parcial tal que $x \leq_R y$ se e só se cada bit de x é menor ou igual ao bit correspondente de y . Assim, por exemplo, $0100 \leq_R 1100$, mas $1001 \not\leq_R 0101$. Quais são os elementos mínimos, máximos, minimais e maximais de A sob R ?



Minimais e Maximais - Exercício 7.28

Exercício 7.28:

Seja A o conjunto das seqüências de 4 bits (algarismos 0 ou 1), **exceto a seqüência 0000**, e seja R a relação de ordem parcial tal que $x \leq_R y$ se e só se cada bit de x é menor ou igual ao bit correspondente de y . Assim, por exemplo, $0100 \leq_R 1100$, mas $1001 \not\leq_R 0101$. Quais são os elementos mínimos, máximos, minimais e maximais de A sob R ?



Capítulo 7.2

RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

Notação $x \equiv_R y$ para Relação de Equivalência R

Notação $x \equiv_R y$ p/ Relação de Equivalência R

- ▶ x é equivalente a y módulo R
- ▶ $x \equiv_R y \iff x \equiv y \pmod R \iff xRy \iff (x, y) \in R.$
- ▶ $x \not\equiv_R y \iff x \not\equiv y \pmod R \iff x \cancel{R}y \iff (x, y) \notin R.$

Contraste com ordens parciais

- ▶ $x \leq_R y, \quad x \geq_R y, \quad x <_R y, \quad x >_R y.$

Exemplo divisibilidade (Teoria dos Números)

- ▶ Divisibilidade / Congruência
- ▶ $x \equiv y \pmod z \iff x - y$ é múltiplo de $z.$
- ▶ $x \equiv y \pmod z \iff x$ e y tem o mesmo resto na divisão por $z.$
- ▶ $11 \equiv 20 \pmod 3$ e $40 \equiv 49 \pmod 3$

Relações de Equivalência - Teorema 7.1

Teorema 7.1:

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A não vazio. As seguintes afirmações são equivalentes.

$$\blacktriangleright a \equiv_R b \iff [a]_R = [b]_R \iff [a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$$

Prova : 1 \implies 2

\blacktriangleright Suponha $a \equiv_R b$. Logo $b \equiv_R a$.

$$\blacktriangleright c \in [a]_R \xrightarrow{\text{def}} c \equiv_R a \xrightarrow{\text{tr}} c \equiv_R b \xrightarrow{\text{def}} c \in [b]_R$$

\blacktriangleright Logo $[a]_R \subseteq [b]_R$.

$$\blacktriangleright c \in [b]_R \xrightarrow{\text{def}} c \equiv_R b \xrightarrow{\text{tr}} c \equiv_R a \xrightarrow{\text{def}} c \in [a]_R$$

\blacktriangleright Logo $[b]_R \subseteq [a]_R$.

\blacktriangleright Portanto $[a]_R = [b]_R$.

Relações de Equivalência - Teorema 7.1

Teorema 7.1:

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A não vazio. As seguintes afirmações são equivalentes.

$$\blacktriangleright a \equiv_R b \iff [a]_R = [b]_R \iff [a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$$

Prova : 2 \implies 3

- \blacktriangleright Suponha $[a]_R = [b]_R$. Como $(a, a) \in [a]_R$, então $(a, a) \in [b]_R$.
- \blacktriangleright Portanto $[a]_R \cap [b]_R$ não é vazio.

Relações de Equivalência - Teorema 7.1

Teorema 7.1:

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A não vazio. As seguintes afirmações são equivalentes.

$$\blacktriangleright a \equiv_R b \iff [a]_R = [b]_R \iff [a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$$

Prova : 3 \implies 1

- \blacktriangleright Suponha que $[a]_R \cap [b]_R$ não é vazio.
- \blacktriangleright Seja $c \in [a]_R \cap [b]_R$. Logo $c \equiv_R a$ e $c \equiv_R b$.
- \blacktriangleright Por simetria, $a \equiv_R c$.
- \blacktriangleright Por transitividade, $a \equiv_R b$.

Relações de Equivalência - Teorema 7.2

Teorema 7.2:

Seja P uma partição do conjunto A . A relação R tal que $a \equiv_R b$ se e só se a e b estão em uma mesma parte (bloco) de P é uma relação de equivalência, e suas classes de equivalências são as partes (blocos) da partição P .

Prova:

- ▶ **REF:** a e a pertencem ao mesmo bloco, pois são iguais. Logo $a \equiv_R a$
- ▶ **SIM:** $a \equiv_R b \implies a$ e b estão no mesmo bloco $\implies b \equiv_R a$.
- ▶ **TR:** $a \equiv_R b \wedge b \equiv_R c \implies a, b$ e c estão no mesmo bloco $\implies a \equiv_R c$.
- ▶ Lembrar que os blocos de uma partição são disjuntos (interseção vazia).

Relações de Equivalência - Exercício 7.29

Exercício 7.29:

Seja $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x - y \in \mathbb{Q}\}$. Prove que S é uma relação de equivalência.

Solução:

- ▶ **REF:** $x - x = 0 \in \mathbb{Q} \stackrel{\text{def}}{\implies} (x, x) \in S$
- ▶ **SIM:** $(x, y) \in S \stackrel{\text{def}}{\implies} x - y \in \mathbb{Q} \implies y - x \in \mathbb{Q} \stackrel{\text{def}}{\implies} (y, x) \in S$
- ▶ **SIM:** $x \equiv_S y \stackrel{\text{def}}{\implies} x - y \in \mathbb{Q} \implies y - x \in \mathbb{Q} \stackrel{\text{def}}{\implies} y \equiv_S x$
- ▶ **TR:** $x \equiv_S y \wedge y \equiv_S z \stackrel{\text{def}}{\implies} x - y \in \mathbb{Q} \wedge y - z \in \mathbb{Q}$
- ▶ $\implies (x - y) + (y - z) = x - z \in \mathbb{Q} \stackrel{\text{def}}{\implies} x \equiv_S z$

Relações de Equivalência - Exercício 7.30

Exercício 7.30:

Seja R a relação sobre o conjunto dos pares ordenados de inteiros positivos tal que $(a, b)R(c, d)$ se e só se $a \cdot d = b \cdot c$. (a) Prove que R é uma relação de equivalência. (b) Descreva a classe de equivalência de $(1, 2)$ em R .

Solução (a):

- ▶ **REF:** $a \cdot b = b \cdot a \xRightarrow{\text{def}} (a, b)R(a, b)$
- ▶ **SIM:** $(a, b)R(c, d) \xRightarrow{\text{def}} a \cdot d = b \cdot c \xRightarrow{\text{def}} (c, d)R(a, b)$.
- ▶ **TR:** $(a, b)R(c, d) \wedge (c, d)R(e, f) \xRightarrow{\text{def}} a \cdot d = b \cdot c \wedge c \cdot f = d \cdot e$
 $\implies a \cdot (c \cdot f) = a \cdot (d \cdot e) = (b \cdot c) \cdot e$
- ▶ $\implies a \cdot f = b \cdot e \xRightarrow{\text{def}} (a, b)R(e, f)$.

Relações de Equivalência - Exercício 7.30

Exercício 7.30:

Seja R a relação sobre o conjunto de pares ordenados de \mathbb{Z}^+ (inteiros positivos) tal que $(a, b)R(c, d)$ se e só se $a \cdot d = b \cdot c$. (a) Prove que R é uma relação de equivalência. (b) Descreva a classe de equivalência de $(1, 2)$ em R .

Solução (b):

- ▶ $(x, y)R(1, 2) \stackrel{\text{def}}{\implies} 2x = y$. Portanto,
- ▶ $[(1, 2)]_R = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{Z}^+\}$.
- ▶ $[(1, 2)]_R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10), \dots\}$.

Relações de Equivalência - Exercício 7.31

Exercício 7.31:

Seja R a relação sobre o conjunto dos pares ordenados de \mathbb{Z}^+ tal que $(a, b)R(c, d)$ se e só se $a + d = b + c$. (a) Prove que R é uma relação de equivalência. (b) Descreva a classe de equivalência de $(3, 1)$ sob R . (c) Descreva as classes de equivalência de R .

Solução (a):

- ▶ **REF:** $a + b = b + a \stackrel{\text{def}}{\implies} (a, b)R(a, b)$
- ▶ **SIM:** $(a, b)R(c, d) \stackrel{\text{def}}{\implies} a + d = b + c \stackrel{\text{def}}{\implies} (c, d)R(a, b)$.
- ▶ **TR:**
 $(a, b)R(c, d) \wedge (c, d)R(e, f) \stackrel{\text{def}}{\implies} a + d = b + c \wedge c + f = d + e$
▶ $\implies a + (c + f) = a + (d + e) = (b + c) + e$
▶ $\implies a + f = b + e \stackrel{\text{def}}{\implies} (a, b)R(e, f)$.

Relações de Equivalência - Exercício 7.31

Exercício 7.31:

Seja R a relação sobre o conjunto dos pares ordenados de \mathbb{Z}^+ tal que $(a, b)R(c, d)$ se e só se $a + d = b + c$. (a) Prove que R é uma relação de equivalência. (b) Descreva a classe de equivalência de $(3, 1)$ sob R . (c) Descreva as classes de equivalência de R .

Solução (b):

- ▶ $(x, y)R(3, 1) \stackrel{\text{def}}{\implies} x + 1 = y + 3 \implies x = y + 2$. Portanto,
- ▶ $[(3, 1)]_R = \{(y + 2, y) : y \in \mathbb{Z}^+\}$.
- ▶ $[(3, 1)]_R = \{(3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4), (7, 5), \dots\}$.

Relações de Equivalência - Exercício 7.31

Exercício 7.31:

Seja R a relação sobre o conjunto dos pares ordenados de \mathbb{Z}^+ tal que $(a, b)R(c, d)$ se e só se $a + d = b + c$. (a) Prove que R é uma relação de equivalência. (b) Descreva a classe de equivalência de $(3, 1)$ sob R . (c) Descreva as classes de equivalência de R .

Solução (c):

- ▶ $x > y \implies (x, y)R(x - y + 1, 1) \implies (x, y) \in [(x - y + 1, 1)]_R$.
- ▶ $x < y \implies (x, y)R(1, y - x + 1) \implies (x, y) \in [(1, y - x + 1)]_R$.
- ▶ **Resumindo:**
- ▶ $[(a, 1)]_R = \{(x, y) : x = y + a - 1\} = \{(a, 1), (a+1, 2), (a+2, 3), \dots\}$
- ▶ $[(1, a)]_R = \{(x, y) : y = x + a - 1\} = \{(1, a), (2, a+1), (3, a+2), \dots\}$

Relações de Equivalência - Exercício 7.32

Prove que as relações são de equivalência. Descreva suas classes.

- (a) Seja R a relação sobre \mathbb{Z} definida por mRn se e só se 2 divide $m - n$.
- (b) Seja S a relação sobre \mathbb{R} definida por xRy se e só se $|x| = |y|$.
- (c) Seja F a relação sobre \mathbb{Z}^+ tal que xFy se e só se todo número primo que divide x divide y , e vice-versa.

Solução (a):

- ▶ $xRy \stackrel{\text{def}}{\iff} 2 \text{ divide } x - y \iff x - y \text{ é par.}$
- ▶ **REF:** $x - x = 0$ é par $\stackrel{\text{def}}{\implies} xRx$
- ▶ **SIM:** $xRy \stackrel{\text{def}}{\implies} x - y \text{ é par} \implies y - x \text{ é par} \stackrel{\text{def}}{\implies} yRx.$
- ▶ **TR:** $xRy \wedge yRz \stackrel{\text{def}}{\implies} x - y \text{ e } y - z \text{ são pares}$
- ▶ $\implies (x - y) + (y - z) \text{ é par} \implies x - z \text{ é par} \stackrel{\text{def}}{\implies} xRz.$
- ▶ Duas classes de equivalência: Números pares e Números ímpares.

Relações de Equivalência - Exercício 7.32

Prove que as relações são de equivalência. Descreva suas classes.

- (a) Seja R a relação sobre \mathbb{Z} definida por mRn se e só se 2 divide $m - n$.
- (b) Seja S a relação sobre \mathbb{R} definida por xRy se e só se $|x| = |y|$.
- (c) Seja F a relação sobre \mathbb{Z}^+ tal que xFy se e só se todo número primo que divide x divide y , e vice-versa.

Solução (b):

- ▶ $xSy \stackrel{\text{def}}{\iff} |x| = |y| \iff x = \pm y$.
- ▶ **REF:** $|x| = |x| \stackrel{\text{def}}{\implies} xSx$
- ▶ **SIM:** $xSy \stackrel{\text{def}}{\implies} |x| = |y| \implies ySx$.
- ▶ **TR:** $xSy \wedge ySz \stackrel{\text{def}}{\implies} |x| = |y| \text{ e } |y| = |z|$
- ▶ $\implies |x| = |z| \stackrel{\text{def}}{\implies} xSz$.
- ▶ **Classes de equivalência:** $\{x, -x\}$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$

Relações de Equivalência - Exercício 7.32

Prove que as relações são de equivalência. Descreva suas classes.

- (a) Seja R a relação sobre \mathbb{Z} definida por mRn se e só se 2 divide $m - n$.
- (b) Seja S a relação sobre \mathbb{R} definida por xRy se e só se $|x| = |y|$.
- (c) Seja F a relação sobre \mathbb{Z}^+ tal que xFy se e só se todo número primo que divide x divide y , e vice-versa.

Solução (c):

- ▶ $xFy \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall \text{ primo } p : x = k_1 \cdot p \leftrightarrow y = k_2 \cdot p)$ para $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$.
- ▶ $xFy \stackrel{\text{def}}{\iff}$ fatoração de x e y gera os mesmos primos $(*)_{x,y}$ (ex: $24F36$, $36F54$, $24F30$).
- ▶ $24 = 2^3 \cdot 3$, $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $54 = 2 \cdot 3^3$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.
- ▶ **REF:** $(x = k_1 \cdot p \leftrightarrow x = k_1 \cdot p) \stackrel{\text{def}}{\implies} xFx$
- ▶ **SIM:** $xFy \stackrel{\text{def}}{\implies} (*)_{x,y} \implies (*)_{y,x} \stackrel{\text{def}}{\implies} yFx$.
- ▶ **TR:** $xFy \wedge yFz \stackrel{\text{def}}{\implies} (*)_{x,y} \wedge (*)_{y,z} \implies (*)_{x,z} \stackrel{\text{def}}{\implies} xFz$.

Relações de Equivalência - Exercício 7.32

Prove que as relações são de equivalência. Descreva suas classes.

- (a) Seja R a relação sobre \mathbb{Z} definida por mRn se e só se 2 divide $m - n$.
- (b) Seja S a relação sobre \mathbb{R} definida por xRy se e só se $|x| = |y|$.
- (c) Seja F a relação sobre \mathbb{Z}^+ tal que xFy se e só se todo número primo que divide x divide y , e vice-versa.

Solução (c):

- ▶ **Classes:** para todo subconjunto $P = \{p_1, \dots, p^n\}$ de primos
- ▶ Classe $\{n = \prod_{i=1}^n p_i^{k_i}, k_i \in \mathbb{Z}^+\} = \{p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}\}$.
- ▶ **Resumindo:** para $a, b, c, d, \dots \in \mathbb{Z}^+$
- ▶ $\{1\}, \{2^a\}, \{2^a 3^b\}, \{2^a 5^b\}, \{3^a 5^b\}, \{2^a 3^b 5^c\}, \{7^a\}, \{2^a 7^b\}, \{3^a 7^b\}$
- ▶ $\{5^a 7^b\}, \{2^a 3^b 7^c\}, \{2^a 5^b 7^c\}, \{3^a 5^b 7^c\}, \{2^a 3^b 5^c 7^d\}, \{11^a\}, \dots$

Relações de Equivalência - Exercício 7.33

Seja A o conjunto de todas as proposições nas variáveis x , y e z . Seja \mathcal{L} a relação sobre A tal que $P\mathcal{L}Q$ se e só se P e Q tem a mesma tabela verdade. Prove que \mathcal{L} é uma relação de equivalência.

Solução

- ▶ $P\mathcal{L}Q$ se e só se P e Q tem a mesma tabela verdade
- ▶ $P\mathcal{L}Q$ se e só se $(P \Leftrightarrow Q)$ se e só se $P \leftrightarrow Q$ é tautologia (sempre V)
- ▶ \mathcal{L} é a relação de equivalência lógica sobre o conjunto de todas as proposições nas variáveis x , y e z .
- ▶ " \Leftrightarrow " é REF, SIM e TR.

Relações de Equivalência - Exercício 7.34

Exercício 7.34

Seja ε um número real positivo e considere a relação \approx_ε sobre \mathbb{R} tal que $x \approx_\varepsilon y$ se e só se $|x - y| \leq \varepsilon$. Esta é uma relação de equivalência?

Solução: NÃO

► $0 \approx_\varepsilon \varepsilon$ e $\varepsilon \approx_\varepsilon 2\varepsilon$. Mas $0 \not\approx_\varepsilon 2\varepsilon$.

Relações de Equivalência - Exercício 7.35

Seja R a relação sobre pares ordenados de inteiros tal que $(a, b)R(c, d)$ se e só se $(a = c) \wedge (b = d)$ ou $(a = d) \wedge (b = c)$. Esta é uma relação de equivalência? Se sim, descreva suas classes de equivalência.

Solução:

- ▶ Exemplo: $(1, 2)R(1, 2)$ e $(1, 2)R(2, 1)$.
- ▶ Exemplo: $((1, 2), (1, 2)) \in R$ e $((1, 2), (2, 1)) \in R$.
- ▶ **Notação $(**)_{a,b,c,d}$:** $(a = c) \wedge (b = d)$ ou $(a = d) \wedge (b = c)$
- ▶ **REF:** $(x = x) \wedge (y = y) \xrightarrow{\text{def}} (x, y)R(x, y)$.
- ▶ **SIM:** $(a, b)R(c, d) \xrightarrow{\text{def}} (**)_{a,b,c,d} \implies (**)_{c,d,a,b} \xrightarrow{\text{def}} (c, d)R(a, b)$.
- ▶ **TR:** $(a, b)R(c, d) \wedge (c, d)R(e, f) \xrightarrow{\text{def}} (**)_{a,b,c,d} \wedge (**)_{c,d,e,f} \implies (**)_{a,b,e,f} \xrightarrow{\text{def}} (a, b)R(e, f)$.
- ▶ **Classes de equivalência:** $\{(x, y), (y, x)\}$ para todo $x \leq y \in \mathbb{Z}$

Relações de Equivalência - Revisão Teoremas 7.1 e 7.2

Teorema 7.1: Rel. equivalência em $A \implies$ Partição de A

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A não vazio. As seguintes afirmações são equivalentes.

$$\blacktriangleright a \equiv_R b \iff [a]_R = [b]_R \iff [a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset.$$

Conclusão: Classes de equivalência formam uma partição de A , pois.

$$\blacktriangleright a \not\equiv_R b \iff [a]_R \neq [b]_R \iff [a]_R \cap [b]_R = \emptyset.$$

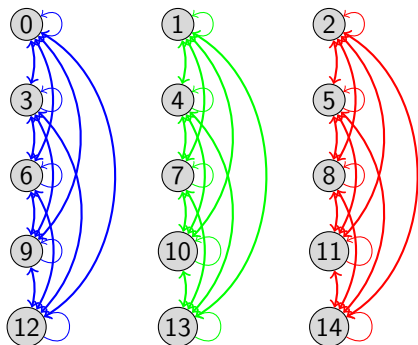
Teorema 7.2: Partição de $A \implies$ Rel. equivalência em A

Seja P uma **partição** do conjunto A . A relação R tal que $a \equiv_R b$ se e só se a e b **estão em uma mesma parte** (bloco) de P é uma relação de equivalência, e suas classes de equivalências são as partes (blocos) da partição P .

Partições e Relações de Equivalência

Exemplo

Relação de congruência módulo 3.

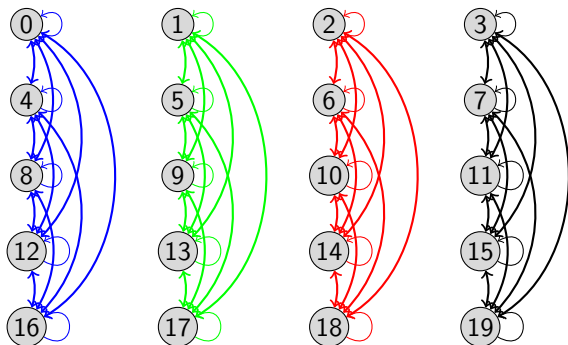


3 classes de equivalência.

Partições e Relações de Equivalência

Exemplo

Relação de congruência módulo 4.

