Redução polinomial

Permite comparar
o "grau de complexidade" de problemas diferentes.

Π, Π': problemas

Redução de Π a Π':
algoritmo ALG que resolve Π usando uma subrotina hipotética ALG′ que resolve Π', de forma que...

Redução polinomial

Permite comparar
o "grau de complexidade" de problemas diferentes.

Π, Π': problemas

Redução polinomial

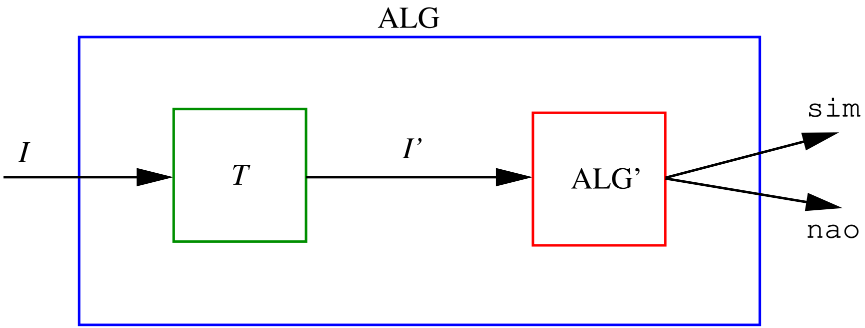
Permite comparar
o "grau de complexidade" de problemas diferentes.

Π, Π': problemas

Redução de Π a Π':
algoritmo ALG que resolve Π usando uma subrotina hipotética ALG′ que resolve Π', de forma que,
se ALG′ é polinomial, então ALG é um algoritmo polinomial.

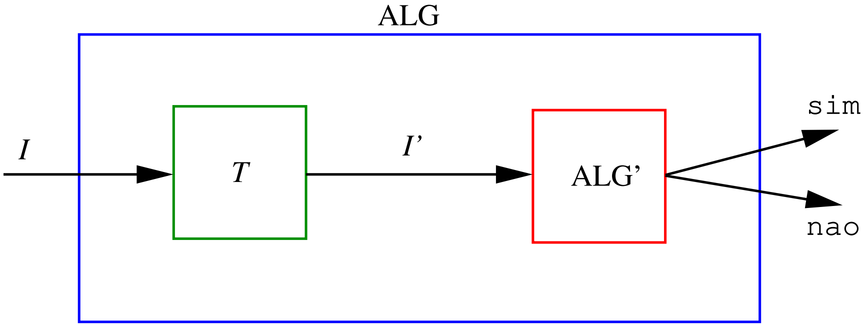
$\Pi \leq_P \Pi'$ $=$ existe uma redução de Π a Π'.

Esquema comum de redução



Faz apenas uma chamada ao algoritmo ALG′.

Esquema comum de redução



Faz apenas uma chamada ao algoritmo ALG$'$.

T transforma uma instância I de Π em uma instância $I' = T(I)$ de Π' tal que

$$\Pi(I) = \text{sim se e somente se } \Pi'(I') = \text{sim}$$

Satisfatibilidade

Problema: Dada uma fórmula booleana ϕ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, existe uma atribuição

$$t : \{x_1, \ldots, x_n\} \rightarrow \{\text{verdade}, \text{falso}\}$$

que torna ϕ verdadeira?

Satisfatibilidade

Problema: Dada uma fórmula booleana ϕ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, existe uma atribuição

$$t : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{\text{verdade}, \text{falso}\}$$

que torna ϕ verdadeira?

Exemplo: $\phi = (x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_3)$.

Satisfatibilidade

Problema: Dada uma fórmula booleana ϕ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, existe uma atribuição

$$t : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{\text{verdade}, \text{falso}\}$$

que torna ϕ verdadeira?

Exemplo: $\phi = (x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_3)$.

Um literal é uma variável x ou sua negação $\neg x$.

3-Satisfatibilidade

Problema: Dada uma fórmula booleana ϕ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ em que cada claúsula tem exatamente 3 literais, existe uma atribuição

$$t : \{x_1, \ldots, x_n\} \rightarrow \{\text{verdade}, \text{falso}\}$$

que torna ϕ verdadeira?

3-Satisfatibilidade

Problema: Dada uma fórmula booleana ϕ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ em que cada claúsula tem exatamente 3 literais, existe uma atribuição

$$t : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{\text{verdade}, \text{falso}\}$$

que torna ϕ verdadeira?

