

Construção e Análise de Algoritmos  
Lista de exercícios 3

1. Responda e explique cada um dos itens abaixo.
  - (a) O que é a Classe P?
  - (b) O que é um certificado de um problema de decisão? O que é a Classe NP e qual a relação dela com certificados?
  - (c) O que é um Algoritmo Não-Determinístico?
  - (d) O que é uma Redução Polinomial entre dois problemas e para que serve?
  - (e) O que é a Classe NP-Completa?
  
2. Para cada uma das afirmações abaixo, diga se ela é *verdadeira*, *falsa*, *verdadeira se  $P \neq NP$*  ou *falsa se  $P \neq NP$* . Dê uma justificativa curta para cada resposta.
  - (1) Não há problemas em P que são NP-Completos
  - (2) Existe apenas algoritmo exponencial para o problema da parada
  - (3) Existem problemas em P que estão em NP
  - (4) Existem problemas em NP que não estão em P
  - (5) Se A pode ser polinomialmente reduzido a B, e B é NP-Completo, então A é NP-Completo
  - (6) Se A pode ser polinomialmente reduzido a B, e  $B \in P$ , então  $A \in P$
  - (7) O problema de obter o percurso mínimo do Caixeiro Viajante é NP-Completo
  - (8) O problema SAT não pertence a Classe P
  
3. Seja MOCHILA o problema de decidir se, dados inteiros positivos  $P$  e  $V$  e dado um conjunto  $S$  onde cada elemento  $s \in S$  possui um peso  $p(s)$  e um valor  $v(s)$ , existe um subconjunto  $S'$  de  $S$  tal que a soma dos pesos dos elementos de  $S'$  seja menor ou igual a  $P$  e a soma dos valores dos elementos de  $S'$  seja maior ou igual a  $V$ . Prove que MOCHILA é NP-Completo. **Dica:** Problema SOMA-SUBC (ou SUBSET-SUM) da soma de subconjuntos.
  
4. Seja HITTING-SET o problema de decidir se, dado como entrada um inteiro  $K$  e uma coleção de subconjuntos  $C_1, \dots, C_m$  de um conjunto  $S$ , existe um subconjunto  $S^*$  com  $K$  elementos de  $S$  tal que, para todo subconjunto  $C_i$ ,  $C_i$  contém algum elemento de  $S^*$ . Prove que HITTING-SET é NP-Completo. **Dica:** Cobertura de vértices.
  
5. Dizemos que um grafo  $G$  está parcialmente rotulado se alguns de seus vértices possuem um número inteiro como rótulo. Dado um vértice rotulado  $v$  de  $G$ , seja  $r(v)$  o seu rótulo. Seja CAMPO-MINADO o problema de decidir se, dado como entrada um grafo  $G$  parcialmente rotulado,  $G$  pode ser completamente rotulado de forma que qualquer vértice  $v$  com rótulo positivo tenha exatamente  $r(v)$  vizinhos com rótulo negativo. Prove que CAMPO-MINADO é NP-Completo. **Dica:** Imagine rótulos negativos

como bombas do campo minado. Tente reduzir 3SAT para este problema: cada variável tendo dois vértices no grafo com um vizinho comum com rótulo igual a 1. Pense nas bombas do campo minado como uma atribuição de Verdadeiro.

6. No seguinte jogo de paciência, é dado um tabuleiro  $n \times n$ . Em cada uma das suas  $n^2$  posições está colocada uma pedra azul ou uma pedra vermelha ou nenhuma pedra. Você joga removendo pedras do tabuleiro até que cada coluna contenha pedras de uma única cor e cada linha contenha pelo menos uma pedra. Você vence se atingir esse objetivo. Vencer pode ser possível ou não, dependendo da configuração inicial. Seja PACIÊNCIA o problema de decidir se dado um tabuleiro dessa forma como entrada é possível vencer. Prove que PACIÊNCIA é NP-Completo. Dica: Tente reduzir 3SAT para este problema: pense as colunas como variáveis e as linhas como cláusulas. Depois adicione algumas linhas e colunas inócuas para que o tabuleiro fique quadrado.

7. Seja DOMINANTE o problema de decidir se, dado como entrada um grafo  $G$  e um inteiro  $k > 0$ , existe um conjunto  $D$  com  $k$  vértices de  $G$  tal que todo vértice de  $G$  está em  $D$  ou é adjacente a algum vértice de  $D$ .

- Prove que DOMINANTE é NP-Completo usando o problema 3SAT
- Prove que DOMINANTE é NP-Completo usando o problema COB-VERT da Cobertura de vértices.

8. Seja COR-DIF o problema de decidir se, dado como entrada um conjunto  $S$  e uma coleção  $C = \{C_1, \dots, C_k\}$  de subconjuntos de  $S$ , onde  $k > 0$ , é possível colorir os elementos de  $S$  com duas cores de forma que nenhum conjunto  $C_i$  tenha todos os seus elementos com a mesma cor. Prove que COR-DIF é NP-Completo. **Dica:** Tente reduzir 3SAT para este problema: Crie um conjunto  $S$  contendo toda variável e seu complemento. Adicione um elemento especial  $F$  a  $S$ . Para cada variável, crie um subconjunto  $C_i$  contendo apenas ela e seu complemento. Para cada cláusula, crie um subconjunto  $C_j$  contendo seus literais e mais o elemento especial  $F$ .

9. Dado um grafo  $G$ , uma coloração é uma atribuição de cores a seus vértices de forma que vértices adjacentes tenham cores diferentes. Seja 3CORES o problema de decidir se, dado um grafo  $G$  como entrada,  $G$  pode ser colorido com 3 cores. Mostre que 3CORES é NP-Completo.

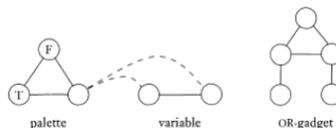


FIGURA 1. Use essas engrenagens na questão 1