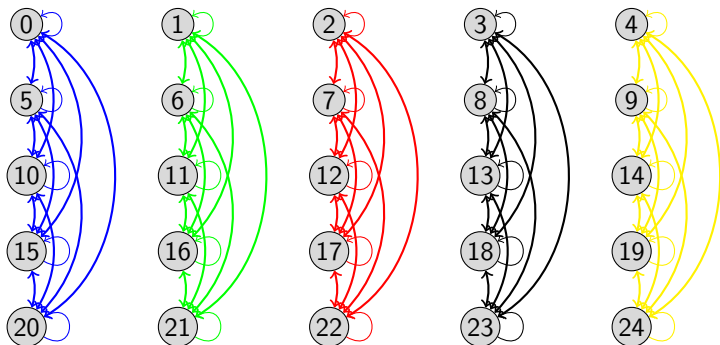


4 classes de equivalência.

Partições e Relações de Equivalência

Exemplo

Relação de congruência módulo 5.



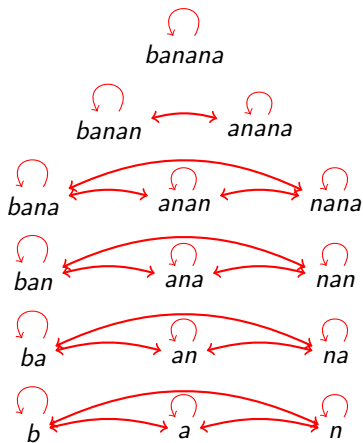
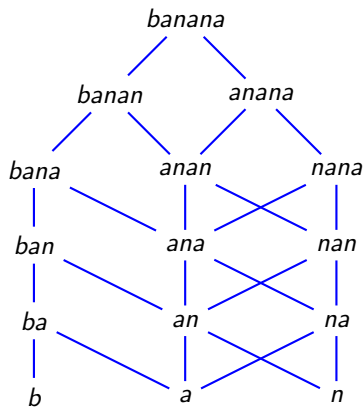
5 classes de equivalência.

Partições e Relações de Equivalência

Exemplo (ver Ex. 7.16 de ordens):

Relação de ordem parcial $x \sqsubset y \iff x$ é subpalavra de y .

Relação de equivalência $x \# y \iff x$ e y tem o mesmo tamanho.

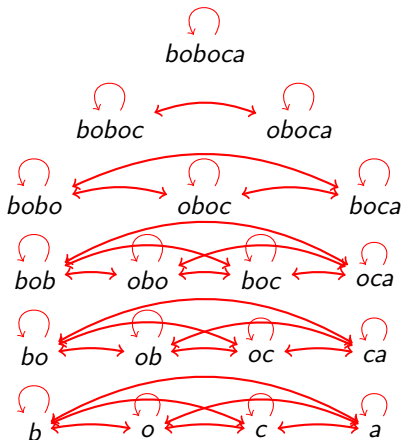
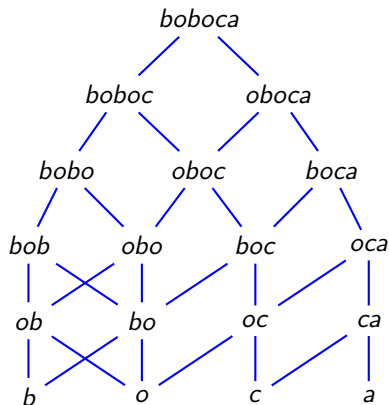


Partições e Relações de Equivalência

Exemplo (ver Ex. 7.16 de ordens):

Relação de ordem parcial $x \sqsubset y \iff x$ é subpalavra de y .

Relação de equivalência $x \# y \iff x$ e y tem o mesmo tamanho.



Capítulo 8

FUNÇÕES

FUNÇÕES (Capítulo 8)

Definição de Função

Dizemos que uma relação f é uma **função** se, para todo $a \in Dom(f)$, existe exatamente um b tal que $(a, b) \in f$ (ou $a f b$). Nesse caso, dizemos que $f(a) = b$. Ver exemplos do livro.

Observação: Funções são Relações

Toda função é uma relação. Então todos os conceitos de relações, continuam a existir para funções.

- ▶ Domínio $Dom(f)$ e Imagem $Img(f)$
- ▶ Relação Composta $g \circ f$ de f com g (veremos que também é Função)
- ▶ Relação Inversa f^{-1} de f (veremos que nem sempre é Função)
- ▶ Restrição de uma Relação a subconjuntos do Domínio e da Imagem

FUNÇÕES - Domínio, Imagem e ContraDomínio

Domínio e Imagem

$$\blacktriangleright \text{Dom}(f) = \{a : \exists b, f(a) = b\}$$

$$\blacktriangleright \text{Img}(f) = \{b : \exists a, f(a) = b\}$$

Notação $f : A \rightarrow B$ e ContraDomínio

Escrevemos $f : A \rightarrow B$ quando $\text{Dom}(f) = A$ e $\text{Img}(f) \subseteq B$.

Nessa notação, dizemos que B é o **ContraDomínio** de f .

ContraDomínio só faz sentido na notação $f : A \rightarrow B$.

Relação Inversa de uma função f

$$\blacktriangleright f^{-1} = \left\{ (f(x), x) : x \in \text{Dom}(f) \right\}$$

FUNÇÕES - Inversa - Exercício 8.2

Exercício 8.2

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Determine se a inversa é uma função. (a) $f(x) = x^3$. (b) $f(x) = e^x$. (c) $f(x) = \text{sen}(x)$. (d) $f(x) = x^5 + x$. (e) $f(x) = x^5 - x$.

Solução:

(a) $f^{-1}(x) = x^{1/3}$. SIM é função.

(b) $f^{-1}(x) = \ln(x)$. SIM é função.

(c) $f^{-1}(x) = \arcsen(x)$. NÃO é função, pois $f(2\pi) = f(0) = 0$

(d) $f^{-1}(x)$ SIM é função, pois $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0 \implies f$ é estritamente crescente.

(e) $f^{-1}(x)$ NÃO é função, pois $f(0) = f(1) = 0$

FUNÇÕES - Imagem e Imagem Reversa de conjunto

$$f(A) = \{f(x) : x \in A \cap \text{Dom}(f)\}$$

- ▶ $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A)$
- ▶ $f(x) \in f(A) \not\Rightarrow x \in A$ (contraexemplo: $f(x) = 7, \forall x \in \mathbb{Z}$)

$$f^{-1}(U) = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) \in U\}$$

- ▶ $f(x) \in U \iff x \in f^{-1}(U)$
- ▶ $f(f^{-1}(U)) = \{f(x) : x \in f^{-1}(U)\} = \{f(x) : f(x) \in U\} = U \cap \text{Img}(f)$

Conclusões para $U \subseteq \text{Img}(f)$:

- ▶ $f(x) \in U \iff x \in f^{-1}(U)$
- ▶ $x \in A \implies f(x) \in f(A) \iff x \in f^{-1}(f(A))$
- ▶ $f(x) \in U \iff x \in f^{-1}(U) \iff f(x) \in f(f^{-1}(U))$
- ▶ **Conclusões:** $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ e $f(f^{-1}(U)) = U$

FUNÇÕES - Inversa - Exercício 8.3

Dada uma função f , subconjuntos $A, B \subseteq \text{Dom}(f)$ e $U, V \subseteq \text{Img}(f)$, prove ou disprove:

- (a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
(b) $f(A - B) = f(A) - f(B)$.
(c) $B \subseteq A \iff f(B) \subseteq f(A)$.
(d) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$.
(e) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

Solução:

(a) **SIM:** $y \in f(A \cup B) \iff \exists x \in A \cup B : f(x) = y \iff$
 $\iff y \in f(A) \vee y \in f(B) \iff y \in f(A) \cup f(B)$

(b) **NÃO.** ContraEx: $f(1)=f(2)=3$. $A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $f(A)=f(B)=\{3\}$.

(c) **SIM p/ ida (\implies):** $B \subseteq A \implies (\forall x : x \in B \rightarrow x \in A) \implies$
 $\implies (\forall x : f(x) \in f(B) \rightarrow f(x) \in f(A)) \implies f(B) \subseteq f(A)$.

(c) **NÃO p/ volta (\impliedby):** ContraEx: $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{Z}$, $A=\mathbb{Z}^-$, $B=\mathbb{Z}^+$.

(d) **SIM.** $x \in f^{-1}(U \cap V) \iff f(x) \in U \cap V \iff f(x) \in U \wedge f(x) \in V \iff$
 $\iff x \in f^{-1}(U) \wedge x \in f^{-1}(V) \iff x \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$.

(e) **SIM.** $x \in f^{-1}(U \cup V) \iff f(x) \in U \cup V \iff f(x) \in U \vee f(x) \in V \iff$
 $\iff x \in f^{-1}(U) \vee x \in f^{-1}(V) \iff x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

FUNÇÕES - Inversa - Exercício 8.3

Dada uma função f , subconjuntos $A, B \subseteq \text{Dom}(f)$ e $U, V \subseteq \text{Img}(f)$,
prove ou disprove: $(f) f^{-1}(U - V) = f^{-1}(U) - f^{-1}(V)$.

$(g) U \subseteq V \iff f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V)$.

$(h) f^{-1}(f(A)) = A$.

$(i) f(f^{-1}(U)) = U$.

Solução:

(f) SIM. $x \in f^{-1}(U - V) \iff f(x) \in U - V \iff f(x) \in U \wedge f(x) \notin V \iff$
 $\iff x \in f^{-1}(U) \wedge x \notin f^{-1}(V) \iff x \in f^{-1}(U) - f^{-1}(V)$.

(g) SIM: $U \subseteq V \iff (\forall y : y \in U \rightarrow y \in V) \iff$
 $\iff (\forall x : f(x) \in U \rightarrow f(x) \in V) \iff (\forall x : x \in f^{-1}(U) \rightarrow x \in f^{-1}(V)) \iff$
 $\iff f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V)$

(h) NÃO: ContraEx: $f(x)=7, \forall x \in \mathbb{Z}$. $A=\{0\}$, $f(A)=\{7\}$, $f^{-1}(\{7\})=\mathbb{Z}$.

$(h) f^{-1}(f(A)) \supseteq A$. Já visto.

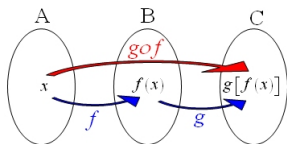
(i) SIM: Já visto.

FUNÇÕES - Composição de funções

Funções f e g tais que $Im(f) \subseteq Dom(g)$.

$g \circ f$: relação composta de f com g é função

- ▶ $(x, z) \in g \circ f \implies \exists y : (x, y) \in f \wedge (y, z) \in g \implies$
- ▶ $\implies y = f(x) \wedge z = g(y) \implies z = g(f(x))$
- ▶ $g \circ f(x) = g(f(x))$ é apenas um valor: $g \circ f$ é função.



- ▶ $Dom(g \circ f) = Dom(f)$.
- ▶ $Im(g \circ f) \subseteq Im(g)$.
- ▶ Se $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$, então $g \circ f : A \rightarrow C$.

FUNÇÕES - Injetora, Sobrejetora, Bijetora

f é Injetora

Uma função f é **Injetora** se e só se:

- ▶ $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ para todo $x_1, x_2 \in Dom(f)$; ou seja,
- ▶ $\forall y \in Im(f) : \exists! x \in Dom(f), f(x) = y$; ou seja,
- ▶ Para todo elemento y da Imagem de f , existe exatamente um elemento x do Domínio de f tal que $f(x) = y$; ou seja,
- ▶ $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in Dom(f)$.

$f : A \rightarrow B$ é Sobrejetora

Uma função $f : A \rightarrow B$ é **Sobrejetora** se e só se $Im(f) = B$. Ou seja,
 $\forall y \in B : \exists x \in A, f(x) = y$.

$f : A \rightarrow B$ é Bijetora

Uma função $f : A \rightarrow B$ é **Bijetora** se é injetora e sobrejetora.

FUNÇÕES - Tipos de Funções - Exercício 8.6/8.10

Exercício 8.6/8.10

Sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$. Prove que se f e g são injetoras então $g \circ f$ é injetora.

Solução:

$$\blacktriangleright g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \xrightarrow{g.inj} f(x_1) = f(x_2) \xrightarrow{f.inj} x_1 = x_2.$$

FUNÇÕES - Tipos de Funções - Exercício 8.7

Exercício 8.7

Prove que uma função f tem função inversa f^{-1} se e só se f é injetora.

Solução:

- ▶ Seja $A = \text{Dom}(f) = \text{Img}(f^{-1})$ e $B = \text{Im}(f) = \text{Dom}(f^{-1})$.
- ▶ f^{-1} é função $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall b \in B : \exists! a, (b, a) \in f^{-1} \iff$.
- ▶ $\iff \forall b \in B : \exists! a, (a, b) \in f \iff$.
- ▶ $\iff \forall b \in B : \exists! a, f(a) = b \iff f$ é injetora.

FUNÇÕES - Tipos de Funções - Exercício 8.8

Exercício 8.8

Sejam $f : A \rightarrow C$ e $g : B \rightarrow D$ duas funções injetoras. Considere a função $h : A \times B \rightarrow C \times D$ tal que $h(a, b) = (f(a), g(b))$. Prove que h é uma função injetora.

Solução:

- ▶ $h(a, b) = h(x, y) \implies (f(a), g(b)) = (f(x), g(y)) \implies$
- ▶ $\implies f(a) = f(x) \wedge g(b) = g(y) \xrightarrow{f, g \text{ inj.}}$
- ▶ $\xrightarrow{f, g \text{ inj.}} (a = x) \wedge (b = y) \implies (a, b) = (x, y).$
- ▶ Como vale para quaisquer pares (a, b) e (x, y) , então h é injetora.

FUNÇÕES - Tipos de Funções - Exercício 8.9

Seja f uma função e sejam $A, B \subseteq \text{Dom}(f)$. Prove que

(a) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Mais ainda, prove que

(b) se f é injetora, então $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Prove também que

(c) se f é injetora, então $f(B) \subseteq f(A)$ se e só se $B \subseteq A$.

Solução:

- ▶ (a) $y \in f(A \cap B) \iff \exists x \in A \cap B : f(x) = y \implies$
- ▶ $\implies (\exists x \in A : f(x) = y) \wedge (\exists x' \in B : f(x') = y) \iff y \in f(A) \cap f(B)$.
- ▶ Contraexemplo p/ \implies : $f(1) = f(2) = 3$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$.
 $f(A \cap B) = \emptyset$, $f(A) \cap f(B) = \{3\}$.
- ▶ (b) $y \in f(A \cap B) \iff \exists x \in A \cap B : f(x) = y \iff$
- ▶ $\iff (\exists x \in A : f(x) = y) \wedge (\exists x' \in B : f(x') = y) \iff y \in f(A) \cap f(B)$.
- ▶ (c) $B \subseteq A \iff (\forall x : x \in B \rightarrow x \in A) \stackrel{f \text{ inj.}}{\iff}$
- ▶ $\stackrel{f \text{ inj.}}{\iff} (\forall x : f(x) \in f(B) \rightarrow f(x) \in f(A)) \iff f(B) \subseteq f(A)$.

FUNÇÕES - Tipos de Funções - Exercício 8.11

Exercício 8.11

Seja R uma relação de A para B . Escreva expressões lógicas formais (sem palavras, apenas variáveis e símbolos), com todos os quantificadores necessários, que expresse as afirmações: (a) “A relação R é transitiva”. (b) “A relação R é uma função injetora”.

Solução:

- ▶ (a) $\forall x, y, z : ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \longrightarrow (x, z) \in R$
- ▶ (a) $\forall x, y, z : (xRy \wedge yRz) \longrightarrow xRz$
- ▶ (b) $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 : ((x_1Ry_1 \wedge x_1Ry_2) \longrightarrow y_1 = y_2) \wedge$
- ▶ $\wedge ((x_1Ry_1 \wedge x_2Ry_1) \longrightarrow x_1 = x_2)$

FUNÇÕES - Exercício Lista 2

Para $n \geq 3$, considere n funções f_1, \dots, f_n tais que $\text{Im}(f_k) \subseteq \text{Dom}(f_{k+1})$ para $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Prove por indução que:

$$f_n \circ (f_{n-1} \circ (\dots \circ (f_3 \circ (f_2 \circ f_1)) \dots)) = ((\dots ((f_n \circ f_{n-1}) \circ f_{n-2}) \circ \dots) \circ f_2) \circ f_1.$$

Solução: Indução forte

- ▶ **Caso base (n=3):** Queremos provar que $f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1$.
- ▶ Seja $x \in \text{Dom}(f_1)$ e sejam $y = f_1(x)$, $z = f_2(y)$ e $w = f_3(z)$.
- ▶ $f_3 \circ (f_2 \circ f_1)(x) = f_3(f_2 \circ f_1(x)) = f_3(f_2(f_1(x))) = f_3(f_2(y)) = f_3(z) = w$.
- ▶ $((f_3 \circ f_2) \circ f_1)(x) = (f_3 \circ f_2)(f_1(x)) = (f_3 \circ f_2)(y) = f_3(f_2(y)) = w$.
- ▶ **Hipótese da Indução:** Fixe $n > 3$ e suponha valer para qualquer número $< n$ de funções
- ▶ **Passo da indução:** Vamos provar que vale para n funções.

Solução: Indução forte

► Passo da indução: Vamos provar que vale para n funções.

$$\begin{aligned} & f_n \circ (f_{n-1} \circ (f_{n-2} \circ (\dots \circ (f_2 \circ f_1) \dots))) = (H.I. \text{ p/ } n-1) \\ & = f_n \circ ((\dots ((f_{n-1} \circ f_{n-2}) \circ f_{n-3}) \circ \dots) \circ f_2) \circ f_1 = C.B. \\ & = (f_n \circ ((\dots ((f_{n-1} \circ f_{n-2}) \circ f_{n-3}) \circ \dots) \circ f_2)) \circ f_1 = (H.I. \text{ p/ } n-2) \\ & = (f_n \circ (f_{n-1} \circ (f_{n-2} \circ (f_{n-3} \circ (\dots \circ (f_3 \circ f_2) \dots)))) \circ f_1 = (H.I. \text{ p/ } n-1) \\ & \quad = ((\dots ((f_n \circ f_{n-1}) \circ f_{n-2}) \circ \dots) \circ f_2) \circ f_1. \end{aligned}$$

Capítulo 9

SOMATÓRIOS

Somatórios - Capítulo 9

Definição para função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\sum_{k=m}^n f(k) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \dots + f(n-2) + f(n-1) + f(n)$$

Se $n < m$, então $\sum_{k=m}^n f(k) = 0$.

Outro modo de escrever (em forma de **sequência** x_n , ao invés de função $f(n)$):

$$\sum_{k=m}^n x_k = x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \dots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n$$

Somatórios - Exemplo (Soma de Gauss)

Soma dos n primeiros inteiros

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$\sum_{k=1}^n k = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1$$

Somando:

$$2 \cdot \sum_{k=1}^n k = n \cdot (n+1)$$

$$\xRightarrow{\div 2} \sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Somatórios - Soma de P.A. Ex. 9.1 Livro

Ex. 9.1 Livro / Soma P.A.: **Calcule**

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k,$$

para a a P.A. $x_k = a + r \cdot k$.