Exemplo:

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4)$$

Exemplo 4

Satisfatibilidade $\leq_P$ 3-Satisfatibilidade

Exemplo 4

Satisfatibilidade $\leq_P$ 3-Satisfatibilidade

Descreveremos um algoritmo polinomial T que recebe uma fórmula booleana ϕ e devolve uma fórmula booleana ϕ' com exatamente 3 literais por claúsula tal que

$$\phi \text{ é satisfatível} \Leftrightarrow \phi' \text{ é satisfatível.}$$

Exemplo 4

Satisfatibilidade $\leq_P$ 3-Satisfatibilidade

Descreveremos um algoritmo polinomial T que recebe uma fórmula booleana ϕ e devolve uma fórmula booleana ϕ' com exatamente 3 literais por claúsula tal que

$$\phi \text{ é satisfatível} \Leftrightarrow \phi' \text{ é satisfatível.}$$

A transformação consiste em substituir cada claúsula de ϕ por uma coleção de claúsulas com exatamente 3 literais cada, e equivalente a ϕ.

Exemplo 4 (cont.)

Seja $(l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k)$ uma claúsula de ϕ.

Exemplo 4 (cont.)

Seja $(l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k)$ uma claúsula de ϕ.

Caso 1. $k = 1$

Troque (l_1) por

$$(l_1 \vee y_1 \vee y_2)\,(l_1 \vee \neg y_1 \vee y_2)\,(l_1 \vee y_1 \vee \neg y_2)\,(l_1 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2)$$

onde y_1 e y_2 são variáveis novas.

Exemplo 4 (cont.)

Seja $(l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k)$ uma claúsula de ϕ.

Caso 1. $k = 1$

Troque (l_1) por

$$(l_1 \vee y_1 \vee y_2)\,(l_1 \vee \neg y_1 \vee y_2)\,(l_1 \vee y_1 \vee \neg y_2)\,(l_1 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2)$$

onde y_1 e y_2 são variáveis novas.

Caso 2. $k = 2$

Troque $(l_1 \vee l_2)$ por $(l_1 \vee l_2 \vee y)\,(l_1 \vee l_2 \vee \neg y)$,
onde y é uma variável nova.

Exemplo 4 (cont.)

Seja $(l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k)$ uma claúsula de ϕ.

Caso 1. $k = 1$

Troque (l_1) por

$$(l_1 \vee y_1 \vee y_2)\,(l_1 \vee \neg y_1 \vee y_2)\,(l_1 \vee y_1 \vee \neg y_2)\,(l_1 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2)$$

onde y_1 e y_2 são variáveis novas.

Caso 2. $k = 2$

Troque $(l_1 \vee l_2)$ por $(l_1 \vee l_2 \vee y)\,(l_1 \vee l_2 \vee \neg y)$,
onde y é uma variável nova.

Caso 3. $k = 3$

Mantenha $(l_1 \vee l_2 \vee l_3)$.

Exemplo 4 (cont.)

Caso 4. $k > 3$

Troque $(l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k)$ por

$(l_1 \vee l_2 \vee y_1)$

$(\neg y_1 \vee l_3 \vee y_2)\,(\neg y_2 \vee l_4 \vee y_3)\,(\neg y_3 \vee l_5 \vee y_4)\ \ldots$

$(\neg y_{k-3} \vee l_{k-1} \vee l_k)$

onde $y_1, y_2, \ldots, y_{k-3}$ são variáveis novas.

Exemplo 4 (cont.)

Caso 4. $k > 3$

Troque $(l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k)$ por

$(l_1 \vee l_2 \vee y_1)$

$(\neg y_1 \vee l_3 \vee y_2)\,(\neg y_2 \vee l_4 \vee y_3)\,(\neg y_3 \vee l_5 \vee y_4)\ \ldots$

$(\neg y_{k-3} \vee l_{k-1} \vee l_k)$

onde $y_1, y_2, \ldots, y_{k-3}$ são variáveis novas.

Verifique que ϕ é satisfátivel $\Leftrightarrow$ nova fórmula é satisfatível.

Exemplo 4 (cont.)

Caso 4. $k > 3$

Troque $(l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k)$ por

$(l_1 \vee l_2 \vee y_1)$

$(\neg y_1 \vee l_3 \vee y_2)\,(\neg y_2 \vee l_4 \vee y_3)\,(\neg y_3 \vee l_5 \vee y_4)\;\ldots$

$(\neg y_{k-3} \vee l_{k-1} \vee l_k)$

onde $y_1, y_2, \ldots, y_{k-3}$ são variáveis novas.

