Universidade Federal do Ceará
Departamento de Computação

Construção e Análise de Algoritmos

Lista de exercícios 3

1. Escreva um algoritmo que obtenha um código de Huffman ternário, ou seja, um código de Huffman em que podemos codificar os símbolos com 0, 1 e 2. Exemplifique esse algoritmo e também o código de Huffman normal para o seguinte exemplo: um texto com 100.000 caracteres onde os símbolos são A, B, C, D, E, F e G com frequências 40%, 15%, 11%, 10%, 14%, 7% e 5%. Quantos bits esse texto codificado terá tanto no caso normal como no ternário? Quantos bits esse texto teria se usássemos uma codificação de tamanho fixo? Compare cada algoritmo: melhorou ou piorou?

2. Considere um conjunto de livros numerados de 1 a n. Suponha que o livro i tem peso p_i e que $0 < p_i < 1$ para cada i. Escreva um algoritmo para acondicionar os livros no menor número possível de envelopes de modo que cada envelope tenha no máximo 2 livros e o peso do conteúdo de cada envelope seja no máximo 1. Prove a corretude do seu algoritmo.

3. Escreva um algoritmo eficiente que receba como entrada um conjunto de variáveis $x_1, \ldots, x_n$ e dois conjuntos I e D de pares (x_i, x_j) de variáveis. Os pares (x_i, x_j) em I representam restrições de igualdade $x_i = x_j$ e os pares (x_a, x_b) em D representam restrições de desigualdade $x_a \neq x_b$. Seu algoritmo deve responder se é possível ou não satisfazer todas as restrições em I e em D. Por exemplo, a seguinte entrada não é satisfatível: $I = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4)\}$ e $D = \{(x_1, x_4)\}$.

4. Uma pessoa fará uma festa e está decidindo quem convidar. Ele tem n amigos e uma lista dos pares de amigos que se conhecem. Ele quer que ninguém se sinta deslocado, mas também quer que a festa seja interessante e que pessoas que não se conhecem façam amizade. Assim ele se colocou as seguintes restrições: Para cada convidado, devem existir pelo menos 10 pessoas na festa que ele conhece e dez pessoas na festa que ele não conhece. Faça um algoritmo que retorne o maior número possível de convidados.

5. Seja $1, \ldots, n$ um conjunto de tarefas. Cada tarefa consome um dia de trabalho; durante um dia somente uma das tarefas pode ser executada. Os dias são numerados de 1 a n. A cada tarefa T está associado um prazo P_T: a tarefa deve ser executada em algum dia do intervalo $1, \ldots, P_T$. A cada tarefa T está associada uma multa $M_T \geq 0$. Se uma tarefa T é executada depois do prazo P_T, sou obrigado a pagar a multa M_T (mas a multa não depende do número de dias de atraso). Escreva um algoritmo guloso para programar as tarefas (ou seja, informar em qual dia cada tarefa será realizada) de modo a minimizar a multa total. Prove a corretude e analise o consumo de tempo.

6. Escreva um algoritmo para o Problema 2SAT. Justifique.

7. Responda e explique cada um dos itens abaixo.

(a) O que é a Classe P?
(b) O que é um certificado de um problema de decisão? O que é a Classe NP e qual a relação dela com certificados?
(c) O que é um Algoritmo Não-Determinístico?
(d) O que é uma Redução Polinomial entre dois problemas e para que serve?
(e) O que é a Classe NP-Completa?

8. Para cada uma das afirmações abaixo, diga se ela e *verdadeira*, *falsa*, *verdadeira se P≠NP* ou *falsa se P≠NP*. Dê uma justificativa curta para cada resposta.

(1) Não há problemas em P que são NP-Completos
(2) Existe apenas algoritmo exponencial para o problema da parada
(3) Existem problemas em P que estão em NP
(4) Existem problemas em NP que não estão em P
(5) Se A pode ser polinomialmente reduzido a B, e B é NP-Completo, então A é NP-Completo
(6) Se A pode ser polinomialmente reduzido a B, e B $\in$ P, então A $\in$ P
(7) O problema de obter o percurso mínimo do Caixeiro Viajante é NP-Completo
(8) O problema SAT não pertence a Classe P

9. Dado um grafo G, uma coloração é uma atribuição de cores a seus vértices de forma que vértices adjacentes tenham cores diferentes. Seja 3CORES o problema de decidir se, dado um grafo G como entrada, G pode ser colorido com 3 cores. Mostre que 3CORES é NP-Completo.