Solução:

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a + r \cdot k) = \sum_{k=0}^{n-1} a + r \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k$$

$$\sum_{k=1}^n (a + r \cdot k) = a \cdot n + r \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

Somatórios - Soma Telescópica

Soma Telescópica

$$\sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k) = (x_{n+1} - x_n) + (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_3 - x_2) + (x_2 - x_1)$$

$$\sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k) = (\cancel{x_{n+1} - x_n}) + (\cancel{x_n - x_{n-1}}) + (\cancel{x_{n-1} - x_{n-2}}) + \dots + (\cancel{x_3 - x_2}) + (\cancel{x_2 - x_1})$$

$$\sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_1$$

Somatórios - Exercício 9.2 do Livro

Ex. 9.2 Livro / Soma P.G.: **Calcule** para $b \neq 0$ e $b \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} b^k = 1 + b + b^2 + b^3 + \dots + b^{n-1}$$

Solução:

$$\sum_{k=0}^{n-1} b^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b^k \cdot (b-1)}{b-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b^{k+1}}{b-1} - \frac{b^k}{b-1} \right)$$

Soma Telescópica p/ $x_k = b^k/(b-1)$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} b^k = x_n - x_0 = \frac{b^n - 1}{b-1}$$

Somatórios - Exercício 9.3 do Livro

Ex. 9.3 Livro / Soma P.G.: **Calcule** para $q \neq 0$ e $q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} a \cdot q^k = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1}$$

Solução:

$$\sum_{k=0}^{n-1} aq^k = a \cdot \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{a \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Somatórios - Exercício 9.4 do Livro

Ex. 9.4 Livro / Q.14(a) Lista 1: **Calcule**

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

Solução:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} \right)$$

Soma Telescópica p/ $x_k = -1/k$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = x_{n+1} - x_1 = \frac{-1}{n+1} - \frac{-1}{1} = \frac{n}{n+1}$$

Somatórios - Exercício 9.4* do Livro

Ex. 9.4* Livro / Q.14(a)* Lista 1: **Calcule**

$$\sum_{k=m}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

Solução:

$$\sum_{k=m}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=m}^n \left(-\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} \right)$$

Soma Telescópica p/ $x_k = -1/k$:

$$\sum_{k=m}^n \frac{1}{k(k+1)} = x_{n+1} - x_m = \frac{-1}{n+1} - \frac{-1}{m} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n+1}$$

Somatórios - Exercício 9.7 do Livro

Ex. 9.7 Livro: **Calcule** para $a \neq b$

$$\sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} = a^0 b^n + a^1 b^{n-1} + a^2 b^{n-2} + a^3 b^{n-3} + \dots + a^{n-1} b^1 + a^n b^0$$

Solução:

$$\sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} = b^n \cdot \left(\left(\frac{a}{b}\right)^0 + \left(\frac{a}{b}\right)^1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^3 + \dots + \left(\frac{a}{b}\right)^n \right)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} &= b^n \cdot \sum_{k=0}^n a^k b^{-k} = b^n \cdot \sum_{k=0}^n \left(\frac{a}{b}\right)^k = b^n \cdot \frac{(a/b)^{n+1} - 1}{(a/b) - 1} \\ &= \frac{b^{n+1}}{a - b} \cdot \left(\frac{a^{n+1}}{b^{n+1}} - 1 \right) = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} \end{aligned}$$

Somatórios - soma dos quadrados perfeitos

Exemplo 9.4 Livro / Q13(b) Lista 1:

Calcule a soma dos n primeiros quadrados perfeitos

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2$$

Solução: $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$

$$\sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3) = (n+1)^3 - 1^3 = \sum_{k=0}^n (3k^2 + 3k + 1) =$$

$$= 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = 3X + \frac{3n(n+1)}{2} + n.$$

$$3X = (n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n = \frac{n+1}{2} (2(n+1)^2 - 3n - 2) = \frac{n+1}{2} (2n^2 + n)$$

$$X = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Somatórios - soma dos cubos perfeitos

Exemplo Q13(c) Lista 1:

Calcule a soma dos n primeiros cubos perfeitos

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3$$

Solução: $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n ((k+1)^4 - k^4) &= (n+1)^4 - 1^4 = \sum_{k=1}^n (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) = \\ &= 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = 4X + \frac{6n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{4n(n+1)}{2} + n. \\ 4X &= (n+1)^4 - 1 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n = (n+1) \left[(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1 \right] \\ X &= \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{(n+1)^2}{4} \left[(n+1)^2 - (2n+1) \right] = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

Somatórios - soma das quartas potências

Exemplo Q13(c)* Lista 1:

Calcule a soma dos n primeiras quartas potências

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + \dots + (n-1)^4 + n^4$$

Solução: $(k+1)^5 = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$

$$\sum_{k=1}^n ((k+1)^5 - k^5) = (n+1)^5 - 1^5 = \sum_{k=1}^n (5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) =$$

$$= 5 \sum_{k=1}^n k^4 + 10 \sum_{k=1}^n k^3 + 10 \sum_{k=1}^n k^2 + 5 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1.$$

$$5X = (n+1)^5 - 1 - \frac{10n^2(n+1)^2}{4} - \frac{10n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{5n(n+1)}{2} - n.$$

$$X = \sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

Somatórios - soma das quintas potências

Exemplo Q13(c)** Lista 1:

Calcule a soma dos n primeiras quintas potências

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + 5^5 + \dots + (n-1)^5 + n^5$$

Solução: $(k+1)^6 = k^6 + 6k^5 + 15k^4 + 20k^3 + 15k^2 + 6k + 1$

$$\sum_{k=1}^n ((k+1)^6 - k^6) = (n+1)^6 - 1^6 = \sum_{k=1}^n (6k^5 + 15k^4 + 20k^3 + 15k^2 + 6k + 1)$$

$$= 6 \sum_{k=1}^n k^5 + 15 \sum_{k=1}^n k^4 + 20 \sum_{k=1}^n k^3 + 15 \sum_{k=1}^n k^2 + 6 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1.$$

$$6X = (n+1)^6 - 1 - \frac{15n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} - \frac{20n^2(n+1)^2}{4} \\ - \frac{15n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{6n(n+1)}{2} - n.$$

$$X = \sum_{k=1}^n k^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

Capítulo 10

RECORRÊNCIAS

Sequências Recorrentes - Capítulo 10

Sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é definida como uma função $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $a_n = a(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplos: P.A (razão r) e P.G (quociente q)

Progressão Aritmética (P.A.): $a_n = a_{n-1} + r$, para $n \geq 1$.

Progressão Geométrica (P.G.): $a_n = a_{n-1} \cdot q$, para $n \geq 1$.

Exemplos de P.A. e P.G.

P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com **razão $r = 2$** e primeiro termo $a_0 = 0$.

$(a_n) = (0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots)$ - naturais pares

P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com **razão $r = 2$** e primeiro termo $a_0 = 1$.

$(a_n) = (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots)$ - naturais ímpares

P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com **quociente $q = 2$** e primeiro termo $a_0 = 1$.

$(a_n) = (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots)$ - potências de 2

P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com **quociente $q = 3$** e primeiro termo $a_0 = 1$.

$(a_n) = (1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, \dots)$ - potências de 3

P.A. / P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com **razão $r = 0$ / quociente $q = 1$** .

$(a_n) = (a_0, a_0, a_0, a_0, a_0, a_0, a_0, \dots)$ - sequência constante

Sequências Recorrentes - Capítulo 10

Sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ é definida como uma função $a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, onde $a_n = a(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplos: P.A (razão r) e P.G (quociente q)

Progressão Aritmética (P.A.): $a_n = a_{n-1} + r$, para $n > 1$.

Progressão Geométrica (P.G.): $a_n = a_{n-1} \cdot q$, para $n > 1$.

Exemplos de P.A. e P.G.

P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ com **razão $r = 2$** e primeiro termo $a_1 = 0$.

$(a_n) = (0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots)$ - naturais pares

P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ com **razão $r = 2$** e primeiro termo $a_1 = 1$.

$(a_n) = (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots)$ - naturais ímpares

P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ com **quociente $q = 2$** e primeiro termo $a_1 = 1$.

$(a_n) = (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots)$ - potências de 2

P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ com **quociente $q = 3$** e primeiro termo $a_1 = 1$.

$(a_n) = (1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, \dots)$ - potências de 3

P.A. / P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ com **razão $r = 0$ / quociente $q = 1$** .

$(a_n) = (a_1, a_1, a_1, a_1, a_1, a_1, a_1, \dots)$ - sequência constante

Sequências Recorrentes - Capítulo 10

Sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é definida como uma função $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $a_n = a(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplos: P.A (razão r) e P.G (quociente q)

Progressão Aritmética (P.A.): $a_n = a_{n-1} + r$, para $n \geq 1$.

Progressão Geométrica (P.G.): $a_n = a_{n-1} \cdot q$, para $n \geq 1$.

Soma P.A (Exerc. 9.1) e Soma P.G. (Exerc. 9.3)

P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com razão r e primeiro termo a_0 .

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 \cdot n + \frac{r \cdot n(n-1)}{2}$$

P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com quociente q e primeiro termo a_0 .

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \frac{a_0 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Sequências Recorrentes - Mais exemplos

Sequência de Fibonacci

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geq 2$ com $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

$(F_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots)$

Somatórios

Dada uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, podemos definir uma sequência soma $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, como $S_1 = x_0$ e, para $n \geq 2$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k = S_{n-1} + x_{n-1}; \text{ ou}$$

uma sequência soma $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, como $S_0 = x_0$ e, para $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=0}^n x_k = S_{n-1} + x_n$$

Sequências Recorrentes - Definição

Muitas vezes, uma sequência é dada por uma **Equação de Recorrência**, definindo um termo genérico através de termos anteriores da sequência.

Exemplos: PA, PG, Fibonacci, Somatórios, etc... Em geral, o objetivo é **resolver a recorrência**, ou seja, encontrar uma **fórmula fechada** para a sequência, sem depender de termos da própria sequência.

Exemplos:

Recorrência

Fórmula fechada

P.A.: $a_n = a_{n-1} + r \implies a_n = a_0 + r \cdot n$

P.G.: $a_n = a_{n-1} \cdot q \implies a_n = a_0 \cdot q^n$

Somatório dos quadrados perfeitos: $S_n = S_{n-1} + n^2 \quad (S_0 = 0) \implies$

Fórmula fechada:
$$S_n = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Fibonacci: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (F_0 = 0, F_1 = 1) \implies$

Fórmula fechada:
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Sequências Recorrentes - Tipos

Recorrência de 1º ordem

a_n depende apenas do termo anterior a_{n-1} . a_0 deve ser dado.

Exemplos: P.A., P.G., somatório dos n primeiros quadrados perfeitos.

Recorrência de 2º ordem

a_n depende apenas dos dois termos anteriores a_{n-1} e a_{n-2} .

a_0 e a_1 devem ser dados.

Exemplos: Fibonacci $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $a_n = 3 \cdot a_{n-2}$.

Recorrência de k° ordem

a_n depende apenas dos k termos anteriores a_{n-1}, \dots, a_{n-k} .

a_0, \dots, a_{k-1} devem ser dados. **Exemplo:** $a_n = a_{n-k} + 1$.

Exemplo: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \dots + a_{n-k}$.

Exemplo: $a_n = a_{n-3} \cdot 10$ com $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ e $a_2 = 3$.

$a_n = (1, 2, 3, 10, 20, 30, 100, 200, 300, \dots)$

Recorrências de 1º-ordem - 10.4.1. Aditiva simples

Recorrência de 1º ordem - aditiva simples

Recorrência: $a_n = a_{n-1} + f(n)$

Ex: P.A. é um caso particular quando $f(n) = r$ constante.

Solução: Fórmula fechada para qualquer $0 \leq m < n$

$$a_n = a_m + \sum_{k=m+1}^n f(k)$$

Prova:

$$a_n = a_{n-1} + f(n) = a_{n-2} + f(n-1) + f(n) = a_{n-3} + f(n-2) + f(n-1) + f(n) = \dots$$

$$a_n = a_m + f(m+1) + f(m+2) + \dots + f(n).$$

Em geral, esse argumento convence e é suficiente para uma prova rápida.

Para ser mais formal, provar por indução.

Recorrências de 1º-ordem - 10.4.1. Aditiva simples

Recorrência: $a_n = a_{n-1} + f(n)$

Ex: P.A. é um caso particular quando $f(n) = r$ constante.

Solução: Fórmula fechada para qualquer $0 \leq m < n$

$$a_n = a_m + \sum_{k=m+1}^n f(k)$$

Exercício 10.3 (P.A.): $a_n = a_{n-1} + r, \forall n \in \mathbb{N}$. Sabe-se a_m

Se $n > m$: $a_n = a_m + \sum_{k=m+1}^n r = a_m + r \cdot (n - m)$

Se $n < m$: $a_m = a_n + \sum_{k=n+1}^m r = a_n + r \cdot (m - n)$

Solução geral: $a_n = a_m + r \cdot (n - m)$.

Exemplo (Soma P.A.): $S_n = S_{n-1} + a_n$, com $S_0 = a_0$

$$S_n = S_0 + \sum_{k=1}^n a_k = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_0 + r \cdot k)$$

$$S_n = a_0 + n \cdot a_0 + r \cdot \sum_{k=1}^n k \implies S_n = a_0(n+1) + r \cdot n(n+1)/2$$

Exemplo (Soma P.G.): $S_n = S_{n-1} + b_0 \cdot q^n$, com $S_0 = b_0$

$$S_n = S_0 + \sum_{k=1}^n b_0 \cdot q^k = b_0 + b_0 \cdot \sum_{k=1}^n q^k = b_0 \cdot (\sum_{k=0}^n q^k)$$

$$S_n = b_0 \cdot (q^{n+1} - 1)/(q - 1) \text{ (assumindo } q \neq 1)$$

Recorrências de 1º-ordem - 10.4.1. Aditiva simples

Recorrência de 1º ordem - aditiva simples

Recorrência: $a_n = a_{n-1} + f(n)$

Ex: P.A. é um caso particular quando $f(n) = r$ constante.

Solução: Fórmula fechada para qualquer $0 \leq m < n$

$$a_n = a_m + \sum_{k=m+1}^n f(k)$$

Exercício 10.4: $a_n = a_{n-1} + \pi^2$ ($n > 0$) com $a_0 = 2$

$$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^n \pi^2 = 2 + \pi^2 n$$

Exercício 10.5: $a_n = a_{n-1} + n^2$ ($n > 0$) com $a_0 = 0$

$$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^n k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$

Exercício 10.5': $a_n = a_{n-1} + n^3$ ($n > 0$) com $a_0 = 0$

$$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^n k^3 = n^2(n+1)^2/4$$

Recorrências de 1º-ordem - 10.4.1. Aditiva simples

Recorrência de 1º ordem - aditiva simples

Recorrência: $a_n = a_{n-1} + f(n)$

Ex: P.A. é um caso particular quando $f(n) = r$ constante.

Solução: Fórmula fechada para qualquer $0 \leq m < n$

$$a_n = a_m + \sum_{k=m+1}^n f(k)$$

Exercício 10.6': $a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$ ($n > 0$) com $a_0 = 0$

$$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^n 2^{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$$

Exercício 10.6: $a_n = a_{n-1} + 2^n$ ($n > 0$) com $a_1 = 1$

$$a_n = a_1 + \sum_{k=2}^n 2^k = 1 + \sum_{k=0}^n 2^k - 2^0 - 2^1 = 1 + (2^{n+1} - 1) - 3 = 2^{n+1} - 3$$

Recorrências de 1º-ordem - Retas no plano

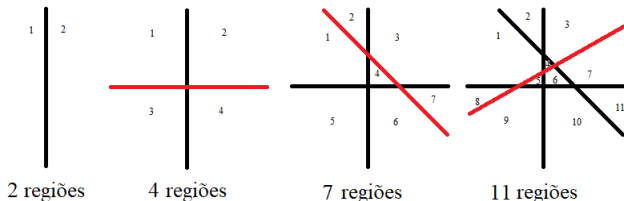
Recorrência de 1º ordem - aditiva simples

Recorrência: $a_n = a_{n-1} + f(n)$

Ex: P.A. é um caso particular quando $f(n) = r$ constante.

Solução: Fórmula fechada para qualquer $0 \leq m < n$

$$a_n = a_m + \sum_{k=m+1}^n f(k)$$



Exemplo 10.7: Número max de regiões no plano com n retas

Eq. Recorrência: $a_n = a_{n-1} + n$ (para $n > 0$) com $a_1 = 2$

Fórmula fechada: $a_n = a_1 + \sum_{k=2}^n k = 1 + n(n+1)/2$

Recorrências de 1º-ordem - Retas no plano

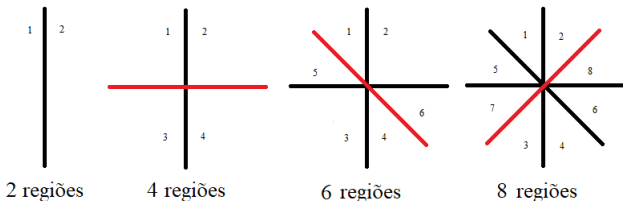
Recorrência de 1º ordem - aditiva simples

Recorrência: $a_n = a_{n-1} + f(n)$

Ex: P.A. é um caso particular quando $f(n) = r$ constante.

Solução: Fórmula fechada para qualquer $0 \leq m < n$

$$a_n = a_m + \sum_{k=m+1}^n f(k)$$



Exemplo 10.7: Número min de regiões no plano com n retas

Eq. Recorrência: $a_n = a_{n-1} + 2$ (para $n > 1$) com $a_1 = 2$

Fórmula fechada: $a_n = a_1 + \sum_{k=2}^n 2 = 2 \cdot n$ (para $n \geq 1$)

Recorrências de 1º-ordem - Círculos no plano

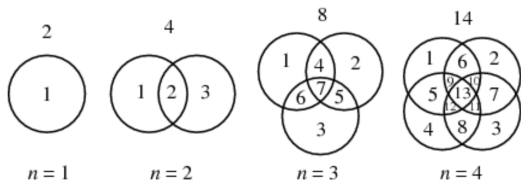
Recorrência de 1º ordem - aditiva simples

Recorrência: $a_n = a_{n-1} + f(n)$

Ex: P.A. é um caso particular quando $f(n) = r$ constante.

Solução: Fórmula fechada para qualquer $0 \leq m < n$

$$a_n = a_m + \sum_{k=m+1}^n f(k)$$



Exercício 10.7: Número max regiões plano n círculos

(a) Eq. Recorrência: $a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$ para $n > 1$ com $a_1 = 2$

(b) Fórmula fechada: $a_n = a_1 + \sum_{k=2}^n 2(k-1) = n^2 - n + 2$ ($n \geq 1$)

Recorrências de 1º-ordem - Círculos no plano

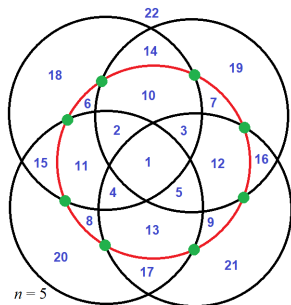
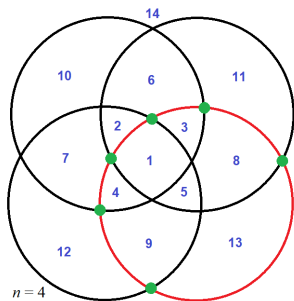
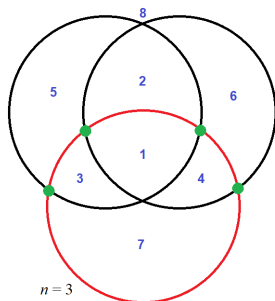
Recorrência de 1º ordem - aditiva simples

Recorrência: $a_n = a_{n-1} + f(n)$

Ex: P.A. é um caso particular quando $f(n) = r$ constante.

Solução: Fórmula fechada para qualquer $0 \leq m < n$

$$a_n = a_m + \sum_{k=m+1}^n f(k)$$



Exercício 10.7: Número max regiões plano n círculos

(a) Eq. Recorrência: $a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$ para $n > 1$ com $a_1 = 2$

(b) Fórmula fechada: $a_n = a_1 + \sum_{k=2}^n 2(k-1) = n^2 - n + 2$ ($n \geq 1$)

Recorrências de 1º-ordem - Círculos no plano

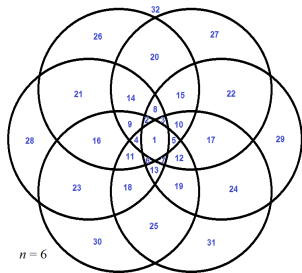
Recorrência de 1º ordem - aditiva simples

Recorrência: $a_n = a_{n-1} + f(n)$

Ex: P.A. é um caso particular quando $f(n) = r$ constante.

Solução: Fórmula fechada para qualquer $0 \leq m < n$

$$a_n = a_m + \sum_{k=m+1}^n f(k)$$



Exercício 10.7: Número max regiões plano n círculos

(a) Eq. Recorrência: $a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$ para $n > 1$ com $a_1 = 2$

(b) Fórmula fechada: $a_n = a_1 + \sum_{k=2}^n 2(k-1) = n^2 - n + 2$ ($n \geq 1$)

Recorrências de 1º-ordem - Exercício 10.8

Recorrência de 1º ordem - aditiva simples

Recorrência: $a_n = a_{n-1} + f(n)$

Ex: P.A. é um caso particular quando $f(n) = r$ constante.

Solução: Fórmula fechada para qualquer $0 \leq m < n$

$$a_n = a_m + \sum_{k=m+1}^n f(k)$$

Exercício 10.8: Seq. nº ímpar 0's em $\{0, 1, 2\}$

(a) Eq. Recorrência: $I_n = 2 \cdot I_{n-1} + 1 \cdot P_{n-1}$ ($n > 1$) com $I_0 = 0$

$$P_n = 3^n - I_n \implies I_n = I_{n-1} + 3^{n-1}.$$

(b) Fórmula fechada:

$$I_n = I_0 + \sum_{k=1}^n 3^{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i = (3^n - 1)/(3 - 1) = (3^n - 1)/2$$

Recorrências de 1º-ordem - 10.4.2. Multiplicativa simples

Recorrência de 1º ordem - multiplicativa simples

Recorrência: $a_n = a_{n-1} \cdot f(n)$

Ex: P.G. é um caso particular quando $f(n) = q$ constante.

Solução: Fórmula fechada para qualquer $0 \leq m < n$

$$a_n = a_m \cdot \prod_{k=m+1}^n f(k)$$

Prova:

$$a_n = a_{n-1} \cdot f(n) = a_{n-2} \cdot f(n-1) \cdot f(n) = a_{n-3} \cdot f(n-2) \cdot f(n-1) \cdot f(n) = \dots$$

$$a_n = a_m \cdot f(m+1) \cdot f(m+2) \cdot \dots \cdot f(n).$$

Em geral, esse argumento convence e é suficiente para uma prova rápida.

Para ser mais formal, provar por indução.