Verifique que ϕ é satisfátivel $\Leftrightarrow$ nova fórmula é satisfatível.

O tamanho da nova claúsula é $\mathrm{O}(q)$, onde q é o número de literais que ocorrem em ϕ (contando-se as repetições).

Problemas completos em NP

Um problema Π em NP é NP-completo
se cada problema em NP pode ser reduzido a Π.

Problemas completos em NP

Um problema Π em NP é NP-completo
se cada problema em NP pode ser reduzido a Π.

Teorema de S. Cook e L.A. Levin:
Satisfatibilidade é NP-completo.

Problemas completos em NP

Um problema Π em NP é NP-completo
se cada problema em NP pode ser reduzido a Π.

Teorema de S. Cook e L.A. Levin:
Satisfatibilidade é NP-completo.

Se $\Pi \leq_P \Pi'$ e Π é NP-completo, então Π' é NP-completo.

Problemas completos em NP

Um problema Π em NP é NP-completo
se cada problema em NP pode ser reduzido a Π.

Teorema de S. Cook e L.A. Levin:
Satisfatibilidade é NP-completo.

Se $\Pi \leq_P \Pi'$ e Π é NP-completo, então Π' é NP-completo.

Existe um algoritmo polinomial para um problema NP-completo se e somente se $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.

Demonstração de NP-completude

Para demonstrar que um problema Π' é NP-completo podemos utilizar o Teorema de Cook e Levin.

Demonstração de NP-completude

Para demonstrar que um problema Π' é NP-completo podemos utilizar o Teorema de Cook e Levin.

Para isto devemos:

- Demonstrar que Π' está em NP.
- Escolher um problema Π sabidamente NP-completo.
- Demonstrar que $\Pi \leq_P \Pi'$.

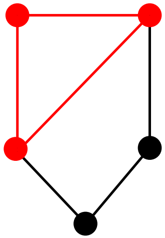
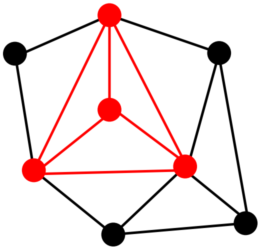
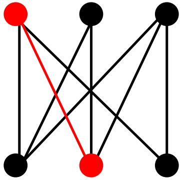
Clique

Problema: Dado um grafo G e um inteiro k,
G possui um clique com $\geq k$ vértices?

Clique

Problema: Dado um grafo G e um inteiro k,
G possui um clique com $\geq k$ vértices?

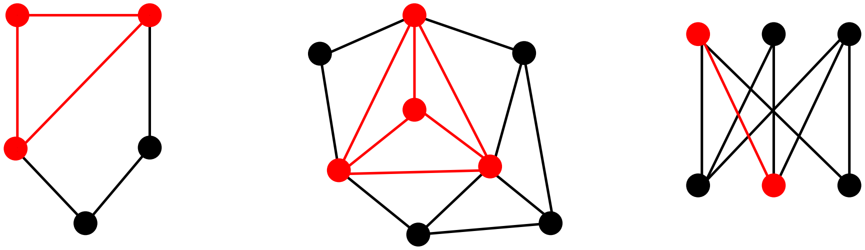
Exemplos:

Clique

Problema: Dado um grafo G e um inteiro k, G possui um clique com $\geq k$ vértices?

Exemplos:



clique com k vértices $=$ subgrafo completo com k vértices

Clique é NP-completo

Clique está em NP e 3-Satisfatibilidade $\leq_P$ Clique.

Clique é NP-completo

Clique está em NP e 3-Satisfatibilidade $\leq_P$ Clique.

Descreveremos um algoritmo polinomial T que recebe uma fórmula booleana ϕ com k claúsulas e exatamente 3 literais por claúsula e devolve um grafo G tais que

$$\phi \text{ é satisfatível} \Leftrightarrow G \text{ possui um clique} \geq k.$$

Clique é NP-completo

Clique está em NP e 3-Satisfatibilidade $\leq_P$ Clique.

