

Construção e Análise de Algoritmos
Lista de exercícios 3

1. Responda e explique cada um dos itens abaixo.
 - (a) O que é a Classe P?
 - (b) O que é um certificado de um problema de decisão? O que é a Classe NP e qual a relação dela com certificados?
 - (c) O que é um Algoritmo Não-Determinístico?
 - (d) O que é uma Redução Polinomial entre dois problemas e para que serve?
 - (e) O que é a Classe NP-Completa?

2. Para cada uma das afirmações abaixo, diga se ela é *verdadeira*, *falsa*, *verdadeira se $P \neq NP$* ou *falsa se $P \neq NP$* . Dê uma justificativa curta para cada resposta.
 - (1) Não há problemas em P que são NP-Completos
 - (2) Existe apenas algoritmo exponencial para o problema da parada
 - (3) Existem problemas em P que estão em NP
 - (4) Existem problemas em NP que não estão em P
 - (5) Se A pode ser polinomialmente reduzido a B, e B é NP-Completo, então A é NP-Completo
 - (6) Se A pode ser polinomialmente reduzido a B, e $B \in P$, então $A \in P$
 - (7) O problema de obter o percurso mínimo do Caixeiro Viajante é NP-Completo
 - (8) O problema SAT não pertence a Classe P

3. Seja MOCHILA o problema de decidir se, dados inteiros positivos P e V e dado um conjunto S onde cada elemento $s \in S$ possui um peso $p(s)$ e um valor $v(s)$, existe um subconjunto S' de S tal que a soma dos pesos dos elementos de S' seja menor ou igual a P e a soma dos valores dos elementos de S' seja maior ou igual a V . Prove que MOCHILA é NP-Completo. **Dica:** Problema SOMA-SUBC (ou SUBSET-SUM) da soma de subconjuntos.

4. Seja HITTING-SET o problema de decidir se, dado como entrada um inteiro K e uma coleção de subconjuntos C_1, \dots, C_m de um conjunto S , existe um subconjunto S^* com K elementos de S tal que, para todo subconjunto C_i , C_i contém algum elemento de S^* . Prove que HITTING-SET é NP-Completo. **Dica:** Cobertura de vértices.

5. Dizemos que um grafo G está parcialmente rotulado se alguns de seus vértices possuem um número inteiro como rótulo. Dado um vértice rotulado v de G , seja $r(v)$ o seu rótulo. Seja CAMPO-MINADO o problema de decidir se, dado como entrada um grafo G parcialmente rotulado, G pode ser completamente rotulado de forma que qualquer vértice v com rótulo positivo tenha exatamente $r(v)$ vizinhos com rótulo negativo. Prove que CAMPO-MINADO é NP-Completo. **Dica:** Imagine rótulos negativos

como bombas do campo minado. Tente reduzir 3SAT para este problema: cada variável tendo dois vértices no grafo com um vizinho comum com rótulo igual a 1. Pense nas bombas do campo minado como uma atribuição de Verdadeiro.

6. No seguinte jogo de paciência, é dado um tabuleiro $n \times n$. Em cada uma das suas n^2 posições está colocada uma pedra azul ou uma pedra vermelha ou nenhuma pedra. Você joga removendo pedras do tabuleiro até que cada coluna contenha pedras de uma única cor e cada linha contenha pelo menos uma pedra. Você vence se atingir esse objetivo. Vencer pode ser possível ou não, dependendo da configuração inicial. Seja PACIÊNCIA o problema de decidir se dado um tabuleiro dessa forma como entrada é possível vencer. Prove que PACIÊNCIA é NP-Completo. Dica: Tente reduzir 3SAT para este problema: pense as colunas como variáveis e as linhas como cláusulas. Depois adicione algumas linhas e colunas inócuas para que o tabuleiro fique quadrado.

7. Seja DOMINANTE o problema de decidir se, dado como entrada um grafo G e um inteiro $k > 0$, existe um conjunto D com k vértices de G tal que todo vértice de G está em D ou é adjacente a algum vértice de D .

- Prove que DOMINANTE é NP-Completo usando o problema 3SAT
- Prove que DOMINANTE é NP-Completo usando o problema COB-VERT da Cobertura de vértices.

8. Seja COR-DIF o problema de decidir se, dado como entrada um conjunto S e uma coleção $C = \{C_1, \dots, C_k\}$ de subconjuntos de S , onde $k > 0$, é possível colorir os elementos de S com duas cores de forma que nenhum conjunto C_i tenha todos os seus elementos com a mesma cor. Prove que COR-DIF é NP-Completo. **Dica:** Tente reduzir 3SAT para este problema: Crie um conjunto S contendo toda variável e seu complemento. Adicione um elemento especial F a S . Para cada variável, crie um subconjunto C_i contendo apenas ela e seu complemento. Para cada cláusula, crie um subconjunto C_j contendo seus literais e mais o elemento especial F .

9. Dado um grafo G , uma coloração é uma atribuição de cores a seus vértices de forma que vértices adjacentes tenham cores diferentes. Seja 3CORES o problema de decidir se, dado um grafo G como entrada, G pode ser colorido com 3 cores. Mostre que 3CORES é NP-Completo.



FIGURA 1. Use essas engrenagens na questão 1