Recorrências de 1º-ordem - 10.4.2. Multiplicativa simples

Recorrência: $a_n = a_{n-1} \cdot f(n)$

Ex: P.G. é um caso particular quando $f(n) = q$ constante.

Solução: Fórmula fechada para qualquer $0 \leq m < n$

$$a_n = a_m \cdot \prod_{k=m+1}^n f(k)$$

Exercício 10.10 (P.G.): $a_n = a_{n-1} \cdot q, \forall n \in \mathbb{N}$. Sabe-se a_m

Se $n > m$: $a_n = a_m \cdot \prod_{k=m+1}^n q = a_m \cdot q^{n-m}$

Se $n < m$: $a_m = a_n \cdot \prod_{k=n+1}^m q = a_n \cdot q^{m-n}$

Solução geral: $a_n = a_m \cdot q^{n-m}$.

Exercício 10.11: $a_n = a_{n-1} \cdot 2/n$ com $a_0 = 1$

$$a_n = a_0 \cdot \prod_{k=1}^n (2/k) = 2^n / \prod_{k=1}^n k = 2^n / n!$$

Exercício 10.12: $a_n = a_{n-1} \cdot (n+p)/n$ com $a_0 = 1$

$$a_n = a_0 \cdot \prod_{k=1}^n (k+p)/k = \prod_{k=1+p}^{n+p} k / \prod_{k=1}^n k$$

$$a_n = \prod_{k=1}^{n+p} k / (\prod_{k=1}^p k \cdot \prod_{k=1}^n k) = (n+p)! / (p!n!) = \binom{n+p}{p}$$

Recorrências de 1º-ordem - Caso geral com constantes

Recorrência: $a_n = s \cdot a_{n-1} + t$ com $s \neq 1$ e t constantes

Solução: Fórmula fechada:

$$a_n = c_1 \cdot s^n + c_2, \text{ onde } c_1 = a_0 - c_2 \text{ e } c_2 = \frac{-t}{s-1}$$

Prova:

$$a_n = s \cdot a_{n-1} + t$$

$$a_n = s \cdot (s \cdot a_{n-2} + t) + t = s^2 \cdot a_{n-2} + t \cdot (1 + s)$$

$$a_n = s^2 \cdot (s \cdot a_{n-3} + t) + t \cdot (1 + s) = s^3 \cdot a_{n-3} + t \cdot (1 + s + s^2)$$

$$a_n = s^3 \cdot (s \cdot a_{n-4} + t) + t \cdot (1 + s + s^2) = s^4 \cdot a_{n-4} + t \cdot (1 + s + s^2 + s^3)$$

...

$$a_n = s^k \cdot a_{n-k} + t \cdot (1 + s + s^2 + s^3 + \dots + s^{k-1})$$

...

$$a_n = s^n \cdot a_0 + t \cdot (1 + s + s^2 + s^3 + \dots + s^{n-1})$$

$$a_n = s^n \cdot a_0 + t \cdot (s^n - 1)/(s - 1)$$

Recorrências de 1º-ordem - Caso geral com constantes

Recorrência: $a_n = s \cdot a_{n-1} + t$ com $s \neq 1$ e t constantes

Solução: Fórmula fechada:

$$a_n = c_1 \cdot s^n + c_2, \text{ onde } c_1 = a_0 - c_2 \text{ e } c_2 = \frac{-t}{s-1}$$

Exemplo: $a_n = s \cdot a_{n-1} + t$

$$a_n = c_1 \cdot s^n + c_2 \Rightarrow a_0 = c_1 + c_2 \quad \text{e} \quad a_1 = s \cdot c_1 + c_2$$

$$a_1 = s \cdot a_0 + t \Rightarrow s \cdot c_1 + c_2 = s \cdot a_0 + t \Rightarrow (s-1) \cdot c_1 = (s-1)a_0 + t$$

$$c_1 = a_0 + t/(s-1) \Rightarrow c_2 = -t/(s-1)$$

Recorrências de 1º-ordem - Caso geral com constantes

Recorrência: $a_n = s \cdot a_{n-1} + t$ com $s \neq 1$ e t constantes

Solução: Fórmula fechada:

$$a_n = c_1 \cdot s^n + c_2, \text{ onde } c_1 = a_0 - c_2 \text{ e } c_2 = \frac{-t}{s-1}$$

Exemplo: $a_n = 3 \cdot (a_{n-1} - 2)$ com $a_0 = 4$

$$s = 3, t = -6 \implies c_2 = 6/(3-1) = 3, c_1 = 4 - 3 = 1$$

$$a_n = 3^n + 3$$

Exemplo: $a_n = 3 \cdot (a_{n-1} - 2)$ com $a_0 = 3$

$$s = 3, t = -6 \implies c_2 = 6/(3-1) = 3, c_1 = 3 - 3 = 0$$

$$a_n = 0 \cdot 3^n + 3 \implies a_n = 3$$

Exemplo: $a_n = 3 \cdot (a_{n-1} - 2)$ com $a_0 = 2$

$$s = 3, t = -6 \implies c_2 = 6/(3-1) = 3, c_1 = 2 - 3 = -1$$

$$a_n = -3^n + 3$$

Recorrências de 1º-ordem - Caso geral com constantes

Recorrência: $a_n = s \cdot a_{n-1} + t$ com $s \neq 1$ e t constantes

Solução: Fórmula fechada:

$$a_n = c_1 \cdot s^n + c_2, \text{ onde } c_1 = a_0 - c_2 \text{ e } c_2 = \frac{-t}{s-1}$$

Exemplo: $a_n = 10 - a_{n-1}$ com $a_0 = 10$

$$s = -1, t = 10 \implies c_2 = -10/(-1-1) = 5, c_1 = 10 - 5 = 5$$

$$a_n = 5 \cdot (-1)^n + 5 \qquad a_n = (10, 0, 10, 0, 10, 0, \dots)$$

Exemplo: $a_n = 10 - a_{n-1}$ com $a_0 = 8$

$$s = -1, t = 10 \implies c_2 = -10/(-1-1) = 5, c_1 = 8 - 5 = 3$$

$$a_n = 3 \cdot (-1)^n + 5 \qquad a_n = (8, 2, 8, 2, 8, 2, \dots)$$

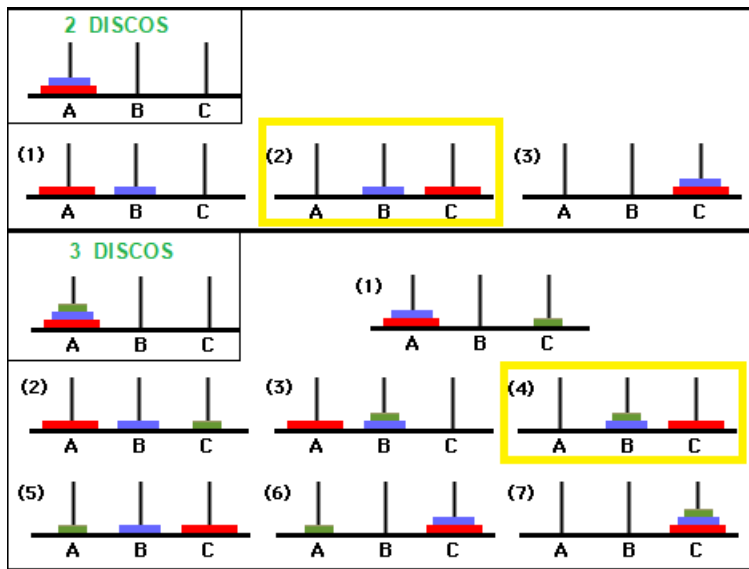
Exemplo: $a_n = 10 - a_{n-1}$ com $a_0 = 2$

$$s = -1, t = 10 \implies c_2 = -10/(-1-1) = 5, c_1 = 2 - 5 = -3$$

$$a_n = (-3) \cdot (-1)^n + 5 \qquad a_n = (2, 8, 2, 8, 2, 8, \dots)$$

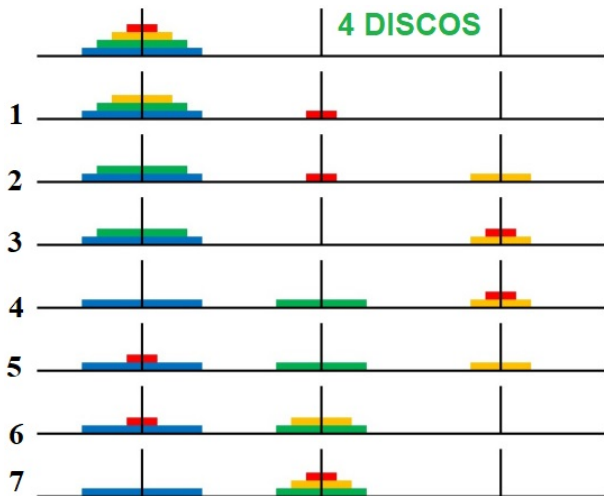
Recorrências de 1º-ordem - Exemplo: Torre de Hanói

Mover n discos da haste A para a C, usando a B como auxiliar, movendo 1 disco por vez, sem colocar um disco maior sobre um menor.



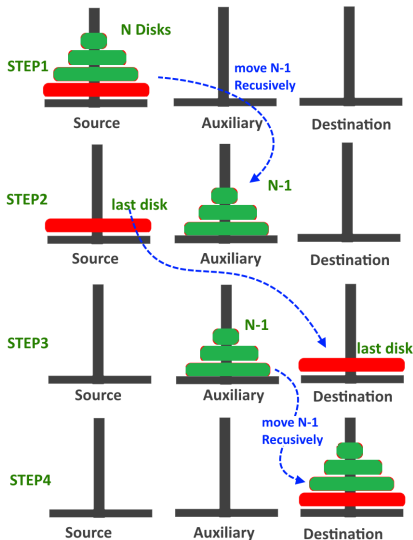
Recorrências de 1º-ordem - Exemplo: Torre de Hanói

Mover n discos da haste A para a C, usando a B como auxiliar, movendo 1 disco por vez, sem colocar um disco maior sobre um menor.



Recorrências de 1º-ordem - Exemplo: Torre de Hanói

Mover n discos da haste A para a C, usando a B como auxiliar, movendo 1 disco por vez, sem colocar um disco maior sobre um menor.



Recorrências de 1º-ordem - Exemplo: Torre de Hanói

Mover n discos da haste A para a C, usando a B como auxiliar, movendo 1 disco por vez, sem colocar um disco maior sobre um menor.

Número de movimentos da Torre de Hanói

Seja a_n o número de movimentos com $n \geq 0$ discos.

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1 \text{ para } n \geq 1, \text{ com } a_0 = 0.$$

Solução:

$$s = 2, t = 1 \implies c_2 = -1/(2 - 1) = -1, c_1 = 0 - (-1) = 1$$

$$a_n = 2^n - 1$$

Provar por indução (Q.1, Lista 2):

Caso base: $n = 0 \implies a_n = 0 = 2^0 - 1$. **OK**

H.I.: Fixe $n > 0$ e suponha valer para menos de n discos.

P.I.: Vamos provar que também vale para n discos.

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1 \xrightarrow{\text{H.I.}} a_n = 2 \cdot (2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 2 + 1$$

$$a_n = 2^n - 1. \text{ cqd } \square$$

Recorrências de 2º-ordem

Recorrência de 2º ordem

a_n depende apenas dos dois termos anteriores a_{n-1} e a_{n-2} .
 a_0 e a_1 devem ser dados.

Exemplo: Fibonacci $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $G_n = -G_{n-2}$.

Exemplo: Fibonacci' $F'_n = F'_{n-1} + F'_{n-2} + 1$, $G'_n = -G'_{n-2} + 1$.

Recorrência de 2º ordem homogênea

É da forma $a_n = s_1 \cdot a_{n-1} + s_2 \cdot a_{n-2}$.

a_0 e a_1 devem ser dados, e s_1 e s_2 são constantes.

Exemplos: F_n e G_n são homogêneas. F'_n e G'_n são não-homogêneas.

Recorrência de kº ordem homogênea

É da forma $a_n = s_1 \cdot a_{n-1} + s_2 \cdot a_{n-2} + \dots + s_k \cdot a_{n-k}$.

a_0, a_1, \dots, a_{k-1} devem ser dados, e s_1, s_2, \dots, s_k são constantes.

Recorrências de 2º-ordem homogêneas

É da forma $a_n = s_1 \cdot a_{n-1} + s_2 \cdot a_{n-2}$.

Soluções do tipo $a_n = r^n$ para $r \neq 0$:

$$a_n = s_1 \cdot a_{n-1} + s_2 \cdot a_{n-2} \implies r^n = s_1 r^{n-1} + s_2 r^{n-2} \xrightarrow{\div r^{n-2}} \implies$$

$$\xrightarrow{\div r^{n-2}} r^2 = s_1 r + s_2 \implies r^2 - s_1 r - s_2 = 0 \text{ (Eq. 2º-grau: raízes } r_1 \text{ e } r_2)$$

Portanto $a_n = r_1^n$ e $a_n = r_2^n$ são soluções (ignorando a_0 e a_1)

Se a'_n e a''_n são soluções, então $a_n = c_1 a'_n + c_2 a''_n$ é solução, pois

$$a_n = c_1 a'_n + c_2 a''_n = c_1 (s_1 a'_{n-1} + s_2 a'_{n-2}) + c_2 (s_1 a''_{n-1} + s_2 a''_{n-2}) \implies$$

$$a_n = s_1 (c_1 a'_{n-1} + c_2 a''_{n-1}) + s_2 (c_1 a'_{n-2} + c_2 a''_{n-2}) = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2}$$

Soluções do tipo $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ para $r_1 \neq r_2$:

$$a_0 = c_1 r_1^0 + c_2 r_2^0 \implies c_1 + c_2 = a_0$$

$$a_1 = c_1 r_1^1 + c_2 r_2^1 \implies r_1 c_1 + r_2 c_2 = a_1$$

Resolver sistema 2 equações e variáveis c_1 e c_2 :

$$c_1 = \frac{a_1 - a_0 r_2}{r_1 - r_2} \quad e \quad c_2 = \frac{-a_1 + a_0 r_1}{r_1 - r_2}$$

Recorrências de 2º-ordem homogêneas

Teorema: Sejam r_1 e r_2 as raízes de $x^2 - s_1x - s_2 = 0$. Se $r_1 \neq r_2$, então toda solução para a recorrência $a_n = s_1a_{n-1} + s_2a_{n-2}$ é da forma $a_n = c_1r_1^n + c_2r_2^n$. Ademais,

$$c_1 = \frac{a_1 - a_0r_2}{r_1 - r_2} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{-a_1 + a_0r_1}{r_1 - r_2}$$

Exerc.13(c)L2: $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ com $a_0 = 1$ e $a_1 = 3$

$s_1 = 5$, $s_2 = -6$: eq. caract. $x^2 - 5x + 6 = 0 \implies$ raízes $r_1 = 3$ e $r_2 = 2$

$c_1 = (3 - 1 \cdot 2)/(3 - 2) = 1$ e $c_2 = (-3 + 1 \cdot 3)/(3 - 2) = 0$

$a_n = 1 \cdot 3^n + 0 \cdot 2^n \implies a_n = 3^n$

Exerc.13(c')L2: $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ com $a_0 = 1$ e $a_1 = 2$

$c_1 = (2 - 1 \cdot 2)/(3 - 2) = 0$ e $c_2 = (-2 + 1 \cdot 3)/(3 - 2) = 1$

$a_n = 0 \cdot 3^n + 1 \cdot 2^n \implies a_n = 2^n$

Exerc.13(c'')L2: $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ com $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$

$c_1 = (1 - 0 \cdot 2)/(3 - 2) = 1$ e $c_2 = (-1 + 0 \cdot 3)/(3 - 2) = -1$

$a_n = (1) \cdot 3^n + (-1) \cdot 2^n \implies a_n = 3^n - 2^n$

Recorrências de 2º-ordem homogêneas

Teorema: Sejam r_1 e r_2 as raízes de $x^2 - s_1x - s_2 = 0$. Se $r_1 \neq r_2$, então toda solução para a recorrência $a_n = s_1a_{n-1} + s_2a_{n-2}$ é da forma $a_n = c_1r_1^n + c_2r_2^n$. Ademais,

$$c_1 = \frac{a_1 - a_0r_2}{r_1 - r_2} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{-a_1 + a_0r_1}{r_1 - r_2}$$

Exemplo: $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$ com $a_0 = 3$ e $a_1 = 2$

$s_1 = 3$, $s_2 = 4$: eq. caract. $x^2 - 3x - 4 = 0 \implies$ raízes $r_1 = 4$ e $r_2 = -1$
 $c_1 = (2 - 3(-1))/(4 - (-1)) = 1$ e $c_2 = (-2 + 3 \cdot 4)/(4 - (-1)) = 2$
 $a_n = 1 \cdot 4^n + 2 \cdot (-1)^n \implies a_n = 4^n + 2 \cdot (-1)^n$

Fibonacci: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ com $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$

$s_1 = 1$, $s_2 = 1$: eq. caract. $x^2 - x - 1 = 0 \implies$ raízes $r_1, r_2 = (1 \pm \sqrt{5})/2$
 $c_1 = (1 - 0(r_2))/\sqrt{5} = 1/\sqrt{5}$ e $c_2 = (-1 + 0 \cdot r_1)/\sqrt{5} = -1/\sqrt{5}$
 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$

Recorrências de 2º-ordem homogêneas

Teorema: Sejam r_1 e r_2 as raízes de $x^2 - s_1x - s_2 = 0$. Se $r_1 \neq r_2$, então toda solução para a recorrência $a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2}$ é da forma $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$. Ademais,

$$c_1 = \frac{a_1 - a_0 r_2}{r_1 - r_2} \quad e \quad c_2 = \frac{-a_1 + a_0 r_1}{r_1 - r_2}$$

Exemplo: $a_n = -a_{n-2}$ com $a_0 = 4$ e $a_1 = 6$

$$a_n = (4, 6, -4, -6, 4, 6, -4, -6, 4, 6, -4, -6, \dots)$$

$s_1 = 0$, $s_2 = -1$: eq. caract. $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ raízes $r_1 = i = \sqrt{-1}$ e $r_2 = -i$

$c_1 = (6 - 4(-i))/(i - (-i)) = 2 - 3i$ e $c_2 = (-6 + 4 \cdot i)/2i = 2 + 3i$

$$a_n = (2 - 3i) \cdot i^n + (2 + 3i) \cdot (-i)^n \implies$$

$$a_n = 2 \cdot i^n (1 + (-1)^n) + 3 \cdot i^{n-1} (1 + (-1)^{n-1})$$

$$n \text{ par} \implies a_n = \pm 4 \quad n \text{ ímpar} \implies a_n = \pm 6$$

Na verdade, é melhor resolver recorrências desse tipo $a_n = s_2 \cdot a_{n-2}$ como duas P.G.'s separadas nos índices pares e nos índices ímpares, com quociente q e primeiros valores a_0 e a_1 , respectivamente.