Descreveremos um algoritmo polinomial T que recebe uma fórmula booleana ϕ com k claúsulas e exatamente 3 literais por claúsula e devolve um grafo G tais que

$$\phi \text{ é satisfatível} \Leftrightarrow G \text{ possui um clique} \geq k.$$

Para cada claúsula, o grafo G terá três vértices, um correspondente a cada literal da cláusula. Logo, G terá $3k$ vértices.

Clique é NP-completo

Clique está em NP e 3-Satisfatibilidade $\leq_P$ Clique.

Descreveremos um algoritmo polinomial T que recebe uma fórmula booleana ϕ com k claúsulas e exatamente 3 literais por claúsula e devolve um grafo G tais que

$$\phi \text{ é satisfatível} \Leftrightarrow G \text{ possui um clique} \geq k.$$

Para cada claúsula, o grafo G terá três vértices, um correspondente a cada literal da cláusula. Logo, G terá $3k$ vértices. Teremos uma aresta ligando vértices u e v se

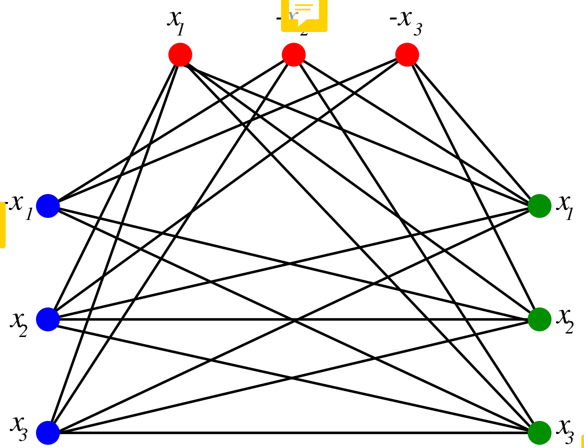
- u e v são vértices que correspondem a literais em diferentes claúsulas; e
- se u corresponde a um literal x
  então v não corresponde ao literal $\neg x$.

Clique é NP-completo (cont.)

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

Clique é NP-completo (cont.)

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$



Cobertura por vértices

Um conjunto S de vértices de um grafo G é uma cobertura se toda aresta de G tem uma ponta em S.

Cobertura por vértices

Um conjunto S de vértices de um grafo G é uma cobertura se toda aresta de G tem uma ponta em S.

Problema: Dado um grafo G e um inteiro k,
G possui uma cobertura com $\leq k$ vértices?

Cobertura por vértices

Um conjunto S de vértices de um grafo G é uma cobertura se toda aresta de G tem uma ponta em S.

Problema: Dado um grafo G e um inteiro k,
G possui uma cobertura com $\leq k$ vértices?

Você consegue provar que este problema é NP-completo?

Problemas NP-difíceis

Um problema Π, não necessariamente em NP, é NP-díficil se a existência de um algoritmo polinomial para Π implica que $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.

Problemas NP-difíceis

Um problema Π, não necessariamente em NP, é NP-díficil se a existência de um algoritmo polinomial para Π implica que $P = NP$.

Todo problema NP-completo é NP-difícil.

Problemas NP-difíceis

Um problema Π, não necessariamente em NP, é NP-díficil se a existência de um algoritmo polinomial para Π implica que $P = NP$.

Todo problema NP-completo é NP-difícil.

Exemplos:

- Encontrar um ciclo hamiltoniano é NP-difícil,
  mas não é NP-completo, pois não é um problema de decisão e portanto não está em NP.
- Satisfabilidade é NP-completo e NP-difícil.

Mais problemas NP-difíceis

Os seguintes problema são NP-difíceis:

- mochila booleana
- caminho máximo
- caminho hamiltoniano
- escalonamento de tarefas
- subset-sum
- clique máximo
- cobertura por vértices
- sistemas 0-1

e mais um montão deles . . .

Exercícios

Exercício 25.A
Suponha que os algoritmos Alg e Alg′ transformam cadeias de caracteres em outras cadeias de caracteres. O algoritmo Alg consome $\mathrm{O}(n^2)$ unidades de tempo e o algoritmo Alg′ consome $\mathrm{O}(n^4)$ unidades de tempo, onde n é o número de caracteres da cadeia de entrada. Considere agora o algoritmo AlgAlg′ que consiste na composição de Alg e Alg′, com Alg′ recebendo como entrada a saída de Alg. Qual o consumo de tempo de AlgAlg′?

Exercício 25.B [CLRS 34.1-4]
O algoritmo Mochila-Booleana é polinomial? Justifique a sua resposta.

