Universidade Federal do Ceará
Departamento de Computação

Matemática Discreta
Lista de exercícios 1

Cada $\surd$ denota um nível de dificuldade: $\surd$ fácil, $\surd\surd$ médio e $\surd\surd\surd$ difícil.

$\surd$ **1.** Considere que P é a sentença "A comida é boa", Q é "O serviço é bom" e R é "A classificação é três estrelas". Escreva as seguintes sentenças usando P, Q, R e conectivos lógicos:

1. Ou a comida é boa, ou o serviço é bom, ou ambos.
2. Ou a comida é boa, ou o serviço é bom, mas não ambos.
3. A comida é boa, enquanto que o serviço é pobre.
4. Não há o caso em que a comida seja boa e a classificação seja três estrelas.
5. Se a comida e o serviço são bons, então a classificação é três estrelas.
6. Não é verdade que três estrelas sempre significa boa comida e bons serviços.

$\surd$ **2.** Construa a tabela verdade para as seguintes sentenças:

1. $(P \Rightarrow \neg Q) \vee \neg P$
2. $(P \vee \neg Q) \Rightarrow \neg Q$
3. $P \iff (\neg P \vee \neg Q)$
4. $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$

$\surd\surd$ **3.** Considere a seguinte advertência feita na embalagem de um jogo:

1. Existem três sentenças nesta advertência.
2. Duas das sentenças desta advertêcia são falsas.
3. O incremento médio do QI das pessoas que aprendem este jogo é de mais de 20 pontos.

A última sentença é verdadeira ? Escreva a argumentação de sua resposta.

$\surd\surd$ **4.** (OBMEP Nível 1 - 2018) Vovó Vera quis saber qual de suas cinco netinhas fez um desenho na parede de sua sala. As netinhas fizeram as seguintes declarações. Se apenas uma delas mentiu, descubra quem fez o desenho. Escreva a argumentação da sua resposta.

- Emília: *Não fui eu.*
- Luísa: *Quem desenhou foi a Marília ou a Rafaela.*
- Marília: *Não foi a Rafaela nem a Vitória.*
- Rafaela: *Não foi a Luísa.*
- Vitória: *Luísa não está dizendo a verdade.*

$\surd\surd\surd$ **5.** Um náufrago chega em uma ilha onde convivem duas tribos A e B. Todos os nativos da tribo A sempre mentem. Todos os nativos da tribo B sempre falam a verdade. Ao se deparar com um nativo, o náufrago fez a seguinte pergunta: "*Existe ouro nesta ilha ?*". O nativo respondeu: "*Existe ouro na ilha se e somente se eu falo a verdade*". Usando lógica matemática, descubra se existe ou não ouro na ilha.

$\surd$ **6.** Mostre quais das seguintes sentenças são verdadeiras quando o "$\in$" é colocado no lugar do "__". Em seguida, mostre quais delas são verdadeiras quando "$\subseteq$" é colocado no lugar do "__":

1. $\{\emptyset\}$ __ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
2. $\{\emptyset\}$ __ $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$.
3. $\{\{\emptyset\}\}$ __ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
4. $\{\{\emptyset\}\}$ __ $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$.
5. $\{\{\emptyset\}\}$ __ $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

$\surd\surd$ **7.** Demonstre que se $B \subseteq C$, então $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(C)$.

$\surd\surd$ **8.** Demonstre que as seguintes sentenças são **V** para quaisquer conjuntos A, B e C:

1. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$
2. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. Em que condições esses conjuntos são iguais ?
3. $A = (A \cap B) \cup (A - B)$
4. $A \cup (B - A) = A \cup B$

$\surd$ **9.** Mostre, através de um exemplo, que para alguns conjuntos A, B e C, o conjunto $A - (B - C)$ é diferente do conjunto $(A - B) - C$.

$\surd$ **10.** Defina, para dois elementos a e b,

$$\langle a, b\rangle = \{\{a, \emptyset\}, \{b, \{\emptyset\}\}\}$$

Prove que $\langle a, b\rangle = \langle a', b'\rangle$ se e somente se $a = a'$ e $b = b'$.

$\surd$ **11.** Prove que $A \times B = \emptyset$ se e somente se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

$\surd\surd$ **12.** Demonstre ou dê um contra-exemplo para cada dos casos abaixo. Suponha que A, B e C sejam conjuntos.

1. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
2. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

$\surd$ **13.** Prove por **indução** que $k(k+1)(k+2)$ é divisível por 3 para todo $k \in \mathbb{N}$.

$\surd\surd$ **14.** Prove por **indução** que, se $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 64$, então existem $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}$ tais que $k = 5a + 17b$.

$\surd\surd\surd$ **15.** Prove por **indução matemática** que

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ **(d)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$