Recorrências de 2º-ordem homogêneas (raiz repetida)

Teorema: Sejam r_1 e r_2 de forma que a equação $x^2 - s_1x - s_2 = 0$ tenha apenas uma raiz $r \neq 0$. Então toda solução para a recorrência $a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2}$ é da forma $a_n = c_1 \cdot r^n + c_2 n \cdot r^n$. Ademais,

$$c_1 = a_0 \quad e \quad c_2 = \frac{a_1 - a_0 r}{r}$$

Intuição da Prova:

$x^2 - s_1x - s_2 = 0$ tem só 1 raiz \Rightarrow Eq. $(x-r)^2 = x^2 - 2rx + r^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow s_1 = 2r$ e $s_2 = -r^2 \Rightarrow$ usa-se isso p/ mostrar que $n \cdot r^n$ é solução.

$$\begin{aligned} nr^n &= s_1(n-1)r^{n-1} + s_2(n-2)r^{n-2} \stackrel{\div r^{n-2}}{\iff} r^2 n = s_1 r(n-1) + s_2(n-2) \stackrel{s_1, s_2}{\iff} \\ \stackrel{s_1, s_2}{\iff} r^2 n &= 2r^2(n-1) - r^2(n-2) \stackrel{\div r^2}{\iff} n = 2(n-1) - (n-2) \iff 0 = 0 \end{aligned}$$

Além disso,

$$a_0 = c_1 r^0 + c_2 \cdot 0 \cdot r^0 \implies c_1 = a_0$$

$$a_1 = c_1 r^1 + c_2 \cdot 1 \cdot r^1 \implies c_1 r + c_2 r = a_1 \implies c_2 = (a_1 - a_0 r)/r$$

Recorrências de 2º-ordem homogêneas (raiz repetida)

Teorema: Sejam r_1 e r_2 de forma que a equação $x^2 - s_1x - s_2 = 0$ tenha apenas uma raiz $r \neq 0$. Então toda solução para a recorrência $a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2}$ é da forma $a_n = c_1 \cdot r^n + c_2 n \cdot r^n$. Ademais,

$$c_1 = a_0 \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{a_1 - a_0 r}{r}$$

Exerc.13(d): $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ com $a_0 = 1$ e $a_1 = 3$

$s_1 = 4$, $s_2 = -4$: eq. caract. $x^2 - 4x + 4 = 0 \implies$ raiz única $r = 2$

$$c_1 = a_0 = 1 \quad \text{e} \quad c_2 = (3 - 1 \cdot 2)/2 = 1/2$$

$$a_n = 1 \cdot 2^n + (1/2) \cdot n \cdot 2^n \implies a_n = (2 + n) \cdot 2^{n-1}$$

Exerc.13(d'): $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ com $a_0 = 1$ e $a_1 = 4$

$$c_1 = a_0 = 1 \quad \text{e} \quad c_2 = (4 - 1 \cdot 2)/2 = 1$$

$$a_n = 1 \cdot 2^n + 1 \cdot n \cdot 2^n \implies a_n = (1 + n) \cdot 2^n$$

Exerc.13(d''): $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ com $a_0 = 1$ e $a_1 = 6$

$$c_1 = a_0 = 1 \quad \text{e} \quad c_2 = (6 - 1 \cdot 2)/2 = 2$$

$$a_n = 1 \cdot 2^n + 2 \cdot n \cdot 2^n \implies a_n = (1 + 2n) \cdot 2^n$$

Recorrências de 2º-ordem homogêneas (raiz repetida)

Teorema: Sejam r_1 e r_2 de forma que a equação $x^2 - s_1x - s_2 = 0$ tenha apenas uma raiz $r \neq 0$. Então toda solução para a recorrência $a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2}$ é da forma $a_n = c_1 \cdot r^n + c_2 n \cdot r^n$. Ademais,

$$c_1 = a_0 \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{a_1 - a_0 r}{r}$$

Exemplo: $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ com $a_0 = 2$ e $a_1 = 9$

$s_1 = 6$, $s_2 = -9$: eq. caract. $x^2 - 6x + 9 = 0 \implies$ raiz única $r = 3$

$$c_1 = a_0 = 2 \quad \text{e} \quad c_2 = (9 - 2 \cdot 3)/3 = 1$$

$$a_n = 2 \cdot 3^n + 1 \cdot n \cdot 3^n \implies a_n = (2 + n) \cdot 3^n$$

Exemplo: $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ com $a_0 = 2$ e $a_1 = 6$

$$c_1 = a_0 = 2 \quad \text{e} \quad c_2 = (6 - 2 \cdot 3)/3 = 0$$

$$a_n = 2 \cdot 3^n + 0 \cdot n \cdot 3^n \implies a_n = 2 \cdot 3^n$$

Exemplo: $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ com $a_0 = 2$ e $a_1 = 3$

$$c_1 = a_0 = 2 \quad \text{e} \quad c_2 = (3 - 2 \cdot 3)/3 = -1$$

$$a_n = 2 \cdot 3^n + (-1) \cdot n \cdot 3^n \implies a_n = (2 - n) \cdot 3^n$$

Recorrências de 2º-ordem homogêneas (raiz repetida)

Teorema: Sejam r_1 e r_2 de forma que a equação $x^2 - s_1x - s_2 = 0$ tenha apenas uma raiz $r \neq 0$. Então toda solução para a recorrência $a_n = s_1a_{n-1} + s_2a_{n-2}$ é da forma $a_n = c_1 \cdot r^n + c_2n \cdot r^n$. Ademais,

$$c_1 = a_0 \quad e \quad c_2 = \frac{a_1 - a_0r}{r}$$

Exemplo: $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ com a_0 e a_1

$s_1 = 2$, $s_2 = -1$: eq. caract. $x^2 - 2x + 1 = 0 \implies$ raiz única $r = 1$

$c_1 = a_0$ e $c_2 = (a_1 - a_0 \cdot 1)/1 = (a_1 - a_0)$

$a_n = a_0 \cdot 1^n + (a_1 - a_0) \cdot n \cdot 1^n \implies a_n = (a_1 - a_0)n + a_0$

Recorrências de 2º-ordem NÃO-homogêneas

Teorema:

Dada uma recorrência $a'_n = s_1 a'_{n-1} + s_2 a'_{n-2} + s_3$, se $s_1 + s_2 \neq 1$, então $a'_n = a_n - b$, onde $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ é tal que $a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2}$ e $b = s_3 / (s_1 + s_2 - 1)$.

Prova:

$$\begin{aligned} a'_n = a_n - b &\Leftrightarrow (a_n - b) = s_1(a_{n-1} - b) + s_2(a_{n-2} - b) + s_3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2} + s_3 - b(s_1 + s_2 - 1) \Leftrightarrow a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2} \end{aligned}$$

Ex: Fibonacci' $F'_n = F'_{n-1} + F'_{n-2} + 1$ com $F'_0 = -1$ e $F'_1 = 0$

Intuição: Observar que $F'_n = F_n - 1$ funciona, pois

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \Leftrightarrow F_n - 1 = (F_{n-1} - 1) + (F_{n-2} - 1) + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F'_n = F'_{n-1} + F'_{n-2} + 1$$

$$F'_n = (-1, 0, 0, 1, 2, 4, 7, 12, 20, 33, 54, \dots)$$

$$F_n = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots)$$

$$F'_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] - 1$$

Recorrências de 2º-ordem NÃO-homogêneas

Teorema:

Dada uma recorrência $a'_n = s_1 a'_{n-1} + s_2 a'_{n-2} + s_3$, se $s_1 + s_2 \neq 1$, então $a'_n = a_n - b$, onde $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ é tal que $a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2}$ e $b = s_3 / (s_1 + s_2 - 1)$.

Exemplo: $a'_n = 6a'_{n-1} - 9a'_{n-2} + 4$ com $a'_0 = 3$ e $a'_1 = 7$

$b = 4 / (6 - 9 - 1) = -1 \Rightarrow a'_n = a_n + 1$ com $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, $a_0 = 2$, $a_1 = 6$
 $a_n = 2 \cdot 3^n \Rightarrow a'_n = 2 \cdot 3^n + 1$

Exemplo: $a'_n = -a'_{n-2} + 4$ com $a'_0 = 6$ e $a'_1 = 8$

$b = 4 / (0 - 1 - 1) = -2 \Rightarrow a'_n = a_n + 2$ com $a_n = -a_{n-2}$, $a_0 = 4$, $a_1 = 6$

$$a'_n = (2 - 3i) \cdot i^n + (2 + 3i) \cdot (-i)^n + 2$$

$$a'_n = (6, 8, -2, -4, 6, 8, -2, -4, \dots)$$

$$a_n = (4, 6, -4, -6, 4, 6, -4, -6, \dots)$$

CASOS MAIS GERAIS: Funções geradoras

Técnica das Funções Geradoras: não será ensinado aqui.

Sequências Recorrentes - RESUMO

Recorrências de 1º ordem: $a_n = a_{n-1} \cdot s(n) + t(n)$

- ▶ Aditiva simples ($s(n) = 1$): $a_n = a_0 + \sum_{k=1}^n t(k)$
- ▶ Multipl. simples ($t(n) = 0$): $a_n = a_0 \cdot \prod_{k=1}^n s(k)$
- ▶ Caso geral com constantes ($s \neq 1$ e t): $a_n = c_1 \cdot s^n + c_2$

Recorrências de 2º ordem hom: $a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2}$

- ▶ Equação característica: $x^2 - s_1 x - s_2 = 0$ com raízes r_1, r_2
- ▶ Raízes distintas ($r_1 \neq r_2$): $a_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n$
- ▶ Raízes iguais ($r_1 = r_2 = r$): $a_n = c_1 \cdot r^n + c_2 \cdot n \cdot r^n$

Recorrências de 2º ordem NÃO-hom: $a'_n = s_1 a'_{n-1} + s_2 a'_{n-2} + s_3$

- ▶ Se $s_1 + s_2 \neq 1$, seja $b = s_3 / (s_1 + s_2 - 1)$.
- ▶ Rec. hom corr: $a_n = s_1 a_{n-1} + s_2 a_{n-2}$ com $a_0 = a'_0 + b$ e $a_1 = a'_1 + b$
- ▶ Solução: $a'_n = a_n - b$

Capítulo 11

COMBINATÓRIA

Capítulo 11 - Contagem - Combinatória

Ex 11.1: 3 bolas rotuladas 1 a 3 em caixas numeradas A e B.

▶ $2^3 = 8$ modos: AAA,AAB,ABA,ABB,BAA,BAB,BBA,BBB

(a) E se bolas idênticas com caixas distintas ?

▶ 4 modos: 3-0, 2-1, 1-2, 0-3

(b) E se bolas distintas com caixas idênticas ?

▶ 4 modos: 123- \emptyset , 12-3, 13-2, 1-23

(c) E se bolas idênticas com caixas idênticas ?

▶ 2 modos: 3-0, 2-1

Capítulo 11 - Contagem - Combinatória

Ex 11.10: 20 pessoas em 4 viagens, cada uma com 5 pessoas.

$$\binom{20}{5} \cdot \binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{5} = \frac{20!}{\cancel{5!15!}} \cdot \frac{\cancel{15!}}{\cancel{5!10!}} \cdot \frac{\cancel{10!}}{\cancel{5!5!}} \cdot \frac{\cancel{5!}}{5!0!} = \frac{20!}{5!5!5!5!}$$

Faz uma permutação das 20 pessoas: as 5 primeiras vão na 1ª viagem e assim por diante. Dentro dessa permutação maior, qualquer permutação das posições 1 a 5, ou de 6 a 10, ou de 11 a 15, ou de 16 a 20, gerará a mesma configuração de viagem. Por isso, devemos dividir por 5! quatro vezes.

Capítulo 11 - Contagem - Combinatória

Exercício 11.13:

- ▶ Sejam X e Y conjuntos finitos, com $|X| = m$ e $|Y| = n$. Seja R um subconjunto de X com r elementos, e S um subconjunto de Y com s elementos. Quantas funções F distintas existem de X para Y tais que $F(x) \in S$ para todo x em R ?

Solução:

- ▶ Cada elemento de R tem s valores possíveis e cada elemento fora de R tem n valores possíveis. Pelo princípio multiplicativo:

$$\text{Resposta} = s^r \cdot n^{m-r}$$

Capítulo 11 - Contagem - Combinatória

Exercício 11.22:

- ▶ Quantas “mãos” diferentes de cinco cartas podem ser obtidas de um baralho de 52 cartas?

Solução:

- ▶ De 52 cartas diferentes, temos que escolher 5. A ordem não importa:

$$\text{Resposta} = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!(52-5)!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot \cancel{47!}}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{47!}}$$

$$\binom{52}{5} = 52 \cdot 51 \cdot 5 \cdot 49 \cdot 4 = 52 \cdot 51 \cdot 980 = 2.598.960$$

Capítulo 11 - Contagem - Combinatória

Exercício 11.23:

- ▶ Quantas maneiras há de empilhar 3 laranjas (indistinguíveis) e 2 maçãs (indistinguíveis) dentro um vaso estreito de vidro?

Solução:

- ▶ Das 5 posições dentro do vaso estreito, temos que escolher 2 para as maçãs. As 3 posições restantes serão das laranjas.

$$\text{Resposta} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{3!}} = \frac{20}{2} = 10$$

Capítulo 11 - Contagem - Combinatória

Exercício 11.23':

Quantas maneiras há de empilhar 5 frutas (laranjas ou maçãs indistinguíveis) dentro um vaso estreito de vidro?

(a) Se o número de maçãs é 0: $\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!5!} = 1$

(b) Se o número de maçãs é 1: $\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!4!} = 5$

(c) Se o número de maçãs é 2: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$

(d) Se o número de maçãs é 3: $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$

(e) Se o número de maçãs é 4: $\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!1!} = 5$

(f) Se o número de maçãs é 5: $\binom{5}{5} = \frac{5!}{5!0!} = 1$

(g) Total = $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Capítulo 11 - Contagem - Combinatória

Exercício 11.24:

- ▶ Há 2^n seqüências distintas de n bits (algarismos 0 e 1). Quantas dessas seqüências tem exatamente k bits iguais a 1?

Solução:

- ▶ Das n posições na seqüência, temos que escolher k para o bit 1. As $n - k$ posições restantes serão do bit 0.

$$\text{Resposta} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Capítulo 11 - Contagem - Combinatória

Exercício 11.24':

- ▶ Há 3^n seqüências distintas de n letras A, B ou C. Quantas dessas seqüências tem exatamente k letras iguais a A?

Solução:

- ▶ Das n posições na seqüência, temos que escolher k para a letra A. As $n - k$ posições restantes serão das letras B e C: duas escolhas (B ou C) para cada posição. Pelo princípio multiplicativo:

$$\text{Resposta} = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot 2^{n-k}$$

Capítulo 11 - Contagem - Combinatória

Exercício 11.24':

- ▶ Há 5^n seqüências distintas de n letras A, B, C, D ou E. Quantas dessas seqüências tem exatamente k letras iguais a A e ℓ letras iguais a B?

Solução:

- ▶ Das n posições na seqüência, temos que escolher k para a letra A. Das $n - k$ posições restantes, temos que escolher ℓ para a letra B. As $n - k - \ell$ posições restantes serão das letras C, D e E: três escolhas (C, D ou E) para cada posição. Pelo princípio multiplicativo:

$$\begin{aligned} \text{Resposta} &= \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{\ell} \cdot 3^{n-k-\ell} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{\ell!(n-k-\ell)!} \cdot 3^{n-k-\ell} = \frac{n! 3^{n-k-\ell}}{k!\ell!(n-k-\ell)!} \end{aligned}$$

Capítulo 11 - Contagem - Combinatória

Ex 11.10: 20 pessoas em 4 viagens, cada uma com 5 pessoas.

$$\binom{20}{5} \cdot \binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{5} = \frac{20!}{\cancel{5!15!}} \cdot \frac{\cancel{15!}}{\cancel{5!10!}} \cdot \frac{\cancel{10!}}{\cancel{5!5!}} \cdot \frac{\cancel{5!}}{5!0!} = \frac{20!}{5!5!5!5!}$$

Faz uma permutação das 20 pessoas: as 5 primeiras vão na 1ª viagem e assim por diante. Dentro dessa permutação maior, qualquer permutação das posições 1 a 5, ou de 6 a 10, ou de 11 a 15, ou de 16 a 20, gerará a mesma configuração de viagem. Por isso, devemos dividir por 5! quatro vezes.

Capítulo 11 - Contagem - Combinatória

Propriedades do Binômio de Newton

$$(a) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$(b) \quad \binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1) \cdot n!}{(k+1)!(n-k)!} = \\ = \frac{(k+1 + n-k) \cdot n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \quad \text{Identidade de Pascal ou Relação de Stifel}$$

Capítulo 11 - Contagem - Combinatória

Propriedades do Binômio de Newton

$$(c) \quad (a + b)^n = (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) \cdot \dots \cdot (a + b)$$

Fazendo a distributividade, os termos desse produto serão da forma

$$a \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot a = a^{n-k} \cdot b^k \quad (\text{onde } k \text{ é o número de } b\text{'s})$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Capítulo 11 - Contagem - Combinatória

Exercício 11.28:

- ▶ Seja X um conjunto de n elementos. Usando a fórmula do exercício 11.27, prove que o número de subconjuntos de X de tamanho par é igual ao número de subconjuntos de tamanho ímpar.

Solução:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \text{ Tomando } a = 1 \text{ e } b = -1:$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$$

Capítulo 11 - Contagem - Combinatória

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)\cancel{(n-r)!}}{r!\cancel{(n-r)!}}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n}{r} \cdot \frac{n-1}{r-1} \cdot \frac{n-2}{r-2} \cdot \dots \cdot \frac{n-r+1}{1}$$

$$\binom{n}{r} = \prod_{k=1}^r \frac{n-k+1}{k}$$

É mais fácil calcular computacionalmente assim.

Em exercícios dessa disciplina, é melhor deixar em formato de binômio mesmo, amenos que os valores sejam pequenos e possam ser calculados à mão, usando a fórmula original:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Exercício 6 da Lista 3

Se enumerarmos todas as permutações dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 em ordem crescente, então:

(a) Que posição ocupa o número 42513?

(b) Qual número ocupa a posição 73?

Solução (a):

- ▶ Existem $4!$ permutações começando em 1.
- ▶ Existem $4!$ permutações começando em 2.
- ▶ Existem $4!$ permutações começando em 3.
- ▶ Existem $3!$ permutações começando em 41.
- ▶ Existem $2!$ permutações começando em 421.
- ▶ Existem $2!$ permutações começando em 423.
- ▶ Após todas essas, teremos a permutação 42513.
- ▶ Posição = $1 + 3 \cdot 4! + 3! + 2 \cdot 2! = 83$

Exercício 6 da Lista 3

Se enumerarmos todas as permutações dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 em ordem crescente, então:

- (a) Que posição ocupa o número 42513?
- (b) Qual número ocupa a posição 73?

Solução (b):

- ▶ Existem $1 \cdot 4! = 24$ permutações começando em 1.
- ▶ Existem $2 \cdot 4! = 48$ permutações começando em 1 ou 2.
- ▶ Existem $3 \cdot 4! = 72$ permutações começando em 1, 2 ou 3.
- ▶ Posição 73: [Permutação 41235](#).

Exercício 7 da Lista 3

Quantos são os subconjuntos de k elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$ nos quais:

- (a) 1 aparece?
- (b) 1 não aparece?
- (c) 1 e 2 aparecem?
- (d') 1 aparece e 2 não aparece?
- (e') 1 e 2 não aparecem?

Solução:

- (a) $\binom{n-1}{k-1}$
- (b) $\binom{n-1}{k}$
- (c) $\binom{n-2}{k-2}$
- (d') $\binom{n-2}{k-1}$
- (e') $\binom{n-2}{k}$

Exercício 8 da Lista 3

Considere todos os subconjuntos com 5 elementos de $\{1, 2, \dots, 12\}$. Se ordenarmos todos esses subconjuntos por ordem crescente de índices, em quantos subconjuntos o elemento 8 aparece na posição 3 da sua ordenação?

Solução:

- ▶ 5 posições com o 8 aparecendo na posição 3.
- ▶ Nas posições 1 e 2, devemos ter números menores que 8.
- ▶ Nas posições 4 e 5, devemos ter números maiores que 8.
- ▶ Escolher 2 em $\{1, \dots, 7\}$ e escolher 2 em $\{9, \dots, 12\}$.

$$\binom{7}{2} \cdot 1 \cdot \binom{4}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 7 \cdot 6 \cdot 3 = 126$$

Exercício 9(a) da Lista 3

- ▶ Quantas soluções inteiras existem para $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 50$ com $x_i \geq 0$?

Solução:

- ▶ É equivalente a $x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 = 54$ com $x'_i \geq 1$, fazendo $x'_i = x_i + 1$
- ▶ Dividir colocando 3 barras entre os 54 doces.

$$\binom{53}{3} = \binom{50 + 4 - 1}{4 - 1} = \binom{50 + 4 - 1}{50}$$

Fórmula geral: p variáveis naturais que somam n :

$$\binom{n + p - 1}{p - 1} = \binom{n + p - 1}{n}$$

Exercício 9(a)' da Lista 3

- ▶ Quantas soluções inteiras existem para $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 50$ com $x_1 \geq -2$, $x_2 \geq -1$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 1$ e $x_5 \geq 2$?

Solução:

- ▶ É equivalente a $x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 + x'_5 = 55$ com $x'_i \geq 1$, fazendo $x'_1 = x_1 + 3$, $x'_2 = x_2 + 2$, $x'_3 = x_3 + 1$, $x'_4 = x_4$ e $x'_5 = x_5 - 1$, pois.
- ▶ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 50 \implies$
- ▶ $\implies (x'_1 - 3) + (x'_2 - 2) + (x'_3 - 1) + (x'_4) + (x'_5 + 1) = 50 \implies$
- ▶ $\implies x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 + x'_5 = 55$.
- ▶ Dividir colocando 4 barras entre os 55 doces.

$$\binom{54}{4} = \binom{50 + 5 - 1}{5 - 1} = \binom{50 + 5 - 1}{50}$$

Fórmula geral: p variáveis naturais que somam n :

$$\binom{n + p - 1}{p - 1} = \binom{n + p - 1}{n}$$

Exercício 11 da Lista 3

Determine o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{99} \quad \text{e de} \quad \left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{100}$$

Solução:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(x^2 + x^{-3})^{99} = \sum_{k=0}^{99} \binom{99}{k} x^{2(99-k)} x^{-3k} = \sum_{k=0}^{99} \binom{99}{k} x^{2 \cdot 99 - 5k}$$

$$5k = 198 - 3 = 195 \Rightarrow k = 39. \quad \text{Coeficiente: } \binom{99}{39} = \binom{99}{60}$$

$$(x^2 + x^{-3})^{100} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} x^{2(100-k)} x^{-3k} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} x^{2 \cdot 100 - 5k}$$

$$5k = 200 - 3 = 197 \Rightarrow k = 197/3. \quad \text{Coeficiente: } 0 \text{ (não existe } x^3 \text{).}$$

Seção 11.7 - Permutações e Arranjos Circulares

Exercício 11.32 (a)

$$\text{Resposta}_1 = \binom{10}{5} \cdot \frac{5!}{5} = \frac{10!}{5!5!} \cdot \frac{5!}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 5} = 6048$$

$$\text{Resposta}_2 = \frac{10!}{5!} \cdot \frac{1}{5} = 6048$$

$$\text{Resposta}_3 = (10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6) \cdot \frac{1}{5} = 6048$$

Exercício 11.32 (b)

$$\text{Resposta}_1 = \binom{10}{5} \cdot \frac{5!}{5} \cdot \frac{5!}{5} = \frac{10!}{\cancel{5!5!}} \cdot \frac{\cancel{5!}}{5} \cdot \frac{\cancel{5!}}{5} = \frac{10!}{25} = 145152$$

$$\text{Resposta}_2 = (10!) \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = 145152 = 6048 \cdot 4!$$

Seção 11.10 - Combinações múltiplas

Exercício 11.35

Quantas maneiras existem de distribuir 5 cartas para cada um de 4 jogadores, de um baralho de 52 cartas?