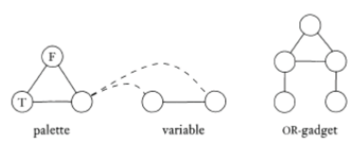

FIGURA 1. Use essas engrenagens na questão 1

10. Dizemos que um grafo G esta parcialmente rotulado se alguns de seus vértices possuem um número inteiro como rótulo. Dado um vértice rotulado v de G, seja $r(v)$ o seu rótulo. Seja CAMPO-MINADO o problema de decidir se, dado como entrada um grafo G parcialmente rotulado, G pode ser completamente rotulado de forma que qualquer vértice v com rótulo positivo tenha exatamete $r(v)$ vizinhos com rótulo negativo. Prove que CAMPO-MINADO é NP-Completo. Dica: Imagine rótulos negativos como bombas do campo minado. Tente reduzir 3SAT para este problema: cada variável tendo dois vértices no grafo com um vizinho comum com rótulo igual a 1. Pense nas bombas do campo minado como uma atribuição de Verdadeiro.

11. No seguinte jogo de paciência, é dado um tabuleiro $n \times n$. Em cada uma das suas n^2 posições está colocada uma pedra azul ou uma pedra vermelha ou nenhuma pedra.

Você joga removendo pedras do tabuleiro até que cada coluna contenha pedras de uma única cor e cada linha contenha pelo menos uma pedra. Você vence se atingir esse objetivo. Vencer pode ser possível ou não, dependendo da configuração inicial. Seja PACIÊNCIA o problema de decidir se dado um tabuleiro dessa forma como entrada é possível vencer. Prove que PACIÊNCIA é NP-Completo. Dica: Tente reduzir 3SAT para este problema: pense as colunas como variáveis e as linhas como cláusulas. Depois adicione algumas linhas e colunas inóquas para que o tabuleiro fique quadrado.

12. Seja DOMINANTE o problema de decidir se, dado como entrada um grafo G e um inteiro $k > 0$, existe um conjunto D com k vértices de G tal que todo vértice de G está em D ou é adjacente a algum vértice de D.

- Prove que DOMINANTE é NP-Completo usando o problema 3SAT
- Prove que DOMINANTE é NP-Completo usando o problema COB-VERT da Cobertura de vértices.

13. Seja COR-DIF o problema de decidir se, dado como entrada um conjunto S e uma coleção $C = \{C_1, \ldots, C_k\}$ de subconjuntos de S, onde $k > 0$, é possivel colorir os elementos de S com duas cores de forma que nenhum conjunto C_i tenha todos os seus elementos com a mesma cor. Prove que COR-DIF é NP-Completo. **Dica:** Tente reduzir 3SAT para este problema: Crie um conjunto S contendo toda variável e seu complemento. Adicione um elemento especial F a S. Para cada variável, crie um subconjunto C_i contendo apenas ela e seu complemento. Para cada cláusula, crie um subconjunto C_j contendo seus literais e mais o elemento especial F.

14. Seja MOCHILA o problema de decidir se, dados inteiros positivos P e V e dado um conjunto S onde cada elemento $s \in S$ possui um peso $p(s)$ e um valor $v(s)$, existe um subconjunto S' de S tal que a soma dos pesos dos elementos de S' seja menor ou igual a P e a soma dos valores dos elementos de S' seja maior ou igual a V. Prove que MOCHILA é NP-Completo. **Dica:** Problema SOMA-SUBC (ou SUBSET-SUM) da soma de subconjuntos.

15. Seja HITTING-SET o problema de decidir se, dado como entrada um inteiro K e uma coleção de subconjuntos $C_1, \ldots, C_m$ de um conjunto S, existe um subconjunto S^* com K elementos de S tal que, para todo subconjunto C_i, C_i contém algum elemento de S^*. Prove que HITTING-SET é NP-Completo. **Dica:** Cobertura de vértices.