Exercício 25.C [CLRS 34.1-5]
Seja Alg um algoritmo que faz um número constante de chamadas a um algoritmo Alg′. Suponha que se o consumo de tempo de Alg′ é constante então o consumo de tempo de Alg é polinomial.

1. Mostre que se o consumo de tempo de Alg′ é polinomial então o consumo de tempo de Alg é polinomial.
2. Mostre que se o consumo de tempo de Alg′ é polinomial e Alg faz um número polinomial de chamadas a Alg′, então é possível que o consumo de tempo de Alg seja exponencial.

Mais exercícios

Exercício 25.D [CLRS 34.2-1]
Mostre que o problema de decidir se dois grafos dados são isomorfos está em NP.

Exercício 25.E [CLRS 34.2-2]
Mostre que um grafo bipartido com um número ímpar de vértices não é hamiltoniano (= possui um ciclo hamiltoniano).

Exercício 25.F [CLRS 34.2-3]
Mostre que se o problema do Ciclo hamiltoniano está em P, então o problema de listar os vértices de um ciclo hamiltoniano, na ordem em que eles ocorrem no ciclo, pode ser resolvido em tempo polinomial.

Exercício 25.G [CLRS 34.2-5]
Mostre que qualquer problema em NP pode ser resolvido por um algoritmo de consumo de tempo $2^{O(n^c)}$, onde n é o tamanho da entrada e c é uma constante.

Exercício 25.H [CLRS 34.2-6]
Mostre que o problema do Caminho hamiltoniano está em NP.

Exercício 25.I [CLRS 34.2-7]
Mostre que o problema do caminho hamiltoniano pode ser resolvido em tempo polinomial em grafos orientado acíclicos.

Mais exercícios

Exercício 25.J [CLRS 34.2-8]
Uma fórmula booleana ϕ é uma tautologia se $t(\phi) = \text{verdade}$ para toda atribuição de $t : \{\text{variáveis}\} \to \{\text{verdade}, \text{falso}\}$. Mostre que o problema de decidir se uma dada fórmula booleana é uma tautologia está em co-NP.

Exercício 25.K [CLRS 34.2-9]
Prove que $\mathrm{P} \subseteq \text{co-NP}$.

Exercício 25.L [CLRS 34.2-10]
Prove que se $\mathrm{NP} \neq \text{co-NP}$, então $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$.

Exercício 25.M [CLRS 34.2-11]
Se G é um grafo conexo com pelo menos 3 vértices, então G^3 é o grafo que se obtém a partir de G ligando-se por uma aresta todos os pares de vértices que estão conectados em G por um caminho com no máximo três arestas. Mostre que G^3 é hamiltoniano.

Exercício 25.N [CLRS 34.3-2]
Mostre que se $\Pi_1 \leq_P \Pi_2$ e $\Pi_2 \leq_P \Pi_3$, então $\Pi_1 \leq_P \Pi_3$.

Mais exercícios

Exercício 25.O [CLRS 34.3-7]
Suponha que Π e Π' são problemas de decisão sobre o mesmo conjunto de instâncias e que $\Pi(I) = \text{sim}$ se e somente se $\Pi'(I) = \text{não}$. Mostre que Π é NP-completo se e somente se Π' é co-NP-completo. (Um problema Π' é co-NP-completo se Π' está em co-NP e $\Pi \leq_P \Pi'$ para todo problema Π em co-NP.)

Exercício 25.P [CLRS 34.4-4]
Mostre que o problema de decidir se uma fórmula boolena é uma tautologia é co-NP-completo. (Dica: veja o exercício 25.O.)

Exercício 25.Q [CLRS 34.4-6]
Suponha que ALG' é um algoritmo polinomial para Satisfatibilidade.
Descreva um algoritmo polinomial ALG que recebe um fórmula booleana ϕ e devolve uma atribuição $t : \{\text{variáveis}\} \to \{\text{verdade}, \text{falso}\}$ tal que $t(\phi) = \text{verdade}$.

Exercício 25.Q [CLRS 34.5-3]
Prove que o problema Sistemas lineares 0-1 é NP-completo.

Exercício 25.R [CLRS 34.5-6]
Mostre que o problema Caminho hamiltoniano é NP-completo.

Exercício 25.S [CLRS 34.5-7]
Mostre que o problema de encontrar um ciclo de comprimento máximo é NP-completo.