Solução

$$\begin{aligned} \text{Resposta}_1 &= \binom{52}{5} \cdot \binom{47}{5} \cdot \binom{42}{5} \cdot \binom{37}{5} = \frac{52!}{\cancel{5!47!}} \cdot \frac{\cancel{47!}}{5!\cancel{42!}} \cdot \frac{\cancel{42!}}{5!\cancel{37!}} \cdot \frac{\cancel{37!}}{5!32!} \\ &= \frac{52!}{5!5!5!5!32!} \end{aligned}$$

$$\text{Resposta}_2 = \binom{52}{5, 5, 5, 5, 32} = \frac{52!}{5!5!5!5!32!}$$

Seção 11.10 - Combinações múltiplas

Exercício 11.36

Quantas maneiras distintas existem de pintar 20 casas com as cores **vermelha**, **azul**, **verde** e **amarela** (cada casa de uma só cor), sendo que deve haver o mesmo número (5) de casas de cada cor?

Solução

$$\begin{aligned} \text{Resposta}_1 &= \binom{20}{5} \cdot \binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{5} = \frac{20!}{\cancel{5!15!}} \cdot \frac{\cancel{15!}}{\cancel{5!10!}} \cdot \frac{\cancel{10!}}{\cancel{5!5!}} \cdot \frac{\cancel{5!}}{5!0!} \\ &= \frac{20!}{5!5!5!5!} \\ \text{Resposta}_2 &= \binom{20}{5, 5, 5, 5} = \frac{20!}{5!5!5!5!} \end{aligned}$$

Seção 11.10 - Combinações múltiplas

Exercício 11.38

Quantas maneiras há de dividir 16 alunos em 3 grupos de estudo, para Física, Química e Matemática; sendo que deve haver 6 alunos em cada um dos dois primeiros grupos, e 4 no último?

Solução

$$\text{Resposta}_1 = \binom{16}{6} \cdot \binom{10}{6} \cdot \binom{4}{4} = \frac{16!}{6!10!} \cdot \frac{10!}{6!4!} = \frac{16!}{6!6!4!}$$

$$\text{Resposta}_2 = \binom{16}{6, 6, 4} = \frac{16!}{6!6!4!}$$

Seção 11.9 - Permutações com alguns elementos iguais

Exemplo: Anagramas

Quantos anagramas existem da palavra BANANAS?

Solução

$$Resposta_1 = \frac{7!}{3!2!}$$

$$Resposta_2 = \binom{7}{1} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = \frac{7!}{1!6!} \cdot \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{1!}{1!0!}$$

$$= \frac{7!}{1!3!2!1!}$$

$$Resposta_3 = \binom{7}{1, 3, 2, 1} = \frac{7!}{1!3!2!1!}$$

Seção 11.9 - Permutações com alguns elementos iguais

Exemplo: Anagramas

Quantos anagramas existem da palavra PARALELEPIPEDO?

Solução

(P,E,A,L,R,I,D,O)=(3,3,2,2,1,1,1,1). Total: 14 letras.

$$Resposta_1 = \frac{14!}{3!3!2!2!}$$

$$Resposta_2 = \binom{14}{3} \cdot \binom{11}{3} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot 4! = \frac{14!}{\cancel{3!11!}} \cdot \frac{\cancel{11!}}{\cancel{3!8!}} \cdot \frac{\cancel{8!}}{\cancel{2!6!}} \cdot \frac{\cancel{6!}}{\cancel{2!4!}} \cdot \cancel{4!}$$

$$= \frac{14!}{3!3!2!2!}$$

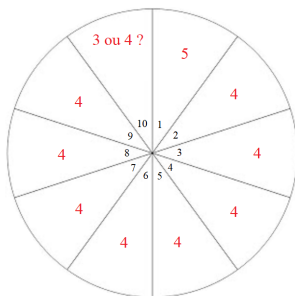
$$Resposta_3 = \binom{14}{3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1} = \frac{14!}{3!3!2!2!}$$

Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

Exercício 11.41: Uma roleta tem 10 setores numerados. Deve-se pintar cada setor com uma cor diferente das de seus dois vizinhos. Há 5 cores disponíveis. De quantas maneiras podemos pintar essa roleta?

Solução:

1º **tentativa:** Escolhe uma das 5 cores para o setor 1, depois uma das 4 cores para o setor 2, 4 cores para o setor 3, ... e 4 cores para o setor 9. Falta escolher as cores do setor 10. Até aí temos $5 \cdot 4^{n-2}$ possibilidades. Para o setor 10, temos 3 ou 4 possibilidades, dependendo se a cor do setor 9 é diferente ou igual a do setor 1. *Não parece ser fácil por aí...*



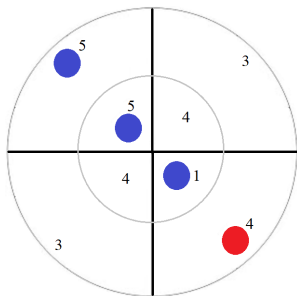
Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

Exercício 11.41: Uma roleta tem 10 setores numerados. Deve-se pintar cada setor com uma cor diferente das de seus dois vizinhos. Há 5 cores disponíveis. De quantas maneiras podemos pintar essa roleta?

Solução:

2º **tentativa:** Recorrência. Seja a_n o número de modos de pintar uma roleta com n setores. Queremos calcular a_{10} .

$$a_2 = 5 \cdot 4 = 20, \quad a_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60, \quad a_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 4 = 260$$



Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

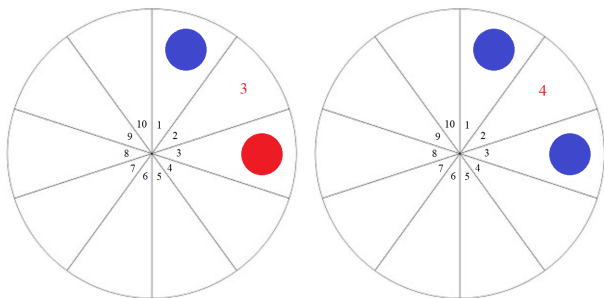
Exercício 11.41: Uma roleta tem 10 setores numerados. Deve-se pintar cada setor com uma cor diferente das de seus dois vizinhos. Há 5 cores disponíveis. De quantas maneiras podemos pintar essa roleta?

Solução:

2º **tentativa:** Recorrência. Seja a_n o número de modos de pintar uma roleta com n setores. Queremos calcular a_{10} .

$$a_2 = 20, \quad a_3 = 60, \quad a_4 = 260$$

$$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}, \text{ para } n \geq 5$$



Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

Exercício 11.41: Uma roleta tem 10 setores numerados. Deve-se pintar cada setor com uma cor diferente das de seus dois vizinhos. Há 5 cores disponíveis. De quantas maneiras podemos pintar essa roleta?

Solução:

2º **tentativa:** Recorrência. Seja a_n o número de modos de pintar uma roleta com n setores. Queremos calcular a_{10} .

$$a_2 = 20, \quad a_3 = 60, \quad a_4 = 260$$

$$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}, \text{ para } n \geq 5$$

Recorrência de 2º-ordem: **eq. caract.** $x^2 - 3x - 4 = 0$

$$\text{Raízes } r_1 = 4 \text{ e } r_2 = -1 \implies a_n = c_1 \cdot 4^n + c_2 \cdot (-1)^n$$

Podemos calcular facilmente $c_1 = 1$ e $c_2 = 4$ com os valores de a_2 e a_3 .

$$a_n = 4^n + 4 \cdot (-1)^n, \text{ para } n \geq 2.$$

$$a_{10} = 4^{10} + 4 \cdot (-1)^{10} = (1024)^2 + 4 = \mathbf{1.048.580}$$

Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

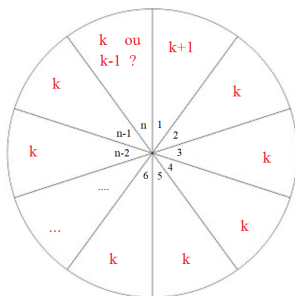
Exercício 11.41”: Uma roleta tem n setores numerados. Deve-se pintar cada setor com uma cor diferente das de seus dois vizinhos. Há $k + 1$ cores disponíveis. De quantas maneiras podemos pintar essa roleta?

Solução:

1º **tentativa:** Escolhe uma das $k + 1$ cores para o setor 1, depois uma das k cores para o setor 2, ... e k cores para o setor $n - 1$.

Faltam as cores do setor n . Até aí temos $(k + 1) \cdot k^{n-2}$ possibilidades.

Para o setor n , temos $k - 1$ ou k possibilidades, dependendo se a cor do setor $n - 1$ é diferente ou igual a do setor 1. *Não parece ser fácil por aí...*



Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

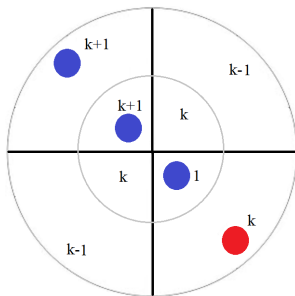
Exercício 11.41”: Uma roleta tem n setores numerados. Deve-se pintar cada setor com uma cor diferente das de seus dois vizinhos. Há $k + 1$ cores disponíveis. De quantas maneiras podemos pintar essa roleta?

Solução:

2º **tentativa:** Recorrência. Seja a_n o número de modos de pintar uma roleta com n setores usando $k + 1$ cores.

$$a_2 = (k + 1) \cdot k = k^2 + k, \quad a_3 = (k + 1) \cdot k \cdot (k - 1) = k^3 - k$$

$$a_4 = (k + 1) \cdot k \cdot (k - 1)^2 + (k + 1) \cdot 1 \cdot k^2 = k^4 + k$$



Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

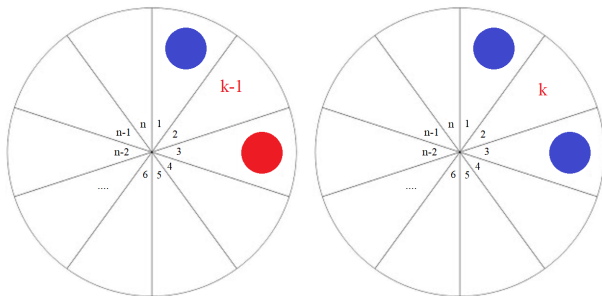
Exercício 11.41”: Uma roleta tem n setores numerados. Deve-se pintar cada setor com uma cor diferente das de seus dois vizinhos. Há $k + 1$ cores disponíveis. De quantas maneiras podemos pintar essa roleta?

Solução:

2º **tentativa:** Recorrência. Seja a_n o número de modos de pintar uma roleta com n setores usando $k + 1$ cores.

$$a_2 = k^2 + k, \quad a_3 = k^3 - k, \quad a_4 = k^4 + k$$

$$a_n = (k - 1) \cdot a_{n-1} + k \cdot a_{n-2}, \text{ para } n \geq 5$$



Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

Exercício 11.41”: Uma roleta tem n setores numerados. Deve-se pintar cada setor com uma cor diferente das de seus dois vizinhos. Há $k + 1$ cores disponíveis. De quantas maneiras podemos pintar essa roleta?

Solução:

2º **tentativa:** Recorrência. Seja a_n o número de modos de pintar uma roleta com n setores usando $k + 1$ cores.

$$a_2 = k^2 + k, \quad a_3 = k^3 - k, \quad a_4 = k^4 + k$$

$$a_n = (k - 1) \cdot a_{n-1} + k \cdot a_{n-2}, \text{ para } n \geq 5$$

Recorrência de 2º-ordem: eq. caract. $x^2 - (k - 1)x - k = 0$

Raízes $r_1 = k$ e $r_2 = -1 \implies a_n = c_1 \cdot k^n + c_2 \cdot (-1)^n$

Podemos calcular facilmente $c_1 = 1$ e $c_2 = k$ com os valores de a_2 e a_3 .

$$a_n = k^n + k \cdot (-1)^n, \text{ para } n \geq 2.$$

Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

Exercício 10(b) - Lista 3:

$$\binom{p+n+1}{p+1} = \sum_{r=0}^n \binom{p+r}{p} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \dots + \binom{p+n-1}{p} + \binom{p+n}{p}$$

Resolução: equação $x_1 + x_2 + \dots + x_{p+1} + x_{p+2} = n$

Número de soluções naturais: $\binom{n+(p+2)-1}{(p+2)-1} = \binom{p+n+1}{p+1}$

Resolução alternativa:

Caso 0: $x_{p+2} = 0 \implies$ n° soluções: $\binom{(n-0)+(p+1)-1}{(p+1)-1} = \binom{p+n}{p}$

Caso 1: $x_{p+2} = 1 \implies$ n° soluções: $\binom{(n-1)+(p+1)-1}{(p+1)-1} = \binom{p+n-1}{p}$

Caso 2: $x_{p+2} = 2 \implies$ n° soluções: $\binom{(n-2)+(p+1)-1}{(p+1)-1} = \binom{p+n-2}{p}$

Caso 3: $x_{p+2} = 3 \implies$ n° soluções: $\binom{(n-3)+(p+1)-1}{(p+1)-1} = \binom{p+n-3}{p}$

...

...

Caso n: $x_{p+2} = n \implies$ n° soluções: $\binom{(n-n)+(p+1)-1}{(p+1)-1} = \binom{p}{p}$

Pelo princípio aditivo da contagem, temos por dupla contagem:

$$\binom{p+n+1}{p+1} = \sum_{r=0}^n \binom{p+r}{p} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \dots + \binom{p+n-1}{p} + \binom{p+n}{p}$$

Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

Exercício 10(b) - Lista 3:

$$\binom{p+n+1}{p+1} = \sum_{r=0}^n \binom{p+r}{p} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \dots + \binom{p+n-1}{p} + \binom{p+n}{p}$$

Exercício 10(a) - Lista 3:

$$\binom{n+p+1}{p} = \sum_{r=0}^p \binom{n+r}{r} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+p-1}{p-1} + \binom{n+p}{p}$$

Resolução:

$$\sum_{r=0}^p \binom{n+r}{r} = \sum_{r=0}^p \binom{n+r}{n} \stackrel{(b)}{=} \binom{n+p+1}{n+1} = \binom{n+p+1}{p}$$

Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

Exercício 10(c) - Lista 3: $\binom{n+2}{p+2} = \binom{n}{p} + 2 \cdot \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p+2}$

Resolução:

Em um grupo de n homens e 2 mulheres, selecionar $p + 2$ pessoas.

Total: $\binom{n+2}{p+2}$

Resolução alternativa:

Caso 2: Tem 2 mulheres: $\binom{n}{p}$

Caso 1: Tem 1 mulher: $2 \cdot \binom{n}{p+1}$

Caso 0: Tem 0 mulheres: $\binom{n}{p+2}$

Pelo **princípio aditivo da contagem**, temos por **dupla contagem**:

$$\binom{n+2}{p+2} = \binom{n}{p} + 2 \cdot \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p+2}$$

Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

Exercício 10(d) - Lista 3: $\binom{n+3}{p+3} = \binom{n}{p} + 3 \cdot \binom{n}{p+1} + 3 \cdot \binom{n}{p+2} + \binom{n}{p+3}$

Resolução:

Em um grupo de n homens e 3 mulheres, selecionar $p + 3$ pessoas.

Total: $\binom{n+3}{p+3}$

Resolução alternativa:

Caso 3: Tem 3 mulheres: $\binom{n}{p}$

Caso 2: Tem 2 mulheres: $3 \cdot \binom{n}{p+1}$

Caso 1: Tem 1 mulher: $3 \cdot \binom{n}{p+2}$

Caso 0: Tem 0 mulheres: $\binom{n}{p+3}$

Pelo **princípio aditivo da contagem**, temos por **dupla contagem**:

$$\binom{n+3}{p+3} = \binom{n}{p} + 3 \cdot \binom{n}{p+1} + 3 \cdot \binom{n}{p+2} + \binom{n}{p+3}$$

Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

Exercício 10(e) - Lista 3:

$$\binom{n+4}{p+4} = \binom{n}{p} + 4 \cdot \binom{n}{p+1} + 6 \cdot \binom{n}{p+2} + 4 \cdot \binom{n}{p+3} + \binom{n}{p+4}$$

Resolução:

Em um grupo de n homens e 4 mulheres, selecionar $p + 4$ pessoas.

Total: $\binom{n+4}{p+4}$

Resolução alternativa:

Caso 4: Tem 4 mulheres: $\binom{n}{p}$

Caso 3: Tem 3 mulheres: $4 \cdot \binom{n}{p+1}$

Caso 2: Tem 2 mulheres: $6 \cdot \binom{n}{p+2}$

Caso 1: Tem 1 mulher: $4 \cdot \binom{n}{p+3}$

Caso 0: Tem 0 mulheres: $\binom{n}{p+4}$

Pelo **princípio aditivo da contagem**, temos por **dupla contagem**:

$$\binom{n+4}{p+4} = \binom{n}{p} + 4 \cdot \binom{n}{p+1} + 6 \cdot \binom{n}{p+2} + 4 \cdot \binom{n}{p+3} + \binom{n}{p+4}$$

Seção 11.11 - Princípio aditivo da contagem

Exercício 10(f) - Lista 3: $\binom{n+k}{p+k} = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \cdot \binom{n}{p+r}$

Resolução:

Em um grupo de n homens e k mulheres, selecionar $p + k$ pessoas.

