Universidade Federal do Ceará
Departamento de Computação

Matemática Discreta

Lista de exercícios 3

Cada $\surd$ denota um nível de dificuldade: $\surd$ fácil, $\surd\surd$ médio e $\surd\surd\surd$ difícil.

$\surd$ **1.** (**recorrências**) Resolva as seguintes recorrências:

(i) $a_n = a_{n-1} + 7$, $a_0 = 13$;

(ii) $a_n = 5 \cdot a_{n-1} + 3$, $a_0 = 8$;

(iii) $a_n = 5 \cdot a_{n-1} - 6 \cdot a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$;

(iv) $a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 4 \cdot a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$;

$\surd$ **2.** (**recorrências**) Seja $n = 3^k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Resolva a seguinte relação de recorrência pelo método da árvore de recursão: $T(n) = T(n/3) + 17$, $T(1) = 29$.

$\surd$ **3.** (**permutações**) Se enumerarmos todas as permutações dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 em ordem crescente, então:

1. que posição ocupa o número 42513?
2. qual número ocupa a posição 73?

$\surd$ **4.** (**combinações**) Quantos são os subconjuntos de k elementos de $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ nos quais:

(i) a_1 aparece?

(ii) a_1 não aparece?

(iii) a_1 e a_2 aparecem?

$\surd\surd$ **5.** (**combinatória**) Considere todos os subconjuntos com 5 elementos de $\{a_1, a_2, \cdots, a_{12}\}$. Se ordenarmos todos esses subconjuntos por ordem crescente de índices, em quantos subconjuntos o elemento a_8 aparece na posição 3 da sua ordenação?

$\surd\surd$ **6.** (**combinatória**) Quantas são as soluções de:

(i) $w + x + y + z = 50$, sendo w, x, y e z números naturais?

(ii) $w + x + y + z = 120$, sendo w, x, y e z números naturais tais que pelo menos um deles é maior que 27?

$\surd\surd\surd$ **7.** (**combinatória**) Demonstre as seguintes afirmações:

1. $\binom{n+p+1}{p} = \sum_{r=0}^{p} \binom{n+r}{r}$. **Dica:** Stifel e indução em p.
2. $\binom{n+p+1}{p+1} = \sum_{r=0}^{n} \binom{p+r}{p}$ **Dica:** Stifel e indução em n.

3. $\binom{n+2}{p+2} = \binom{n}{p} + 2\binom{n}{p+1} + \binom{n}{p+2}$. **Dica:** Stifel duas vezes.

4. $\binom{n+3}{p+3} = \binom{n}{p} + 3\binom{n}{p+1} + 3\binom{n}{p+2} + \binom{n}{p+3}$. **Dica:** Stifel três vezes.

5. $\binom{n+4}{p+4} = \binom{n}{p} + 4\binom{n}{p+1} + 6\binom{n}{p+2} + 4\binom{n}{p+3} + \binom{n}{p+4}$. **Dica:** Stifel quatro vezes.

6. $\binom{n+k}{p+k} = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \cdot \binom{n}{p+r}$. **Dica:** Stifel k vezes ou indução em k.

$\surd\surd$ **8.** (**combinatória**) Determine o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{99} \qquad \text{e} \quad \text{de} \qquad \left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{100}$$

$\surd\surd$ **9.** (**probabilidade**) Considere um experimento em que uma pessoa é selecionada e se verifique o dia de seu aniversário. Considere ainda que ninguém nasceu no dia 29 de fevereiro e que cada dia do ano tem a mesma probabilidade 1/365. Qual o número mínimo de pessoas que devemos selecionar para garantir com probabilidade maior que 60% que pelo menos duas tem aniversário no mesmo dia?

$\surd\surd$ **10.** (**probabilidade**) Façamos um jogo semelhante ao de Monty-Hall. Um participante deve escolher uma porta entre quatro portas possíveis. Atrás de uma delas existe um prêmio. Após fazer sua escolha, o apresentador abre uma porta não escolhida e que não possui o prêmio, e pergunta se o participante deseja mudar sua escolha. O que ele deve fazer? Justifique.

$\surd$ **11.** (**grafos**) Considere o problema de Coloração de Mapas, onde países vizinhos recebam cores diferentes. Se três países fazem fronteira entre si (como Brasil, Argentina e Paraguai), então os três devem ter cores diferentes. Elabore um mapa que precise de pelo menos três cores e no qual **não** existam três países vizinhos entre si.

$\surd$ **12.** (**grafos**) Dizemos que um grafo é d-regular se todos os vértices tem grau d (lembre que o grau de um vértice é o número de arestas que o contém). Desenhe todos os grafos 2-regulares com 4 vértices e todos os grafos 3-regulares com 5 vértices.

$\surd\surd$ **13.** (**grafos**) Seja G um grafo e seja H um subgrafo de G. Para cada um dos itens abaixo, prove ou encontre um contra-exemplo. Relembre que $\omega(G)$ é o tamanho da maior clique de G (ou sseja, maior subgrafo completo de G) e $\alpha(G)$ é o tamanho do maior conjunto independente de G.

- $\alpha(H) \leq \alpha(G)$
- $\alpha(H) \geq \alpha(G)$
- $\omega(H) \leq \omega(G)$
- $\omega(H) \geq \omega(G)$

$\surd\surd\surd$ **14.** (**grafos/indução**) Um *grafo* é um par $G = (V, E)$, onde V é um conjunto de elementos denominados *vértices*, e E é um conjunto de elementos denominados *arestas*, onde uma aresta é um subconjunto de V com dois vértices. Dizemos que o grafo G é *conexo* se, para todo par x e y de vértices, existe um *caminho* $\langle x = v_1, v_2, \ldots, v_\ell = y\rangle$ de vértices de G tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$, para todo $1 \leq i < \ell$. Mostre, por indução no tamanho de V, que, se $G = (V, E)$ é um grafo conexo, então $|E| \geq |V| - 1$.