Universidade Federal do Ceará
Departamento de Computação

Matemática Discreta

Lista de exercícios 2

Cada $\surd$ denota um nível de dificuldade: $\surd$ fácil, $\surd\surd$ médio e $\surd\surd\surd$ difícil.

$\surd\surd$ **1.** (**indução**) Prove por indução que o número de movimentos para levar n discos de uma haste até outra haste da Torre de Hanói é $2^n - 1$.

$\surd\surd$ **2.** (**indução**) Mostre por indução que, se $n \in \mathbb{N}^*$ é uma potência de 2 ($n = 2^k$, para algum $k \in \mathbb{N}$) e $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n$ e $T(1) = 1$, então $T(n) = n \log_2 n + n$.

$\surd$ **3.** (**inclusão e exclusão**) Em um grupo de 155 alunos, 84 possuem computador pessoal, 100 possuem endereço eletrônico, 30 possuem página pessoal, 54 têm computador pessoal e endereço eletrônico, 15 têm computador e página pessoais, 8 possuem endereço eletrônico e página pessoal, e 3 alunos têm computador pessoal, endereço eletrônico e página pessoal. Responda as seguintes perguntas usando o Princípio da Inclusão e Exclusão:

1. Quantos alunos têm apenas endereço eletrônico?
2. Quantos alunos não possuem nenhum dos 3 itens?
3. Quantos alunos têm computador e homepage, mas não tem email?

$\surd\surd$ **4.** (**inclusão e exclusão**) Quantos números entre 1 e 350.000 não são divísveis por 7, 11, 13, 17 ou 19?

$\surd\surd$ **5.** (**relações**) Sejam R uma relação binária e A e B conjuntos. Por simplicidade de notação, escrevemos $R[X]$, onde X é um conjunto, para indicar $R[X, X]$. Prove ou construa um contra-exemplo:

1. $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$.
2. $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$.
3. $R[A] - R[B] \subseteq R[A - B]$.
4. $R[A \cap B] = R[A] \cap R[B]$.
5. $R[A] - R[B] = R[A - B]$.

$\surd\surd$ **6.** (**relações**) Mostre que se R é uma relação reflexiva e transitiva, então $R \cap R^{-1}$ é uma relação de equivalência, onde $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$.

$\surd\surd\surd$ **7.** (**relações**) Sejam A um conjunto e $R \subseteq A \times A$. Seja ainda

$$S = \{(a, a') \mid \exists a'' \in A, (a, a'') \in R \wedge (a'', a') \in R\}.$$

Prove ou dê um contra-exemplo:

1. se R é uma relação de equivalência, então S também o é.
2. se S é uma relação de equivalência, então R também o é.

$\surd$ **8.** (**relações**) Sejam A um conjunto e $R \subseteq A \times A$ uma ordem parcial. Mostre que se $B \subseteq A$, então $R \cap (B \times B)$ é uma ordem parcial.

$\surd$ **9.** (**funções**) Dada um função bijetiva qualquer $F : A \to A$ em um conjunto A, qual é a função $F \circ F^{-1}$? Prove.

$\surd\surd$ **10.** (**funções**) Sejam A e B dois conjuntos. Mostre que para quaisquer funções $f : A \to B$, $g : A \to B$ e $h : A \to B$, temos que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

$\surd\surd$ **11.** (**casa dos pombos**) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \subseteq \{0, 1, \cdots, 2n-1\}$. Mostre que se $|A| = n+2$, então existem $a \in A$ e $a' \in A$, $a \neq a'$, tais que $a + a' = 2n$.

$\surd\surd\surd$ **12.** (**casa dos pombos**) Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, e $A \subseteq \mathbb{N}$. Prove cada uma das afirmações a seguir.

1. se $|A| = n+1$, então existem $a \in A$ e $a' \in A$, $a \neq a'$, tais que $a - a'$ é divisível por n.
2. se $|A| = n+2$, então existem $a \in A$ e $a' \in A$, $a \neq a'$, tais que ($a - a'$ é divisível por $2n$) ou ($a + a'$ é divisível por $2n$).

Observe que $a - a'$ é divisível por n se e somente se $a \bmod n = a' \bmod n$, e que $a + a'$ é divisível por n se e somente se $(a \bmod n) + (a' \bmod n) = n$.

$\surd\surd$ **13.** (**casa dos pombos**) Mostre que, em todo grupo de $n \geq 2$ pessoas, há duas pessoas com o mesmo número de amigos no grupo. Considere que a relação “ser amigo” é simétrica mas não é reflexiva.