Total: $\binom{n+k}{p+k}$

Resolução alternativa:

Caso 0: Tem $k - 0$ mulheres: $\binom{n}{p}$

Caso 1: Tem $k - 1$ mulheres: $k \cdot \binom{n}{p+1}$

.....
Caso r : Tem $k - r$ mulheres: $\binom{k}{k-r} \cdot \binom{n}{p+r} = \binom{k}{r} \cdot \binom{n}{p+r}$

.....
Caso $k - 2$: Tem 2 mulheres: $\binom{k}{2} \cdot \binom{n}{p+k-2} = \binom{k}{k-2} \cdot \binom{n}{p+k-2}$

Caso $k - 1$: Tem 1 mulher: $k \cdot \binom{n}{p+k-1} = \binom{k}{k-1} \cdot \binom{n}{p+k-1}$

Caso $k - 0$: Tem 0 mulheres: $\binom{n}{p+k}$

Pelo **princípio aditivo da contagem**, temos por **dupla contagem**:

$$\binom{n+k}{p+k} = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \cdot \binom{n}{p+r}$$

Questão 10 Lista 3 (soluções alternativas)

Exercício 10(a) - Lista 3:

$$\binom{n+p+1}{p} = \sum_{r=0}^p \binom{n+r}{r} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+p-1}{p-1} + \binom{n+p}{p}$$

Resolução: Relação de Stifel ou Identidade de Pascal

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \dots + \binom{n+p}{p} =$$

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \dots + \binom{n+p}{p} =$$

$$\binom{n+2}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \binom{n+4}{4} + \dots + \binom{n+p}{p} =$$

$$\binom{n+3}{2} + \binom{n+3}{3} + \binom{n+4}{4} + \binom{n+5}{5} + \dots + \binom{n+p}{p} =$$

$$\binom{n+4}{3} + \binom{n+4}{4} + \binom{n+5}{5} + \binom{n+6}{6} + \dots + \binom{n+p}{p} =$$

$$\binom{n+5}{4} + \binom{n+5}{5} + \binom{n+6}{6} + \binom{n+7}{7} + \dots + \binom{n+p}{p} =$$

$$\binom{n+p-2}{p-3} + \binom{n+p-2}{p-2} + \binom{n+p-1}{p-1} + \binom{n+p}{p} =$$

$$\binom{n+p-1}{p-2} + \binom{n+p-1}{p-1} + \binom{n+p}{p} =$$

$$\binom{n+p}{p-1} + \binom{n+p}{p} =$$

$$\binom{n+p+1}{p}$$

Questão 10 Lista 3 (soluções alternativas)

Exercício 10(b) - Lista 3:

$$\binom{p+n+1}{p+1} = \sum_{r=0}^n \binom{p+r}{p} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \dots + \binom{p+n-1}{p} + \binom{p+n}{p}$$

Resolução: Relação de Stifel ou Identidade de Pascal

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \binom{p+3}{p} + \dots + \binom{p+n}{p} =$$

$$\binom{p+1}{0} + \binom{p+1}{1} + \binom{p+2}{2} + \binom{p+3}{3} + \dots + \binom{p+n}{n} =$$

$$\binom{p+2}{1} + \binom{p+2}{2} + \binom{p+3}{3} + \binom{p+4}{4} + \dots + \binom{p+n}{n} =$$

$$\binom{p+3}{2} + \binom{p+3}{3} + \binom{p+4}{4} + \binom{p+5}{5} + \dots + \binom{p+n}{n} =$$

$$\binom{p+4}{3} + \binom{p+4}{4} + \binom{p+5}{5} + \binom{p+6}{6} + \dots + \binom{p+n}{n} =$$

$$\binom{p+5}{4} + \binom{p+5}{5} + \binom{p+6}{6} + \binom{p+7}{7} + \dots + \binom{p+n}{n} =$$

$$\binom{p+n-2}{n-3} + \binom{p+n-2}{n-2} + \binom{p+n-1}{n-1} + \binom{p+n}{n} =$$

$$\binom{p+n-1}{n-2} + \binom{p+n-1}{n-1} + \binom{p+n}{n} =$$

$$\binom{p+n}{n-1} + \binom{p+n}{n} =$$

$$\binom{p+n+1}{n}$$

Questão 10 Lista 3 (soluções alternativas)

Exercício 10(c) - Lista 3: $\binom{n+2}{p+2} = \binom{n}{p} + 2\binom{n}{p+1} + \binom{n}{p+2}$

Resolução: Relação de Stifel ou Identidade de Pascal

$$\begin{aligned} \binom{n}{p} + 2\binom{n}{p+1} + \binom{n}{p+2} &= \\ \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p+2} &= \\ \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p+2} &= \end{aligned}$$

$$\binom{n+2}{p+2}$$

Questão 10 Lista 3 (soluções alternativas)

Exercício 10(d) - Lista 3: $\binom{n+3}{p+3} = \binom{n}{p} + 3\binom{n}{p+1} + 3\binom{n}{p+2} + \binom{n}{p+3}$

Resolução: Relação de Stifel ou Identidade de Pascal

$$\begin{aligned} \binom{n}{p} + 3\binom{n}{p+1} + 3\binom{n}{p+2} + \binom{n}{p+3} &= \\ \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} + 2\binom{n}{p+1} + 2\binom{n}{p+2} + \binom{n}{p+2} + \binom{n}{p+3} &= \\ \binom{n+1}{p+1} + 2\binom{n+1}{p+2} + \binom{n+1}{p+3} &= \end{aligned} \quad (c)$$

$$\binom{n+3}{p+3}$$

Questão 10 Lista 3 (soluções alternativas)

Exercício 10(e) - Lista 3:

$$\binom{n+4}{p+4} = \binom{n}{p} + 4 \cdot \binom{n}{p+1} + 6 \cdot \binom{n}{p+2} + 4 \cdot \binom{n}{p+3} + \binom{n}{p+4}$$

Resolução: Relação de Stifel ou Identidade de Pascal

$$\begin{aligned} \binom{n}{p} + 4\binom{n}{p+1} + 6\binom{n}{p+2} + 4\binom{n}{p+3} + \binom{n}{p+4} &= \\ \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} + 3\binom{n}{p+1} + 3\binom{n}{p+2} + 3\binom{n}{p+2} + 3\binom{n}{p+3} + \binom{n}{p+3} + \binom{n}{p+4} &= \\ \binom{n+1}{p+1} + 3\binom{n+1}{p+2} + 3\binom{n+1}{p+3} + \binom{n+1}{p+4} &= \end{aligned} \quad \underline{\underline{(d)}}$$

$$\binom{n+4}{p+4}$$

Exercício 10(f) - Lista 3: $\binom{n+k}{p+k} = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \cdot \binom{n}{p+r}$

É possível provar por indução em k usando esse mesmo esquema.

Seção 11.12 - Princípio Subtrativo da Contagem

Exercício 11.43: Quantas mãos de 4 cartas podem ser tiradas de um baralho comum (de 52 cartas) nas quais aparecem pelo menos dois ases?

Solução pelo Princípio Subtrativo: Tudo menos 0 ou 1 Ás

$$\text{Total} = \binom{52}{4}$$

$$\text{Complemento (no máximo 1 Ás): } \binom{48}{4} + 4 \cdot \binom{48}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Resultado} &= \binom{52}{4} - \binom{48}{4} - 4 \cdot \binom{48}{3} = \frac{52!}{4!48!} - \frac{48!}{4!44!} - 4 \cdot \frac{48!}{3!45!} \\ &= \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - 4 \cdot \frac{48 \cdot 47 \cdot 46}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{6961} \end{aligned}$$

Solução pelo Princípio Aditivo: 4 Ases + 3 Ases + 2 Ases

$$\text{Resultado} =$$

$$\binom{4}{4} \binom{48}{0} + \binom{4}{3} \cdot \binom{48}{1} + \binom{4}{2} \binom{48}{2} = 1 + 4 \cdot 48 + 6 \cdot \frac{48 \cdot 47}{2} = \mathbf{6961}$$

Capítulo 11.13

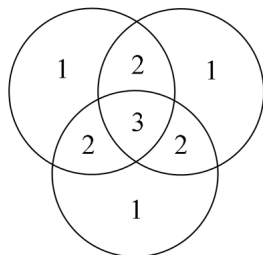
INCLUSÃO E EXCLUSÃO

Seção 11.13 - Princípio da Inclusão e Exclusão

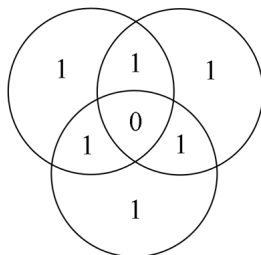
$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C \cup D| &= |A| + |B| + |C| + |D| - \\ &\quad - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + \\ &\quad + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - \\ &\quad - |A \cap B \cap C \cap D| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C \cup D \cup E| &= |A| + |B| + |C| + |D| + |E| - \\ &\quad - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |A \cap E| - |B \cap C| - |B \cap D| - |B \cap E| - |C \cap D| - |C \cap E| - |D \cap E| + \\ &\quad + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap B \cap E| + |A \cap C \cap D| + |A \cap C \cap E| + \\ &\quad + |A \cap D \cap E| + |B \cap C \cap D| + |B \cap C \cap E| + |B \cap D \cap E| + |C \cap D \cap E| - \\ &\quad - |A \cap B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap E| - |A \cap C \cap D \cap E| - |B \cap C \cap D \cap E| \\ &\quad + |A \cap B \cap C \cap D \cap E| \end{aligned}$$

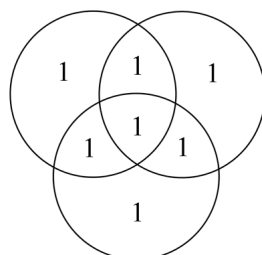
Seção 11.13 - Princípio da Inclusão e Exclusão



$$|A| + |B| + |C|$$

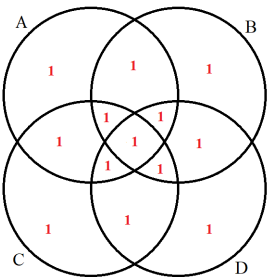
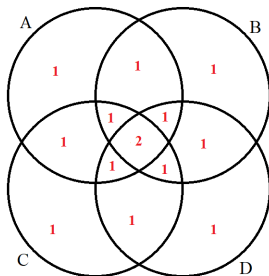
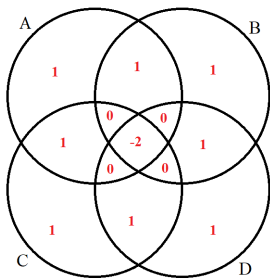
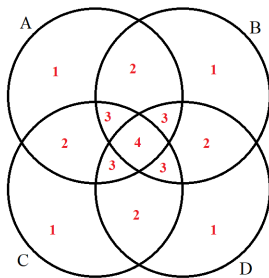


$$|A| + |B| + |C| \\ - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|)$$



$$|A| + |B| + |C| \\ - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) \\ + |A \cap B \cap C|$$

Seção 11.13 - Princípio da Inclusão e Exclusão



Seção 11.13 - Princípio da Inclusão e Exclusão

Exercício: Quantos números entre 1 e 60 não são divisíveis por 2, 3 ou 5?

Solução pelo Princípio da Inclusão e Exclusão

A_k : conjunto dos múltiplos de k de 1 a 60 $\implies |A_k| = \lfloor \frac{60}{k} \rfloor$.

$$|A_2| = \lfloor \frac{60}{2} \rfloor = 30$$

$$|A_3| = \lfloor \frac{60}{3} \rfloor = 20$$

$$|A_5| = \lfloor \frac{60}{5} \rfloor = 12$$

$$|A_2 \cap A_3| = |A_{2 \cdot 3}| = \lfloor \frac{60}{6} \rfloor = 10$$

$$|A_2 \cap A_5| = |A_{2 \cdot 5}| = \lfloor \frac{60}{10} \rfloor = 6$$

$$|A_3 \cap A_5| = |A_{3 \cdot 5}| = \lfloor \frac{60}{15} \rfloor = 4$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = |A_{2 \cdot 3 \cdot 5}| = \lfloor \frac{60}{30} \rfloor = 2$$

Pelo Princípio da Inclusão e Exclusão, temos que:

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 30 + 20 + 12 - 10 - 6 - 4 + 2 = 44$$

Resultado final = $60 - 44 = 16$ (Princípio Subtrativo)

1,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,**49**,53,59

Seção 11.13 - Princípio da Inclusão e Exclusão

Exercício: Quantos números entre 1 e 1001 não são divisíveis por 7, 11 ou 13?

Solução pelo Princípio da Inclusão e Exclusão

A_k : conjunto dos múltiplos de k de 1 a 1001 $\implies |A_k| = \lfloor \frac{1001}{k} \rfloor$.

$$|A_7| = \lfloor \frac{1001}{7} \rfloor = 143$$

$$|A_{11}| = \lfloor \frac{1001}{11} \rfloor = 91$$

$$|A_{13}| = \lfloor \frac{1001}{13} \rfloor = 77$$

$$|A_7 \cap A_{11}| = |A_{7 \cdot 11}| = \lfloor \frac{1001}{77} \rfloor = 13$$

$$|A_7 \cap A_{13}| = |A_{7 \cdot 13}| = \lfloor \frac{1001}{91} \rfloor = 11$$

$$|A_{11} \cap A_{13}| = |A_{11 \cdot 13}| = \lfloor \frac{1001}{143} \rfloor = 7$$

$$|A_7 \cap A_{11} \cap A_{13}| = |A_{7 \cdot 11 \cdot 13}| = \lfloor \frac{1001}{1001} \rfloor = 1$$

Pelo Princípio da Inclusão e Exclusão, temos que:

$$|A_7 \cup A_{11} \cup A_{13}| = 143 + 91 + 77 - 13 - 11 - 7 + 1 = 281$$

Resultado final = $1001 - 281 = 720$ (Princípio Subtrativo)

Seção 11.13 - Princípio da Inclusão e Exclusão

Ex. 02 da Lista 3: Quantos números entre 1 e 350.000 não são divisíveis por 7, 11, 13, 17 ou 19?

Solução pelo Princípio da Inclusão e Exclusão

A_k : conjunto dos múltiplos de k de 1 a 350.000 $\implies |A_k| = \lfloor \frac{350.000}{k} \rfloor$.

$$|A_7| = \lfloor \frac{350.000}{7} \rfloor = 50000$$

$$|A_{11}| = \lfloor \frac{350.000}{11} \rfloor = 31818$$

$$|A_{13}| = \lfloor \frac{350.000}{13} \rfloor = 26923$$

$$|A_{17}| = \lfloor \frac{350.000}{17} \rfloor = 20588$$

$$|A_{19}| = \lfloor \frac{350.000}{19} \rfloor = 18421$$

$$|A_7 \cap A_{11}| = |A_{7 \cdot 11}| = \lfloor \frac{350.000}{7 \cdot 11} \rfloor = 4545$$

$$|A_7 \cap A_{13}| = |A_{7 \cdot 13}| = \lfloor \frac{350.000}{7 \cdot 13} \rfloor = 3846$$

$$|A_7 \cap A_{17}| = |A_{7 \cdot 17}| = \lfloor \frac{350.000}{7 \cdot 17} \rfloor = 2941$$

$$|A_7 \cap A_{19}| = |A_{7 \cdot 19}| = \lfloor \frac{350.000}{7 \cdot 19} \rfloor = 2631$$

$$|A_{11} \cap A_{13}| = |A_{11 \cdot 13}| = \lfloor \frac{350.000}{11 \cdot 13} \rfloor = 2447$$

$$|A_{11} \cap A_{17}| = |A_{11 \cdot 17}| = \lfloor \frac{350.000}{11 \cdot 17} \rfloor = 1871$$

$$|A_{11} \cap A_{19}| = |A_{11 \cdot 19}| = \lfloor \frac{350.000}{11 \cdot 19} \rfloor = 1674$$

$$|A_{13} \cap A_{17}| = |A_{13 \cdot 17}| = \lfloor \frac{350.000}{13 \cdot 17} \rfloor = 1583$$

$$|A_{13} \cap A_{19}| = |A_{13 \cdot 19}| = \lfloor \frac{350.000}{13 \cdot 19} \rfloor = 1417$$

$$|A_{17} \cap A_{19}| = |A_{17 \cdot 19}| = \lfloor \frac{350.000}{17 \cdot 19} \rfloor = 1083$$

Seção 11.13 - Princípio da Inclusão e Exclusão

Ex. 02 da Lista 3: Quantos números entre 1 e 350.000 não são divisíveis por 7, 11, 13, 17 ou 19?

Solução pelo Princípio da Inclusão e Exclusão

A_k : conjunto dos múltiplos de k de 1 a 350.000 $\implies |A_k| = \left\lfloor \frac{350.000}{k} \right\rfloor$.

$$|A_7 \cap A_{11} \cap A_{13}| = |A_{7 \cdot 11 \cdot 13}| = \left\lfloor \frac{350.000}{7 \cdot 11 \cdot 13} \right\rfloor = 349$$

$$|A_7 \cap A_{11} \cap A_{17}| = |A_{7 \cdot 11 \cdot 17}| = \left\lfloor \frac{350.000}{7 \cdot 11 \cdot 17} \right\rfloor = 267$$

$$|A_7 \cap A_{11} \cap A_{19}| = |A_{7 \cdot 11 \cdot 19}| = \left\lfloor \frac{350.000}{7 \cdot 11 \cdot 19} \right\rfloor = 239$$

$$|A_7 \cap A_{13} \cap A_{17}| = |A_{7 \cdot 13 \cdot 17}| = \left\lfloor \frac{350.000}{7 \cdot 13 \cdot 17} \right\rfloor = 226$$

$$|A_7 \cap A_{13} \cap A_{19}| = |A_{7 \cdot 13 \cdot 19}| = \left\lfloor \frac{350.000}{7 \cdot 13 \cdot 19} \right\rfloor = 202$$

$$|A_7 \cap A_{17} \cap A_{19}| = |A_{7 \cdot 17 \cdot 19}| = \left\lfloor \frac{350.000}{7 \cdot 17 \cdot 19} \right\rfloor = 154$$

$$|A_{11} \cap A_{13} \cap A_{17}| = |A_{11 \cdot 13 \cdot 17}| = \left\lfloor \frac{350.000}{11 \cdot 13 \cdot 17} \right\rfloor = 143$$

$$|A_{11} \cap A_{13} \cap A_{19}| = |A_{11 \cdot 13 \cdot 19}| = \left\lfloor \frac{350.000}{11 \cdot 13 \cdot 19} \right\rfloor = 128$$

$$|A_{11} \cap A_{17} \cap A_{19}| = |A_{11 \cdot 17 \cdot 19}| = \left\lfloor \frac{350.000}{11 \cdot 17 \cdot 19} \right\rfloor = 98$$

$$|A_{13} \cap A_{17} \cap A_{19}| = |A_{13 \cdot 17 \cdot 19}| = \left\lfloor \frac{350.000}{13 \cdot 17 \cdot 19} \right\rfloor = 83$$

Seção 11.13 - Princípio da Inclusão e Exclusão

Ex. 02 da Lista 3: Quantos números entre 1 e 350.000 não são divisíveis por 7, 11, 13, 17 ou 19?

Solução pelo Princípio da Inclusão e Exclusão

A_k : conjunto dos múltiplos de k de 1 a 350.000 $\implies |A_k| = \left\lfloor \frac{350.000}{k} \right\rfloor$.

$$|A_7 \cap A_{11} \cap A_{13} \cap A_{17}| = |A_{7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17}| = \left\lfloor \frac{350.000}{7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17} \right\rfloor = 20$$

$$|A_7 \cap A_{11} \cap A_{13} \cap A_{19}| = |A_{7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19}| = \left\lfloor \frac{350.000}{7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19} \right\rfloor = 18$$

$$|A_7 \cap A_{11} \cap A_{17} \cap A_{19}| = |A_{7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19}| = \left\lfloor \frac{350.000}{7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19} \right\rfloor = 14$$

$$|A_7 \cap A_{13} \cap A_{17} \cap A_{19}| = |A_{7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}| = \left\lfloor \frac{350.000}{7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19} \right\rfloor = 11$$

$$|A_{11} \cap A_{13} \cap A_{17} \cap A_{19}| = |A_{11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}| = \left\lfloor \frac{350.000}{11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19} \right\rfloor = 7$$

$$|A_7 \cap A_{11} \cap A_{13} \cap A_{17} \cap A_{19}| = |A_{7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}| = \left\lfloor \frac{350.000}{7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19} \right\rfloor = 1$$

Seção 11.13 - Princípio da Inclusão e Exclusão

Ex. 02 da Lista 3: Quantos números entre 1 e 350.000 não são divisíveis por 7, 11, 13, 17 ou 19?

Solução pelo Princípio da Inclusão e Exclusão

Pelo Princípio da Inclusão e Exclusão, temos que:

$$\begin{aligned} |A_7 \cup A_{11} \cup A_{13} \cup A_{17} \cup A_{19}| &= 50000 + 31818 + 26923 + 20588 + 18421 - \\ &- 4545 - 3846 - 2941 - 2631 - 2447 - 1871 - 1674 - 1583 - 1417 - 1083 + \\ &+ 349 + 267 + 239 + 226 + 202 + 154 + 143 + 128 + 98 + 83 - \\ &- 20 - 18 - 14 - 11 - 7 + 1 = \mathbf{125.532} \end{aligned}$$

Pelo Princípio Subtrativo da Contagem:

$$\mathbf{Resultado\ final} = 350.000 - 125.532 = \mathbf{224.468}$$

Seção 11.13 - Princípio da Inclusão e Exclusão

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_i |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

Prova Combinatória:

Seja x um elemento que aparece em exatamente m dos conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n . Quantos conjuntos da forma $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$ com $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ contém x ?

Resposta: $\binom{m}{k}$ para $1 \leq k \leq m$, pois é o número de modos de escolher k conjuntos entre os m conjuntos que contém x .

No lado direito da Inclusão e Exclusão, x será contado quantas vezes?

$$\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \binom{m}{4} + \dots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m}$$

Já vimos que:

$$\binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \binom{m}{4} - \dots + (-1)^m \binom{m}{m} = (1 - 1)^m = 0$$

$$\implies \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \binom{m}{4} + \dots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m} = \binom{m}{0} - 0 = 1.$$

Logo x será contado exatamente 1 vez.

PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS

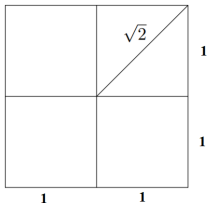
Princípio da Casa dos Pombos (PCP)

1º versão: Se em n caixas colocarmos **mais de** n objetos, alguma caixa terá **mais de** um objeto.

2º versão: Se em n caixas colocarmos **mais de** $k \cdot n$ objetos, alguma caixa terá **mais de** k objetos.

Prova por contradição: Se todas as caixas tiverem no máximo k objetos, então o número de objetos será no máximo $k \cdot n$. Como são mais de $k \cdot n$, objetos, alguma caixa terá mais de k objetos.

Exemplo: Em um quadrado de lado 2, prove que todo conjunto de **5** pontos tem pelo menos 2 a distância $\leq \sqrt{2}$, que todo conjunto de **9** pontos tem pelo menos 3 a distância $\leq \sqrt{2}$ e que todo conjunto de **13** pontos tem pelo menos 4 a distância $\leq \sqrt{2}$ entre si.

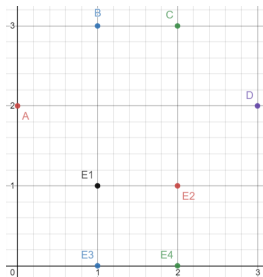


Princípio da Casa dos Pombos (PCP)

2º versão: Se em n caixas colocarmos mais de $k \cdot n$ objetos, alguma caixa terá mais de k objetos.

Exemplo: Dados 5 pontos no plano com coordenadas inteiras, prove que pelo menos um dos dez pontos médio gerados por eles também possui coordenadas inteiras.

Solução: Dividir os pontos em 4 grupos: PP (x e y pares), PI (x par e y ímpar), IP (x ímpar e y par) e II (x e y ímpares). Dois pontos de um mesmo grupo tem o ponto médio entre eles com coordenadas inteiras, pois $x_m = (x_1 + x_2)/2$ e $y_m = (y_1 + y_2)/2$. PCP

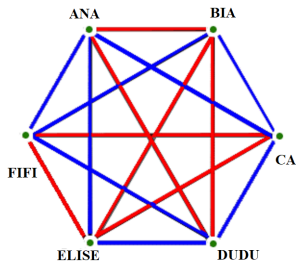


Princípio da Casa dos Pombos

2º versão: Se em n caixas colocarmos mais de $k \cdot n$ objetos, alguma caixa terá mais de k objetos.

Exemplo (Ramsey): Em um grupo de 6 pessoas, há 3 pessoas que se conhecem mutuamente ou há 3 pessoas que não se conhecem mutuamente.

Solução: Pessoas A, B, C, D, E e F. Pelo PCP, F conhece 3 ou desconhece 3 pessoas em A, B, C, D, E. Suponha que F conhece A, B e D, sem perda de generalidade. Se A, B e D não se conhecem, Ok. Se A e B, ou A e D, ou B e D se conhecem, teremos com F três pessoas que se conhecem.



Princípio da Casa dos Pombos

Questão 3 da Lista 3: Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \subseteq \{0, 1, \dots, 2n - 1\}$. Mostre que se $|A| = n + 2$, então $\exists a, a' \in A$, $a \neq a'$, tais que $a + a' = 2n$.

Solução: Considere o conjunto $A' = A - \{0, n\}$ (pombos). Como $|A| = n + 2$, então $|A'| \geq n$. Vamos formar $n - 1$ casa de pombos: $\{1, 2n - 1\}, \{2, 2n - 2\}, \{3, 2n - 3\}, \dots, \{n - 2, n + 2\}, \{n - 1, n + 1\}$. Como A' tem mais de $n - 1$ pombos, dois pombos estão na mesma casa. Logo A tem dois números somando $2n$.

Princípio da Casa dos Pombos (PCP)

Questão 4 da Lista 3: $A \subseteq \mathbb{N}$. Prove que:

- (a) $|A| = n + 1 \implies \exists a, a' \in A, a \neq a': a - a'$ é múltiplo de n .
- (b) $|A| = n + 2 \implies \exists a, a' \in A, a \neq a': (a - a'$ é múltiplo de $2n$) ou $(a + a'$ é múltiplo de $2n$).

Solução (a): Na divisão por n , existem n restos possíveis (0 a $n - 1$). Pelo **PCP**, A tem números a e a' com mesmo resto na divisão por n . Logo $a - a'$ é múltiplo de n .

Solução (b): Se A tem dois números a e a' com mesmo resto na divisão por $2n$, então $a - a'$ é múltiplo de $2n$. OK. Suponha então, na divisão dos números em A por $2n$, todos os restos são diferentes. Pela Questão 3, existe $a, a' \in A$ tais que a soma de seus restos é igual a $2n$. Portanto, $a + a'$ é múltiplo de $2n$.

Princípio da Casa dos Pombos (PCP)

Questão 5 da Lista 3: Mostre que, em todo grupo de $n \geq 2$ pessoas, há duas pessoas com o mesmo número de amigos no grupo. Considere que a relação “ser amigo” é simétrica mas não é reflexiva.

Solução: Em um grupo de n pessoas, os valores possíveis para número de amigos vão de 0 a $n - 1$ (são n valores). No entanto:

- ▶ Se alguém conhece 0 pessoas, então ninguém conhece $n - 1$ pessoas;
- ▶ Se alguém conhece $n - 1$ pessoas, então ninguém conhece 0 pessoas;

Então teremos na realidade $n - 1$ valores possíveis para número de amigos, pois 0 e $n - 1$ se excluem mutuamente.

Pelo PCP, duas pessoas tem o mesmo número de amigos.

Princípio da Casa dos Pombos (PCP)

Questão 9 da Lista 3: Quantas são as soluções de:

- (a) $w + x + y + z = 50$, sendo w, x, y e z números naturais?
- (b) $w + x + y + z = 120$, sendo w, x, y e z números naturais tais que pelo menos um deles é maior que 27?

Solução (a): $\binom{50+4-1}{4-1} = \binom{53}{3}$

Solução (b):

Pelo **PCP**, alguma variável w, x, y, z terá valor ≥ 30 .

Então a restrição sempre ocorrerá.

Resposta = $\binom{120+4-1}{4-1} = \binom{123}{3}$.

Capítulo 12

PROBABILIDADE

Capítulo 12 - Probabilidade

Um **espaço de probabilidade discreto** (Ω, Pr) é dado por um conjunto Ω (chamado **espaço amostral**, finito ou infinito enumerável) e uma **função de probabilidade** $Pr : \Omega \rightarrow [0, 1]$ tal que $\sum_{\omega \in \Omega} Pr(\omega) = 1$.

Exemplo: Uma moeda não-viciada é lançada até se obter uma coroa. Seja S o espaço amostral $\{1, 2, 3, \dots\}$ do número de lançamentos da moeda. Determine a função de probabilidade $\mathbb{P} : S \rightarrow [0, 1]$.

Solução: $\mathbb{P}(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Note que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$ (**soma de PG**).

Exemplo: Uma moeda viciada é lançada até se obter uma coroa, que tem probabilidade $2/3$ de ocorrência. Seja S o espaço amostral $\{1, 2, 3, \dots\}$ do número de lançamentos da moeda. Determine a função de probabilidade $\mathbb{P} : S \rightarrow [0, 1]$.

Solução: $\mathbb{P}(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Note que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2/3}{1-1/3} = 1$ (**soma de PG**).

Capítulo 12 - Probabilidade

Exemplo: Uma moeda não-viciada é lançada 5 vezes. Qual é a probabilidade de aparecer apenas uma cara? E aparecer duas caras?

Solução: Seja C (cara) e K (coroa).

As possibilidades de lançamentos com 1 cara são:
CKKKK, KCKKK, KKCKK, KKKCK, KKKKC:

$$\mathbb{P}(\text{número de caras} = 0) = \binom{5}{0}/2^5 = 1/32.$$

$$\mathbb{P}(\text{número de caras} = 1) = \binom{5}{1}/2^5 = 5/32.$$

$$\mathbb{P}(\text{número de caras} = 2) = \binom{5}{2}/2^5 = 10/32.$$

$$\mathbb{P}(\text{número de caras} = 3) = \binom{5}{3}/2^5 = 10/32$$

$$\mathbb{P}(\text{número de caras} = 4) = \binom{5}{4}/2^5 = 5/32.$$

$$\mathbb{P}(\text{número de caras} = 5) = \binom{5}{5}/2^5 = 1/32.$$

Exemplo: Qual a probabilidade de se obter um “four” no pôquer (4 cartas de uma mesmo valor em uma mão de 5)?

Solução:

$$\mathbb{P}(\text{“four”}) = \frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}}$$

Capítulo 12 - Probabilidade

Exemplo: Dez dados não-viciados são lançados de modo independente. Qual é a probabilidade de nenhum mostrar o número 6?

Solução 1: $\mathbb{P}(\text{Dado } i \neq 6) = 5/6$ para qualquer dado $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$.
 $\mathbb{P}(\text{Todos os Dados } \neq 6) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 16.15\%$.

Solução 2: Número de lançamentos: $6 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 6 = 6^n$.
Número de lançamentos sem 6: $5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 5 = 5^n$.
 $\mathbb{P}(\text{Todos os Dados } \neq 6) = \frac{5^{10}}{6^{10}} \approx 16.15\%$.

Exemplo: Qual é o evento mais provável numa família com 4 filhos: (A) 2 meninos e 2 meninas, ou (B) 3 de um sexo e 1 do outro?

Solução: Total = $2^4 = 16$.

A: hhmm, hmhm, hmmm, mhhm, mhmm, mmmh.

B: hhhh, hhmh, hmhh, mhhh, mmmh, mmhm, mhmm, hmmm.

$\mathbb{P}(A) = 6/16 = 37.5\%$.

$\mathbb{P}(B) = 8/16 = 50\%$.

Capítulo 12 - Probabilidade

Exemplo: Qual é a probabilidade de 4 pessoas terem aniversário diferente? E de pelo menos duas delas terem mesmo aniversário? Assuma que ninguém nasceu em 29 de fevereiro.

Solução: Total = 365^4 . Seja A o evento “todos aniversários diferentes”.

$$\mathbb{P}(A) = (365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362)/365^4 = 98.4\%.$$

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1.64\%.$$

Exemplo (Problema dos aniversários): Qual é o menor número n de alunos numa sala tal que é mais provável encontrar dois alunos com a mesma data de aniversário do que o contrário?

Solução: Pelo PCP, $n \leq 365$.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}.$$

Tomando $n = 23$: $\mathbb{P}(A) = 49.27\%$. Portanto, $\mathbb{P}(\bar{A}) = 50.73\%$.

Seção 12.7 - Probabilidade Condicional

Exemplo: Uma moeda é lançada 5 vezes. Qual é a probab. da 1º jogada ser C (cara), sabendo que ocorreram exatamente 3 coroas (K)?

Solução: Seja A o evento “1º jogada é C” e B o evento “exatam. 3 K’s”.
 $Pr(B) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10 \cdot 2^{-5}$. $Pr(A \wedge B) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 4 \cdot 2^{-5}$.

$$Pr(A | B) = \frac{Pr(A \wedge B)}{Pr(B)} = \frac{4 \cdot 2^{-5}}{10 \cdot 2^{-5}} = \frac{2}{5}$$

Exemplo: Considere um sorteio onde objetos 1, 2, ..., n podem ser escolhidos com probab. p_1, p_2, \dots, p_n , tais que $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Sabendo que o objeto sorteado foi o 1, 2 ou 3, qual a probabilidade de ter sido o objeto 1?

Solução: Seja A o evento “foi o 1” e B o evento “foi o 1, 2 ou 3”.
 $Pr(B) = p_1 + p_2 + p_3$. $Pr(A \wedge B) = Pr(A) = p_1$.

$$Pr(A | B) = \frac{Pr(A \wedge B)}{Pr(B)} = \frac{p_1}{p_1 + p_2 + p_3}$$

Seção 12.7 - Probabilidade Condicional

Problema de Monty-Hall: Um prêmio atrás de 3 portas. Assuma que o participante escolhe a porta 1, s.p.g. Seja P_i o evento “o prêmio está na porta i ” e seja A_j o evento “MH abriu a porta j ” (sem o prêmio principal).

$$\mathbb{P}(P_i \wedge A_1) = 0, \forall i. \quad \mathbb{P}(P_i \wedge A_j) = 0, \forall i.$$

$$\mathbb{P}(P_1 \wedge A_2) = \mathbb{P}(P_1 \wedge A_3) = \mathbb{P}(P_1)/2 = 1/6.$$

$$\mathbb{P}(P_2 \wedge A_3) = \mathbb{P}(P_2) = 1/3. \quad \mathbb{P}(P_3 \wedge A_2) = \mathbb{P}(P_3) = 1/3.$$

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2 \wedge P_1) + \mathbb{P}(A_2 \wedge P_3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1/2.$$

$$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_3 \wedge P_1) + \mathbb{P}(A_3 \wedge P_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1/2. \quad \text{Portanto:}$$

$$\mathbb{P}(P_1 | A_2) = \frac{\mathbb{P}(P_1 \wedge A_2)}{\mathbb{P}(A_2)} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3$$

$$\mathbb{P}(P_3 | A_2) = \frac{\mathbb{P}(P_3 \wedge A_2)}{\mathbb{P}(A_2)} = \frac{1/3}{1/2} = 2/3$$

$$\mathbb{P}(P_1 | A_3) = \frac{\mathbb{P}(P_1 \wedge A_3)}{\mathbb{P}(A_3)} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3$$

$$\mathbb{P}(P_2 | A_3) = \frac{\mathbb{P}(P_2 \wedge A_3)}{\mathbb{P}(A_3)} = \frac{1/3}{1/2} = 2/3$$

Seção 12.7 - Probabilidade Condicional

Problema de Monty-Hall: E se fossem 4 portas?

$$\mathbb{P}(P_i \wedge A_1) = 0, \forall i. \quad \mathbb{P}(P_i \wedge A_i) = 0, \forall i.$$

$$\mathbb{P}(P_1 \wedge A_2) = \mathbb{P}(P_1 \wedge A_3) = \mathbb{P}(P_1 \wedge A_4) = \mathbb{P}(P_1)/3 = 1/12.$$

$$\mathbb{P}(P_2 \wedge A_3) = \mathbb{P}(P_2 \wedge A_4) = \mathbb{P}(P_2)/2 = 1/8.$$

$$\mathbb{P}(P_3 \wedge A_2) = \mathbb{P}(P_3 \wedge A_4) = \mathbb{P}(P_3)/2 = 1/8.$$

$$\mathbb{P}(P_4 \wedge A_2) = \mathbb{P}(P_4 \wedge A_3) = \mathbb{P}(P_4)/2 = 1/8.$$

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2 \wedge P_1) + \mathbb{P}(A_2 \wedge P_3) + \mathbb{P}(A_2 \wedge P_4) = \frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1/3.$$

$$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_3 \wedge P_1) + \mathbb{P}(A_3 \wedge P_2) + \mathbb{P}(A_3 \wedge P_4) = \frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1/3.$$

$$\mathbb{P}(A_4) = \mathbb{P}(A_4 \wedge P_1) + \mathbb{P}(A_4 \wedge P_2) + \mathbb{P}(A_4 \wedge P_3) = \frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1/3.$$

Portanto:

$$\mathbb{P}(P_1 | A_2) = \frac{\mathbb{P}(P_1 \wedge A_2)}{\mathbb{P}(A_2)} = \frac{1/12}{1/3} = 1/4 = \mathbb{P}(P_1 | A_3) = \mathbb{P}(P_1 | A_4)$$

$$\mathbb{P}(P_2 | A_3) = \frac{\mathbb{P}(P_2 \wedge A_3)}{\mathbb{P}(A_3)} = \frac{1/8}{1/3} = 3/8 = \mathbb{P}(P_2 | A_4)$$

Igualmente: $\mathbb{P}(P_3|A_2) = \mathbb{P}(P_3|A_4) = \mathbb{P}(P_4|A_2) = \mathbb{P}(P_4|A_3) = 3/8.$

Seção 12.7 - Probabilidade Condicional

Problema de Monty-Hall: E se fossem 5 portas?

$$\mathbb{P}(P_i \wedge A_1) = 0, \forall i. \quad \mathbb{P}(P_i \wedge A_j) = 0, \forall i.$$

$$\mathbb{P}(P_1 \wedge A_2) = \mathbb{P}(P_1 \wedge A_3) = \mathbb{P}(P_1 \wedge A_4) = \mathbb{P}(P_1 \wedge A_5) = \mathbb{P}(P_1)/4 = 1/20.$$

$$\mathbb{P}(P_2 \wedge A_3) = \mathbb{P}(P_2 \wedge A_4) = \mathbb{P}(P_2 \wedge A_5) = \mathbb{P}(P_2)/3 = 1/15.$$

$$\mathbb{P}(P_3 \wedge A_2) = \mathbb{P}(P_3 \wedge A_4) = \mathbb{P}(P_3 \wedge A_5) = \mathbb{P}(P_3)/3 = 1/15.$$

$$\mathbb{P}(P_4 \wedge A_2) = \mathbb{P}(P_4 \wedge A_3) = \mathbb{P}(P_4 \wedge A_5) = \mathbb{P}(P_4)/3 = 1/15.$$

$$\mathbb{P}(P_5 \wedge A_2) = \mathbb{P}(P_5 \wedge A_3) = \mathbb{P}(P_5 \wedge A_4) = \mathbb{P}(P_5)/3 = 1/15.$$

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2 \wedge P_1) + \mathbb{P}(A_2 \wedge P_3) + \mathbb{P}(A_2 \wedge P_4) + \mathbb{P}(A_2 \wedge P_5) = \\ \frac{1}{20} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = 1/4. \quad \mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_4) = \mathbb{P}(A_5) = 1/4.$$

Portanto:

$$\mathbb{P}(P_1|A_2) = \frac{\mathbb{P}(P_1 \wedge A_2)}{\mathbb{P}(A_2)} = \frac{1/20}{1/4} = 1/5 = \mathbb{P}(P_1|A_3) = \mathbb{P}(P_1|A_4) = \mathbb{P}(P_1|A_5)$$

$$\mathbb{P}(P_2|A_3) = \frac{\mathbb{P}(P_2 \wedge A_3)}{\mathbb{P}(A_3)} = \frac{1/15}{1/4} = 4/15 = \mathbb{P}(P_2|A_4) = \mathbb{P}(P_2|A_5)$$

Igualmente: $\mathbb{P}(P_3|A_2) = \mathbb{P}(P_4|A_2) = \mathbb{P}(P_5|A_2) = 4/15.$

Seção 12.7 - Probabilidade Condicional

Problema de Monty-Hall: Explicação com menos contas.

3 portas: Probabilidade $1/3$ de estar na Porta 1 e $2/3$ de não estar. Aberta a Porta 2, toda a probabilidade $2/3$ fica concentrada na Porta 3.

4 portas: Probabilidade $1/4$ de estar na Porta 1 e $3/4$ de não estar. Aberta a Porta 2, toda a probabilidade $3/4$ fica concentrada nas Portas 3 e 4. Escolhendo aleat. uma dessas 2 portas, temos probabilidade $3/8$.

5 portas: Probabilidade $1/5$ de estar na Porta 1 e $4/5$ de não estar. Aberta a Porta 2, toda a probabilidade $4/5$ fica concentrada nas Portas 3, 4 e 5. Escolhendo aleat. uma dessas 3 portas, temos probab. $4/15$.

6 portas: Probabilidade $1/6$ de estar na Porta 1 e $5/6$ de não estar. Aberta a Porta 2, toda a probabilidade $5/6$ fica concentrada nas Portas 3, 4, 5 e 6. Escolhendo aleat. uma dessas 4 portas, temos prob. $5/24$.

7 portas: Probabilidade $1/7$ de estar na Porta 1 e $6/7$ de não estar. Aberta a Porta 2, toda a probabilidade $6/7$ fica concentrada nas Portas 3, 4, 5, 6 e 7. Escolhendo aleat. uma dessas 5 portas, temos prob. $6/35$.

Seção 12.7 - Probabilidade Condicional

Problema de Monty-Hall: **Variação:** O apresentador abre 2 portas ao invés de 1.

4 portas: Probabilidade $1/4$ de estar na Porta 1 e $3/4$ de não estar. Abertas as Portas 2 e 3, toda a prob. $3/4$ fica concentrada na Porta 4.

5 portas: Probabilidade $1/5$ de estar na Porta 1 e $4/5$ de não estar. Abertas as Portas 2 e 3, toda a prob. $4/5$ fica concentrada nas Portas 4 e 5. Escolhendo aleat. uma dessas 2 portas, temos prob. $4/10$.

6 portas: Probabilidade $1/6$ de estar na Porta 1 e $5/6$ de não estar. Abertas as Portas 2 e 3, toda a prob. $5/6$ fica concentrada nas Portas 4, 5 e 6. Escolhendo aleat. uma dessas 3 portas, temos prob. $5/18$.

7 portas: Probabilidade $1/7$ de estar na Porta 1 e $6/7$ de não estar. Abertas as Portas 2 e 3, toda a prob. $6/7$ fica concentrada nas Portas 4, 5, 6 e 7. Escolhendo aleat. uma dessas 4 portas, temos prob. $6/28$.

Seção 12.7 - Probabilidade Condicional

Varição de Monty-Hall: 100 portas. Participante escolhe Porta ℓ .

MH abre 98 portas diferentes da Porta ℓ e sem o prêmio. Seja k a única porta não aberta. Probabilidade **1%** de estar na Porta ℓ e 99% de não estar. Após abrir as portas, toda a prob. **99%** se concentra na Porta k .

MH abre 97 portas diferentes da Porta ℓ e sem o prêmio. Sejam k_1 e k_2 as únicas portas não abertas. Probabilidade **1%** de estar na Porta ℓ e 99% de não estar. Após abrir as portas, toda a prob. 99% se concentra nas Portas k_1 e k_2 . Escolhendo uma das duas aleat., temos prob. **49.5%**

MH abre 96 portas diferentes da Porta ℓ e sem o prêmio. Sejam k_1 , k_2 e k_3 as únicas portas não abertas. Probabilidade **1%** de estar na Porta ℓ e 99% de não estar. Após abrir as portas, toda a prob. 99% se concentra nas Portas k_1 , k_2 e k_3 . Escolhendo uma das três aleat., temos prob. **33%**